Der Zauberwürfel und die Mathematik

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Rubik's Day

ETH Zürich, 15.11.2024

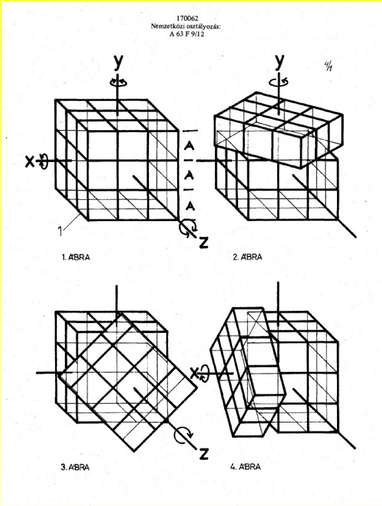
Inhaltsübersicht

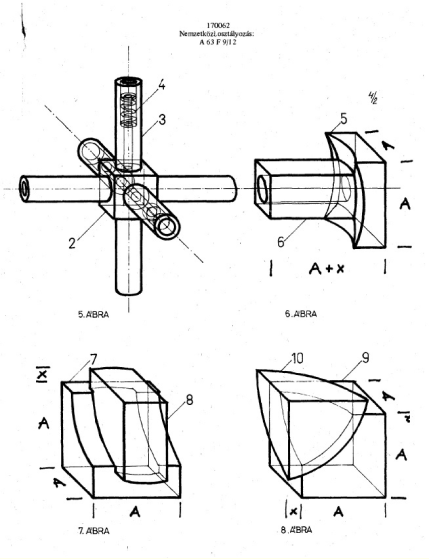
1. Eine kurze Geschichte des Zauberwürfels

Es gibt ein altes Sprichwort über die,
die die Geschichte vergessen.
Ich erinnere mich nicht daran, aber es ist sehr gut.
(Autor nicht mehr bekannt)

1974 **Ernő Rubik**, ein ungarischer Professor für Architektur, erfindet den **Zauberwürfel**.

1975 Der Erfinder registriert sein ungarisches Patent **HU170062**, welches 1977 erteilt wird.


170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12
4/1
y
x
z
A
1
1. ÁBRA
2. ÁBRA
3. ÁBRA
4. ÁBRA


170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12
4/2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
A
A + x
x
5. ÁBRA
6. ÁBRA
7. ÁBRA
8. ÁBRA

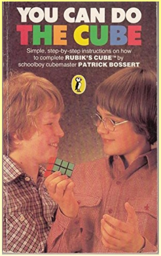
1977 Die ungarische Firma **Politechnika** (später in **Politoys** umbenannt) produziert ca. 5000 Zauberwürfel.

1978-1980 Die Firmen **Pentangle (GB)** und **Ideal Toys (USA)** übernehmen den internationalen Vertrieb und bestellen 500.000 Zauberwürfel. Aus Marketinggründen wird er in **Rubik's Cube** umbenannt.

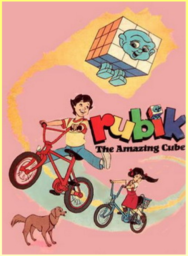
1980 Der Zauberwürfel wird bei internationalen Spielwarenmessen vorgestellt und in Deutschland zum **Spiel des Jahres** gewählt. Innerhalb eines Jahres werden **100 Millionen Zauberwürfel** verkauft.

1981 Patrick Bossert, ein 12-jähriger Junge aus England, schreibt das Buch **You Can Do the Cube**. Es verkauft sich 1.5 Millionen mal und steht auf der New York Times Bestseller Liste.

1982 Die erste Speedcubing Weltmeisterschaft findet in Budapest statt. Der Sieger ist ein 16-jähriger, in Vietnam geborener Schüler mit einer Zeit von **22.95 Sekunden**.



1983-1984 Der Fernsehsender ABC sendet jeden Samstag morgen eine Folge der Zeichentrickserie **Rubik, the Amazing Cube**. Der Held ist ein Zauberwürfel mit Armen und Beinen.



Der Zauberwürfel heutzutage

11.6.2023 **Max Park** stellt einen neuen Weltrekord im Speedcubing auf. Er löst den Zauberwürfel in **3,13 Sekunden**.

2024 Der Zauberwürfel ist das meistverkaufte Spielzeug der Welt. Es wurden insgesamt bereits über 500 Millionen Zauberwürfel verkauft.

2024 Im `twistypuzzles.com` Online Museum sind bereits über **12000 Drehpuzzles** (Varianten des Zauberwürfels) gelistet und **fast täglich** kommen neue hinzu.

2. Permutationspuzzles

Das WLAN war heute 5 Minuten weg.
Ich musste mich mit meiner Familie unterhalten.
Das scheinen nette Leute zu sein.

Eine Umordnung von n Elementen nennt man eine **Permutation**. Oft ordnet man das Zahlentupel $(1, 2, \ldots, n)$ um.
Mathematisch gesehen ist eine Umordnung eine **bijektive Abbildung** $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Man schreibt sie auch in der Form $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

Beispiele für Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ Identität,} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ Transposition}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \; n\text{-Zykel}$$

Sätze über Permutationen

(a) Die Menge S_n aller Permutationen von $(1, \ldots, n)$ heißt die **symmetrische Gruppe** der Ordnung n und hat $n!$ Elemente.

(b) Jede Permutation ist (in nicht eindeutiger Weise) ein Produkt von Transpositionen.

(c) Jede Permutation ist (in bis auf die Reihenfolge eindeutiger Weise) ein Produkt disjunkter Zykel.

Gruppen

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : \ G \times G \longrightarrow G$ heißt eine **Gruppe**, wenn gilt:

(1) (Assoziativgesetz) Für $a, b, c \in G$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

(2) (Neutrales Element) Es gibt ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.

(3) (Inverse Elemente) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Beispiele: **(a)** $\mathbb{Z}$ ist bzgl. $+$ eine Gruppe.

(b) Für $n > 1$ sind die **modularen Zahlen** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ bzgl. $+$ eine Gruppe.

(c) S_n ist bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Permutationspuzzles

Ein Puzzlespiel heißt ein **Permutationspuzzle**, wenn gilt:

(1) Jede Bewegung des Puzzles bewirkt eine Permutation in S_n gewisser Teile des Puzzles.

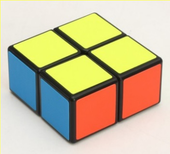
(2) Ist eine Permutation das Ergebnis verschiedener Bewegungen, so sind die resultierenden Positionen des Puzzles nicht unterscheidbar.

(3) Jede Bewegung b des Puzzles ist umkehrbar, d.h. es existiert eine inverse Bewegung b^{-1}.

(4) Sind b_1 und b_2 Bewegungen, so kann man sie hintereinander ausführen und erhält ein Produkt $b_2 \circ b_1$ (sprich b_2 **nach** b_1). Dieses gehört zum Produkt der Permutationen.

Folgerung: Die Bewegungen eines Permutationspuzzles liefern eine **Untergruppe** einer symmetrischen Gruppe S_n.

Beispiel: Gegeben sei der $1 \times 2 \times 2$ Zauberwürfel.



Das Puzzle werde stets so orientiert, dass eine Ecke fest ist.
Bei den anderen drei Würfelchen ist die Orientierung durch die Position bereits eindeutig bestimmt.
Seien $\{1, 2, 3\}$ diese Positionen. Der gelöste Zustand ist also $(1, 2, 3)$.
Als Gruppe der möglichen Permutationen des Puzzles erhalten wir

$$S_3 = \{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)\}.$$

3. Die Zauberwürfelgruppe

Wann bekomme ich eigentlich die ganzen Cookies, die ich ständig akzeptiere?

Als Erstes führen wir Bezeichnungen für die grundlegenden Bewegungen des 3x3x3 Zauberwürfels ein:

R drehe die **Rechte** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

L drehe die **Linke** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

F drehe die **Front** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

B drehe die **Back** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

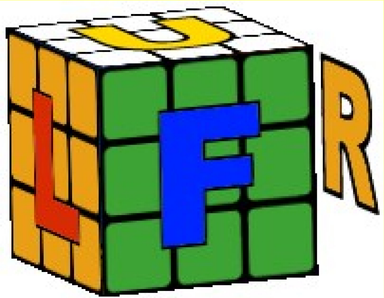
U drehe die **Up** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

D drehe die **Down** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

Weitere Bewegungen

R', L', F', B', U', D' entsprechende Drehungen um 90^o im Gegenuhrzeigersinn, also $R' = R^{-1}$ etc.

$\mathbf{R^2}$, $\mathbf{L^2}$, $\mathbf{F^2}$, $\mathbf{B^2}$, $\mathbf{U^2}$, $\mathbf{D^2}$ entsprechende Drehungen um 180^o



Noch mehr Zauberwürfel-Terminologie

Außen herum hat der Zauberwürfel 26 Würfelchen (engl. **cubies**).

Ihre Außenseiten sind mit 54 **Stickern** in 6 Farben beklebt.

Am Anfang wird der Würfel durch eine Folge zufällig gewählter Bewegungen verdreht (engl. **scramble**). Ziel ist, den Originalzustand wieder herzustellen, in dem die Sticker jeder Seite gleichfarbig sind.

Dazu verwendet man bestimmte **Zugfolgen**, die bestimmte Teilziele erreichen, z.B. bestimmte Ecken oder Kanten korrekt positionieren.

Eine Zugfolge wird rückgängig gemacht indem man die inversen Bewegungen in umgekehrter Reihenfolge ausführt: $(RUF)^{-1} = F'U'R'$.

Achtung: Bei dieser Notation schreibt man die Drehungen in der Reihenfolge hin, in der man sie ausführt.

Die Zauberwürfelgruppe

Indem man die Seitenmitten im Raum fest positioniert, kann man die Wirkung der Bewegungen des Zauberwürfels als Permutationen der 48 Sticker der Ecken und Kanten interpretieren.

Die Zauberwürfelgruppe Z ist damit eine Untergruppe von S_{48}. Sie hat

$$\mathbf{43,252,003,274,489,856,000} \quad \text{Elemente!}$$

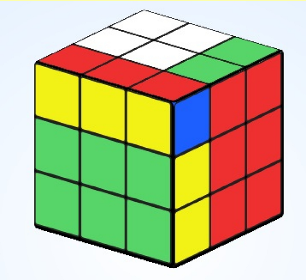
Die Gruppe Z wird von den Permutationen **erzeugt**, die zu den Drehungen **R, L, F, B, U, D** gehören, d.h. jede Permutation kommt von einem Produkt dieser Drehungen und ihrer Inversen.

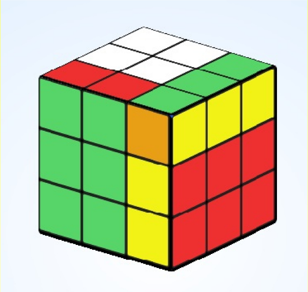
Die Identität **I** ist das neutrale Element von Z.

Die Drehungen erfüllen gewisse **Relationen**, z.B. $\mathbf{R}^4 = \mathbf{I}$.

Der Kommutator

Vergleichen wir nun die Ergebnisse der Zugfolgen **R F’** und **F’ R**:

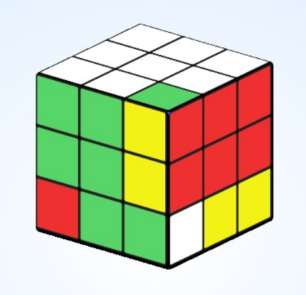


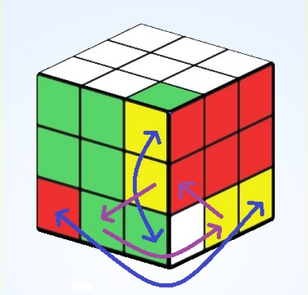


Sie sind verschieden! Die Reihenfolge der Drehungen spielt also eine Rolle, d.h. die Gruppe Z ist **nicht kommutativ**.

Im Gegensatz dazu sind $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ kommutativ.

Betrachte nun die Zugfolge **C** $=$ **R F' R' F** (**raus, raus, rein, rein**). Sie heißt ein **Kommutator**. Was hat sie mit den Würfelchen gemacht?





Der Kommutator C hat die **Ordnung** 6, d.h. es gilt $\mathbf{C}^{\mathbf{6}} = \mathbf{I}$.

4. Ein Slowcubing Tutorium

Schau! Ich habe dieses Puzzle in 4 Stunden gelöst!

Na und?

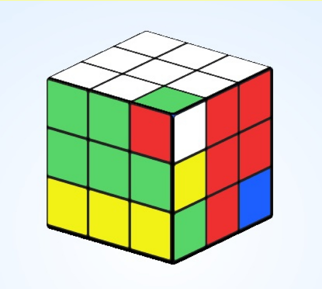
Auf der Schachtel steht 3-6 Jahre!

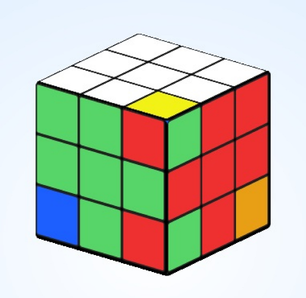
Schätzungsweise schaffen es etwa 5.8% der Weltbevölkerung, den Zauberwürfel zu lösen.

Ziel: Finde einen Lösungsweg, der nur eine Sorte Zugfolge verwendet, nämlich Kommutatoren wie **C = R F' R' F**.

Beachte: Die inverse Zugfolge zu **C** ist **C' = F' R F R'**, also wieder **raus, raus, rein, rein**, aber diesmal starten wir mit **F'**.

Wenn wir die Wirkung des Kommutators **C** betrachten, liegt es nahe zu prüfen, was $\mathbf{C}^2$ und $\mathbf{C}^3$ tun.



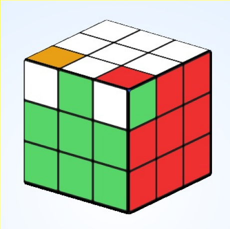


Hier ist $\mathbf{C}^2$ ein **3-Zykel** von Kanten zusammen mit Eckendrehungen und $\mathbf{C}^3$ ist eine **Doppeltransposition** von Ecken.

Idee: Diese Operationen genügen bereits, um den Zauberwürfel zu lösen!

Erste Anwendungen des Kommutators

Angenommen, wir wollen folgende Stellung lösen:



(1) Wende $\mathbf{C}^2$ an um die **FRU** Ecke um 120^o zu drehen.

(2) Verwende den **Vorbereitungszug** **U’**.

(3) Mittels $(\mathbf{C}')^2$ drehe die **FRU** Ecke um -120^o.

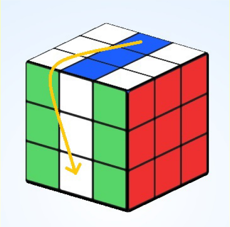
(4) Mache den Vorbereitungszug mit **U** rückgängig.

Weitere Anwendungen des Kommutators

(1) Mit Hilfe von $\mathbf{C^3}$ können wir die Ecken positionieren. Ein 3-Zykel von Ecken der obersten Schicht ist gegeben durch $\mathbf{C^3\ U'\ C^3\ U}$.

(2) Mit $\mathbf{C^2}$ können wir die Kanten positionieren.

(3) Ein weiterer nützlicher 3-Zykel von Kanten ist der Kommutator $\mathbf{M\ D^2\ M'\ D^2}$, wobei M eine 90^o Drehung des **Mittelbands** bezeichnet.



(4) Schließlich prüfe nach, was $\mathbf{C}^2$ mit der Orientierung der Kanten macht. Drehe den Würfel um 120^o um die Raumdiagonale und führe die inverse Zugfolge $(\mathbf{C}')^2$ aus.

Bemerkungen: **(a)** Alle Produkte von Kommutatoren bilden eine Untergruppe der Zauberwürfelgruppe. Sie heißt die **Kommutatorgruppe** von Z und enthält genau die Hälfte der Elemente von Z.

(b) Ist **A** eine Zugfolge und **B** eine Folge von Vorbereitungszügen, so heißt $\mathbf{B}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}^{-1}$ die **Konjugation** von **A** mit **B**.

Die Konjugation hat viele gute Eigenschaften: die Konjugation eines Produkts ist ein Produkt von Konjugationen, die Konjugation eines Kommutators ist ein Kommutator, etc.

5. Gotteszahl und Gottesalgorithmus

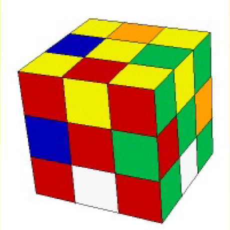
Mathelehrer: Was ist die Hälfte von 637 Kilo?
Schüler: 637 Pfund.

Für jede Stellung des Zauberwürfels suchen wir die **kürzeste** Zugfolge, die sie löst. Die **maximale** Länge eines solchen kürzesten Lösungswegs heißt die **Gotteszahl** des Zauberwürfels. Sie hängt natürlich davon ab, wie wir die Züge zählen.

Definition. Zählt man **R**, **R'**, $\mathbf{R^2}$, etc., als jeweils einen Zug, so erhält man die **Seitendrehungsmetrik**.

Die Gotteszahl in der Seitendrehungsmetrik

Im Jahr **2010** wurde bewiesen, dass die Gotteszahl in der Seitendrehungsmetrik gleich **20** ist. Eine Position, die nachweisbar 20 Drehungen braucht, ist der **Superflip**.



Eine kürzeste Lösung des Superflips ist
U R^2 F B R B^2 R U^2 L B^2 R U' D' R^2 F R' L B^2 U^2 F^2.

Die Gotteszahl in der Vierteldrehungsmetrik

Zählt man **R** und **R'** als **einen** Zug sowie **R^2** als **zwei** Züge und verfährt man ebenso mit den anderen Seiten, so ergibt sich die **Vierteldrehungsmetrik**.

2014 wurde von **Tomas Rokicki** und **Morley Davidson** gezeigt, dass die Gotteszahl in der Vierteldrehungsmetrik **26** ist. Sie brauchten dafür **29 CPU Jahre** und mussten **55,882,296 Stellungen** lösen.

Eine der Stellungen, die nachweislich 26 Vierteldrehungen benötigt, ist der **Superflip mit Vierpunkt**.

Der Superflip mit Vierpunkt

Eine kürzeste Lösung des Superflip mit Vierpunkt ist
U U F U U R' L F F U F' B' R L U U R U D' R L' D R' L' D D.

Die Hilbert-Dehn Funktion

Für jedes $i \geq 0$ sei $\mathrm{HD}_Z(i)$ die Zahl der Stellungen des Zauberwürfels, deren kürzeste Lösung i Vierteldrehungen erfordert. Die Abbildung HD_Z heißt die **Hilbert-Dehn Funktion** von Z.

Einige Werte der Hilbert-Dehn Funktion von Z sind:

$\mathrm{HD}_Z(1) = 12$	$\mathrm{HD}_Z(7) = 8,221,632$	$\mathrm{HD}_Z(13) = 5,442,351,625,028$
$\mathrm{HD}_Z(2) = 114$	$\mathrm{HD}_Z(8) = 76,843,595$	$\mathrm{HD}_Z(14) = 50,729,620,202,582$
$\mathrm{HD}_Z(3) = 1,068$	$\mathrm{HD}_Z(9) = 717,789,576$	$\mathrm{HD}_Z(15) = 472,495,678,811,004$
$\mathrm{HD}_Z(4) = 10,011$	$\mathrm{HD}_Z(10) = 6,701,836,858$	$\mathrm{HD}_Z(16) = 4,393,570,406,220,123$
$\mathrm{HD}_Z(5) = 93,840$	$\mathrm{HD}_Z(11) = 62,549,615,248$	$\mathrm{HD}_Z(17) = 40,648,181,519,827,392$
$\mathrm{HD}_Z(6) = 878,880$	$\mathrm{HD}_Z(12) = 583,570,100,997$	$\mathrm{HD}_Z(18) = 368,071,526,203,620,348$

Die Werte $\mathrm{HD}_Z(19), \ldots, \mathrm{HD}_Z(26)$ sind unbekannt.

Der Gottesalgorithmus

Ziel: Zu jeder Stellung des Zauberwürfels soll eine kürzeste Folge von Drehungen berechnet werden, die sie löst, d.h., die sie in die Ausgangsstellung überführt.

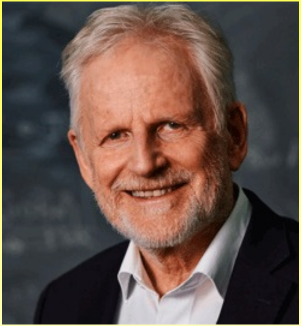
Da angenommen wird, dass ein solcher Algorithmus für Menschen unmöglich zu finden ist, heißt er ein **Gottesalgorithmus**.

Mithilfe der **Computeralgebra** und des nicht-kommutativen **Buchberger-Algorithmus** können wir jedoch einen solchen Algorithmus angeben!

Grundlegende Algorithmen der Algebra

Euklid

C.F. Gauß



B. Buchberger

Buchbergers Algorithmus

Eine Folge von Drehungen, die den Zauberwürfel unverändert lässt, heißt eine **Relation**.

Theorem. Startend mit den **definierenden Relationen** der Zauberwürfelgruppe Z berechnet **Buchbergers Algorithmus** eine Menge von Relationen R mit der folgenden Eigenschaft:

Ist eine Zugfolge F gegeben, die die Verdrehung des Zauberwürfels repräsentiert, so kann man mittels R die Zugfolge F so verändern, dass sich der kürzeste Lösungsweg der Stellung ergibt.

Eine Menge von Relationen R mit dieser Eigenschaft heißt eine **Gröbner-Basis** des 2-seitigen Ideals aller Relationen von Z.

7. Weitere Permutationspuzzles

Ansichtssache:

Jeder ist ein Ignorant.

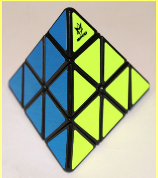
Aber halt auf verschiedenen Gebieten.

(Will Rogers)

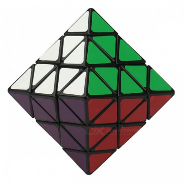
In den letzten Jahrzehnten sind neben dem Zauberwürfel viele weitere **Drehpuzzles** erfunden worden. Mathematisch gesehen handelt es sich um Permutationspuzzles, bei denen eine Gruppe von Drehungen auf den Bestandteilen des Puzzles (**cubies**, **stickers**) operiert.

Neben den Drehpuzzles gibt es noch weitere Arten von Permutationspuzzles, die wir hier aber nicht weiter betrachten.

Andere platonische Körper



Pyraminx



Oktaeder

Megaminx

Ikosaeder

Zauberwürfel höherer Ordnung

4x4x4

Rubiks Rache

17x17x17

Over the Top

WR: 49x49x49

Preston Alden (2024)

Andere Formen von Zauberwürfeln

Kugel

Masterball

Zylinder

Pentabarrel

Prisma

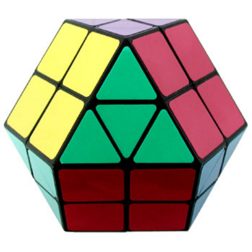
Jumble Star

Archimedische Körper

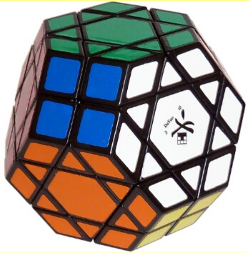
Ein **archimedischer Körper** hat als Seitenflächen regelmäßige Vielecke, hat uniforme Ecken und ist weder platonischer Körper noch Prisma oder Antiprisma.

Es gibt **13** solche Körper (mit Orientierung **15**), die von **Archimedes (287-212 v.Chr.)** klassifiziert wurden.

Tetraederstumpf



Kuboktaeder



Oktaederstumpf

Weitere Drehpuzzles haben die Formen von **Johnson-Körpern**, von **Catalanischen Körpern** oder sind ganz unregelmäßig.

Es gibt auch spezielle Mechanismen und Einschränkungen wie **Getriebewürfel**, **bandagierte Würfel**, **Formwechselwürfel**, u.v.a.m.

Über 12000 verschiedene Typen sind im **Drehpuzzlemuseum**

`www.twistypuzzles.com`

Viele von ihnen haben interessante Drehgruppen, die spezielle Lösungsalgorithmen erfordern. Die meisten davon sind noch weitgehend unerforscht.

ENDE GUT, ALLES GUT

Ich erziehe meine Tochter antiautoritär,
aber sie macht trotzdem nicht, was ich will.
(Nina Hagen)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!