Beweisvielfalt erleben - Mario Gerwig

Fachdidaktischer Kommentar

Norbert Hungerbühler

Die Möglichkeit, Aussagen ein für allemal zu beweisen, ist ein Privileg, das der Mathematik vorbehalten ist. Ein im alten Griechenland bewiesenes Theorem ist auch heute noch gültig, und es wird es auch für alle Zeit bleiben. Im Unterschied dazu wechseln in anderen Wissenschaften und Fachgebieten Paradigmen, Modelle, Techniken oder Ansichten in zum Teil schneller Folge oder sind abhängig von Kultur, Zeitgeist oder anderen äußeren Parametern. Sogar eine außerirdische Intelligenz hätte vermutlich einen Begriff für Primzahlen und andere uns vertraute mathematische Objekte: Es mag aus heutiger Sicht vielleicht naiv erscheinen, aber 1820 schlug Karl Friedrich Gauß vor, die Pythagoras-Figur in Form eines riesigen rechtwinkligen Dreiecks mit Quadraten über den Seiten als Kornfelder in den Weiten Sibiriens anzupflanzen. Auf diese Weise sollte außerirdischen Beobachtern signalisiert werden, dass auf der Erde intelligente Wesen wohnen.

Die Universalität der Mathematik ist eines der herausragenden Alleinstellungsmerkmale dieser Wissenschaft. Der Begriff des Beweises ist eine Hauptschlagader der Mathematik und war oder ist Teil dramatischer Debatten, etwa im Intuitionismus, Konstruktivismus, Logizismus, Formalismus oder heute im Zusammenhang mit Computerbeweisen. Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze sind verstörende Einsichten, welche die Grenzen der Beweisbarkeit aufzeigen. Dennoch ist die Kraft mathematischer Beweise bis heute ungebrochen.

Hier setzt das vorliegende Lehrstück zum Satz des Pythagoras von Mario Gerwig an, indem es mithilfe der Lehrkunstdidaktik aufzeigt, wie das zentrale und fundamentale mathematische Thema „Beweisen“ im Rahmen eines zeitgemäßen Konzepts allgemeiner Bildung kulturauthentisch und schüleradäquat, intellektuell ehrlich und in die Tiefe gehend, verständnisorientiert und nachhaltig, exemplarisch und dramaturgisch in den Unterricht gebracht werden kann.

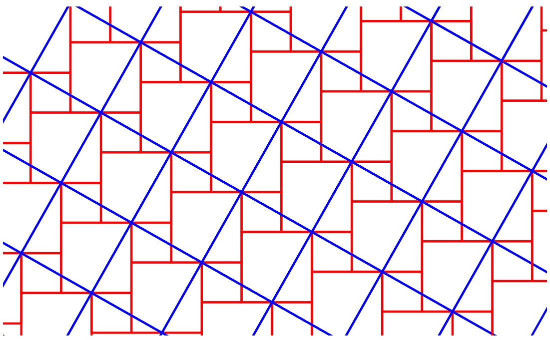
Was Beweise sind, warum man sie braucht, wie sie funktionieren, und wie man auf sie kommt, muss man am eigenen Leibe erfahren. Imre Lakatos hat dies in seiner Schrift [5] „Beweise und Widerlegungen“ überzeugend dargelegt. Dort wird auch ausführlich thematisiert, dass vor einem Beweis eine *Vermutung* steht, die durch Beschäftigung mit mathematischen Ideen und Objekten, durch Verallgemeinerung oder Analogiebildung und durch aufmerksames Beobachten zur Welt kommt. Eine Vermutung respektive eine Frage ist im historischen Rückblick oft der Keim ganzer mathematischer Theorien gewesen. Gute Fragen stellen zu können, ist ein genauso wichtiges mathematisches Bildungsziel, wie Antworten zu finden. Eine scheinbar offensichtliche Tatsache dennoch zu hinterfragen und auf ihren Kern zu reduzieren ebenso. Beim Lehrstück zum Satz von Pythagoras werden diese Aspekte sichtbar. Der Bedeutung des Vermutens, nach eingehender Betrachtung eines mathematischen Phänomens, muss durch die Lehrperson deutlich betont werden: Erst auf dieser Grundlage ruht schließlich der Dreischritt *Voraussetzung-Behauptung-Beweis.*

Wie beweist eine Mathematikerin, ein Mathematiker? Wie findet er oder sie das zielführende Argument, die zündende Idee? Die Schülerinnen und Schüler haben im Rahmen der Lehrkunst die Möglichkeit, sich einer Antwort zu nähern: Dies geschieht durch eingehendes und intensives Betrachten, durch Drehen und Wenden der Sache, durch Ausloten von Analogien, durch Probieren, durch Analyse einfacherer, allgemeinerer oder speziellerer Situationen, durch Weitermachen auch nach dem zehnten Rückschlag! Gerade die Frustration beim Misserfolg zu erleben ist der Kern des produktiven Scheiterns (productive failure), das Manu Kapur in den letzten Jahren als besonders lernwirksame didaktische Komponente modernen Unterrichts identifiziert hat (siehe [3]). Dieses produkive Scheitern kommt hier exemplarisch zum Tragen. Das Scheitern auszuhalten und eben nicht als Misserfolg zu sehen, die Lehren daraus zu ziehen und schliesslich in Erfolg zu verwandeln, liefert ein prägendes Schlüsselerlebnis für Schülerinnen und Schüler.

Es ist nicht das Ziel, dass Schülerinnen und Schüler professionelle Expertise im Beweisen erlangen. Ein solches Ziel wäre viel zu ambitioniert. Vielmehr sollen sie Sinn und Zweck des Beweisens verstehen und dessen Bedeutung erfassen. Sie sollen am eigenen Leibe exemplarisch den Prozess eines Beweises mit allen Irrungen und Wirrungen, mit Rückschlägen und dem erhebenden Moment des Durchbruchs erlebt haben. Sie sollen auch in der Lage sein, vorgelegte Beweise nachzuvollziehen, kritisch zu hinterfragen, Fehler in Argumenten zu finden oder durcheinandergebrachte Schüttelbeweise wieder in die richtige Reihenfolge zu bringen.

Im Zusammenhang mit dem Fundament der inneren Mechanik von Beweisen liefert das Lehrstück zudem einen sinnreichen Zugang zur Methode der Axiomatik am Beispiel von Euklids Axiomen der Geometrie. Die Rolle der Axiome hat sich im Vergleich zum antiken Vorbild grundlegend geändert. Bei Euklid formulieren Axiome Bausteine von unzweifelhaften, grundlegendsten Aussagen über Objekte wie Punkte oder Geraden, die zuvor eigens definiert werden. Gerade diese Objektdefinitionen stellten sich als schwere Hypothek für die weitere Entwicklung der Mathematik heraus, solange bis man merkte, dass es gar nicht nötig ist, die Objekte zu definieren. So sind heute Axiome nur noch Spielregeln: Sie legen die Beziehungen von Objekten fest, deren Natur gar keine Rolle spielt. Wenn Euklid mit seiner Methode der Axiomatik einen ersten Meilenstein für die Mathematik setzte, so war der Wandel der Rolle der Axiome ein zweiter, nicht minder bedeutsamer Schritt. Der Witz ist, dass *jedes Modell*, welches gewissen Axiomen genügt, alle abstrakt aus den Axiomen abgeleiteten Aussagen befolgt, unabhängig davon, um was für Objekte es sich dabei handelt. Dieser Ansatz macht mathematische Theorien universell anwendbar. Er ist einer der Grundpfeiler des Erfolgs der modernen Mathematik. Dieser Aspekt kann durch die Lehrperson im Epilog des Lehrstücks ergänzt werden. Dabei kann auch darauf eingegangen werden, dass die ursprüngliche Fundierung der Geometrie durch Euklid mit nur 10 Axiomen heutigen Ansprüchen an die mathematische Strenge nicht mehr genügt. Es sind, etwa in der Hilbertschen Formulierung, deutlich mehr Axiome nötig. Erst dort wird auch beispielsweise klar, dass die Existenz einer Parallelen aus den übrigen Axiomen folgt, nicht aber deren Eindeutigkeit. Insbesondere muss man demzufolge in der elliptischen Geometrie nicht nur auf das Parallelenaxiom verzichten. Axiome bilden auch in anderen Gebieten der Mathematik die Grundlage von Theorien, so etwa die Axiome von Kolmogorow in der Wahrscheinlichkeitstheorie, oder die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen.

Das Lehrstück zum Satz des Pythagoras geht von der Frage aus, wie man zwei Quadrate durch Zerlegen und Verschieben der Einzelteile in ein einziges Quadrat verwandeln kann. Auf den ersten Blick gehört diese Ausgangsfrage eigentlich zum Thema Zerlegungsprobleme: Tatsächlich besagt der (durchaus schultaugliche) Satz von Wallace, Bolyai und Gerwien, dass überhaupt *alle* flächengleichen Polygone durch Zerlegung ineinander übergeführt werden können. Die Frage bei den Quadraten führt also nicht zwangsläufig zum Satz von Pythagoras, da auch andere Zerlegungen möglich sind und von Schülerinnen und Schülern gefunden werden könnten, die nicht unmittelbar in den Satz des Pythagoras münden. Dieser Umstand zwingt einerseits die Lehrperson nötigenfalls sanft lenkend einzugreifen, setzt sie aber andererseits auch in die Lage später im Unterricht weitere Zerlegungsprobleme zu betrachten. Insbesondere kann in diesem Zusammenhang die Technik der gemeinsamen Parkettierung der Ebene eingesetzt werden, die unter anderem wieder einen Beweis für den Satz des Pythagoras liefert:

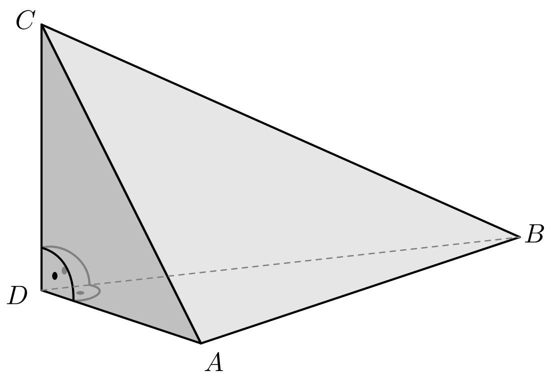


Tatsächlich kann man das Gitter der blauen Quadrate beliebig verschieben: In jeder Position ergibt das Zerschneiden eines der blauen Quadrate entlang der roten Gitterlinien eine gemeinsame Zerlegung des blauen in die zwei roten Quadrate. Das bedeutet, dass man sogar ein Kontinuum an Beweisen für den Satz des Pythagoras in der Hand hat.

Die Zelegungsbeweise wie auch andere Beweise des Satzes von Pythagoras gehen meist von der Betrachtung einer bestimmten Figur aus. Im Lehrstück geht es beispielsweise um die Zerlegung zweier *bestimmter* kleiner Quadraten in ein grosses Quadrat. Es ist nicht a priori klar, dass die gefundene Zerlegung *in jedem Fall* funktioniert. Es ist also eine separate Überlegung nötig, die zeigt, dass die *an einem Beispiel* gefundene Zerlegung bei beliebigen anderen Grössenverhältnissen der kleinen Quadrate in gleicher Weise möglich ist.

Eigentlich vermittelt der Satz von Pythagoras *first and foremost* eine Beziehung zwischen den Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke. Auch in den Anwendungen des Satzes von Pythagoras spielen die Quadrate über den Seiten als geometrische Flächen kaum je eine Rolle. Beginnt man also bei der Zerlegungsfrage, so findet man zum Schluss etwas, was man eigentlich weder vermutet noch gesucht hat. Dies kommt in der Mathematik gar nicht so selten vor: Wer mathematisch tätig ist, stolpert fast zwangsläufig von Zeit zu Zeit über schöne Blumen in Form von Theoremen am Wegesrand. Auch dieses fast zufällige Auffinden von mathematischen Perlen darf den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden. Dennoch ist mathematische Forschung im Allgemeinen zielgerichtet.

Ein wichtiger Aspekt des Lehrstücks ist die Behandlung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Es ist *nicht selbstverständlich*, dass ein Dreieck, dessen Seiten $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt, rechtwinklig ist. Diese Tatsache folgt *nicht* aus dem zuvor Bewiesenen. Es ist ein separater Satz, eben die Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Dass die Umkehrung einer Implikation $A \implies B$, also die Aussage $B \implies A$, nicht automatisch richtig ist, ist von absolut fundamentaler Bedeutung und kann an Alltagsbeispielen erlebbar gemacht werden: $A =$ „ich gewinne im Lotto“. $B =$ „ich habe einen Lottoschein ausgefüllt“. Oder so: Sucht man eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras in drei Dimensionen, so ist es naheliegend, ein Dreieck ABC durch ein Tetraeder $ABCD$ zu ersetzen. Die den Ecken A, B, C, D gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders seien mit a, b, c, d bezeichnet, wobei wir diese Bezeichnung grad auch für die entsprechenden Flächeninhalte verwenden. Ein Tetraeder $ABCD$ heisst dann rechtwinklig, wenn in D die drei Kanten paarweise senkrecht stehen.



Es gilt:

Satz. *Ist $ABCD$ ein rechtwinkliges Tetraeder mit rechten Winkeln in D, so gilt für die Seitenflächen*

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \qquad (*)$$

Dies ist nicht zu verwechseln mit der einfach einzusehenden Formel für die Länge d der Diagonale in einem Quader mit Kantenlängen a, b, c. Der Clou ist, dass die Umkehrung des obigen Satz *nicht* gilt: Gilt die Formel $(*)$ für ein Tetraeder, so folgt daraus nicht, dass es rechtwinklig ist.

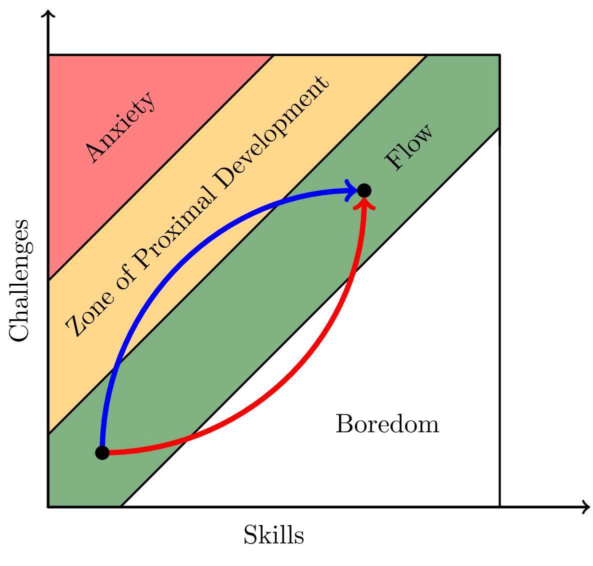
Nach Wagenschein gehört der Satz des Pythagoras „nicht in die Reihe der geometrischen Initialprobleme“, da er „von einem Unwissenden dem rechtwinkligen Dreieck nicht angesehen werden kann“. Es mag sein, dass dies auf die Formulierung des Satzes, also das Resultat zutrifft, da die Antwort nicht unmittelbar auf der Hand liegt. Hingegen ist das *Problem*, nämlich die Länge der Diagonalen in einem Rechteck zu berechnen, sehr wohl ein Initalproblem, das auch Schülerinnen und Schülern etwa im Werk- oder Bastelunterricht in der praktischen Arbeit fast zwangsläufig begegnet.

Diese Beobachtung leitet über zum zweiten Hauptmerkmal der Mathematik, nämlich ihre universelle Anwendbarkeit. Schon Galilei kondensierte dieses Pänomen im Satz „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben“. Diese Tatsache liegt tief. So schrieb der US-amerikanische Mathematiker und Physik-Nobelpreisträger Eugene Wigner: „Das Wunder, dass sich die Sprache der Mathematik für die Formulierung der physikalischen Gesetze eignet, ist ein herrliches Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen“ (The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences). Die Anwendungen des Satzes von Pythagoras sind unüberschaubar vielfältig und ein zentrales Element des vorliegenden Lehrstücks.

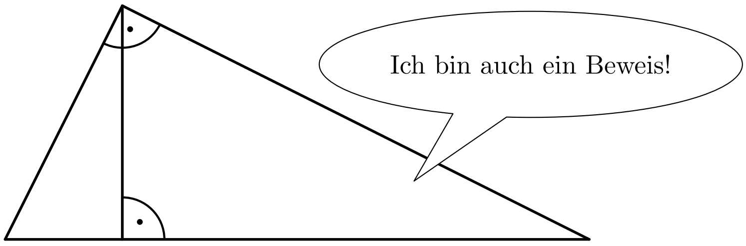
Das Lehrstück baut ganz bewusst auf dem haptischen Erleben beim Umgang mit den farbigen Papierquadraten auf. Damit ist es eine erfrischende Alternative zum mancherorts wuchernden und unüberlegten Einsatz digitaler Hilfsmittel. Wo durch bunte Bilder und allzuschnell durchgeklickte Folien ein Scheinverstehen vorgegaukelt, und ein Wissen mit geringer Halbwertszeit generiert wird, setzt das Lehrstück quasi durch Entdigitalisierung ganz bewusst auf Langsamkeit, Reifen und Begreifen. Richtigerweise wird erst im Nachgang durch Geogebra die gewonnene nachhaltige Erkenntnis weiter gefestigt und illustriert.

Zwei weitere Punkte des Lehrstücks sind besonders wertvoll: Es bietet mannigfach Gelegenheit zum Fragen und zum Staunen. Beides soll zelebriert werden: Die Fähigkeit mathematisch relevante Fragen an einen Sachverhalt zu stellen, kommt im traditionellen Unterricht häufig zu kurz oder wird gar nicht angesprochen. Und das Staunen, die schiere Verblüffung über den gefunden Zusammenhang, stellt eine emotionale Komponente des Unterrichts dar, die geeignet ist, das Gelernte auch langfristig zu behalten (siehe auch [2]). Dazu dient auch die menschliche Komponente, die jedem Lehrstück innewohnt, nämlich das sich Zurückversetzen in die Menschen jener Zeit, in der das Resultat noch nicht bekannt war. Es geht um das Erleben des Ringens um die Wahrheit und die Freude an der gewonnenen Erkenntnis. Durch diesen Prozess sind die Schülerinnen und Schüler hautnah beim Entstehen von Fragen, Begriffen und Antworten dabei und verstehen das „Warum“ und das „Weshalb so und nicht anders“. Dies ist einer der zentralen Leitgedanken bei der genetischen Methode von Felix Klein [4], Otto Toeplitz [6, 7] und Martin Wagenschein [8].

Das Lehrstück ist geschickt so komponiert, dass die Unterrichtsgestaltung der *Zone of Proximal Flow* von Lew Vygotzky und Mihály Csíkszentmihályi folgt (siehe z. B. [1] und die Abbildung unten). Dadurch wird vermieden, dass im Unterricht die *Skills* vor den *Challenges* entwickelt werden und das Lernen dabei in den *Boredom-Bereich* abgleitet. Stattdessen bieten die Komposition immer wieder überschaubare Herausforderungen, welche die Weiterentwicklung des Wissens motivieren.



Das Lehrstück gipfelt in der Erkenntnis, dass im Satz von Pythagoras die Quadrate über den Seiten durch beliebige andere einander ähnliche Figuren ersetzt werden können. Umgekehrt wird aber auch klar, dass der Satz des Pythagoras folgt, wenn für *irgendein* Set ähnlicher Figuren gezeigt ist, dass die Summe der Flächen über den Katheten die Fläche über der Hypotenuse ergibt. So schliesst sich der Kreis, denn diese Flächengleichheit gilt offensichtlich für die drei ähnlichen Dreiecke in der folgenden Figur:



Literatur

[1] Ashok R. Basawapatna, Alexander Repenning, Kyu Han Koh, and Hilarie Nickerson. The zones of proximal flow: Guiding students through a space of computational thinking skills and challenges. In *Proceedings of the Ninth Annual International ACM Conference on International Computing Education Research*, ICER '13, pages 67–74, New York, NY, USA, 2013. ACM.

[2] Norbert Hungerbühler. Vom Fragen und vom Staunen in der Mathematik. In *Tagungsband der 5. Fachtagung der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der GDM, DMV und MNU, 24.–25. März 2017 in Göttingen zum Thema: Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung - Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen.* Springer, in Vorbereitung.

[3] Manu Kapur. Learning from productive failure. *Learning: Research and Practice*, 1(1):51–65, 2015.

[4] Felix Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, volume 1 of *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* B. G. Teubner, 1908.

[5] Imre Lakatos. *Beweise und Widerlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen.* Wissenschaft und Philosophie. Vieweg, 1979.

[6] Otto Toeplitz. Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 36:88–100, 1927.

[7] Otto Toeplitz. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Aus dem Nachlass herausgegeben von G. Köthe.*, volume 56. Springer, Berlin, 1949.

[8] Martin Wagenschein. *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch.* Beltz, 1968.