Ist der Sieger immer der Beste?

Bekanntlich gibt es bei jedem Tennisturnier, jedem Fussballturnier, jeder Schönheitskonkurrenz, jeder Präsidentenwahl einen Sieger bzw. eine Siegerin. Ebenso erleben wir oft, dass z.B. im Tennis nicht jedes Turnier von der Nummer 1 der Weltrangliste (dem "besten Tennisspieler der Welt") gewonnen wird: auch er hat halt mal seine schlechten Tage.

Im Folgenden werden wir zu der überraschenden Erkenntnis kommen: es ist durchaus möglich, dass ein Spieler A viel besser ist als ein Spieler B, dennoch gewinnt im Mittel B viel mehr Turniere als A: Spieler B ist Nummer 1 der "Weltrangliste" und nicht A. An konkreten Beispielen (die man mit Würfeln sogar selbst durchspielen kann) soll das belegt werden.

1 Ein konkretes Experiment: exotische Würfel

Wenn Sie sich spielerisch eine eigene Meinung machen möchten zur Frage, ober der Sieger auch immer der beste ist, rate ich Ihnen dringend, das folgende Experiment zu machen und erst dann die weiteren Abschnitte dieses Artikel zu lesen!

Modifizieren Sie vier Würfel, indem Sie folgendermassen andere Zahlen auf die Seiten der vier Würfel A, B, C und D kleben:

A: 3 3 3 3 3 3

B: 4 4 4 4 0 0

C: 5 5 5 1 1 1

D: 6 6 2 2 2 2

Würfel A hat also auf jeder Seite die Zahl 3, Würfel B hat viermal die Zahl 4 und zwei mal die Zahl 0 etc. Zwei Würfel spielen gegeneinander, indem man die zwei Würfel wirft; der Würfel mit der höheren Zahl gewinnt.

Bitte versuchen Sie, die folgenden **Fragen** zu beantworten:

- Welcher der vier Würfel ist der beste?
- Die vier Würfel bestreiten ein Turnier (mit Halbfinals und Final, die Paarungen der Halbfinals werden ausgelost); welcher der vier Würfel hat die grössten Gewinnchancen?

Bevor wir diese Fragen beantworten, untersuchen wir

2 Ein bemerkenswertes Beispiel

Wir nehmen an, vier Spieler A, B, C und D nehmen an einem Turnier teil. Wir machen folgende Voraussetzungen:

(a) A gewinnt jedes Spiel gegen B bzw. C und verliert jedes Spiel gegen D.

(b) B gewinnt jedes Spiel gegen C bzw. D und verliert jedes Spiel gegen A.

(c) C gewinnt jedes Spiel gegen D und verliert jedes Spiel gegen A bzw. B.

(d) D gewinnt jedes Spiel gegen A und verliert jedes Spiel gegen B bzw. C.

Naiv würde man auf Grund von (a) sagen: "A ist besser als B und C, D ist besser als A" und daraus folgern "Also ist D besser als A, B und C". Die zweite Zeile (b) widerspricht dem aber, beinhaltet sie doch insbesondere "B ist besser als D." Hier liegt also ein gewisses Problem vor. Welcher Spieler ist nun der beste?

Um diese Frage beantworten zu können, lassen wir unsere vier Spieler in einem Turnier gegeneinander spielen, welches wie folgt organisiert ist:

- Die vier Spieler werden durch Los-Entscheid in zwei Gruppen zu je zwei Spielern aufgeteilt.
- Jede der zwei Gruppen spielt ein Halbfinal.
- Im Final spielen die Gewinner der Halbfinal-Spiele gegeneinander; der Sieger des Finals ist der Sieger des Turniers.

Es gibt drei mögliche Halbfinal-Paarungen:

i) $A : B$ und $C : D$, ii) $A : C$ und $B : D$, iii) $A : D$ und $B : C$.

Bei Paarung i) kommen A und C ins Endspiel, A ist Sieger.

Bei Paarung ii) kommen A und B ins Endspiel, A ist Sieger.

Bei Paarung iii) kommen D und B ins Endspiel; B ist Sieger.

Genauer ergibt sich die folgende Medaillenverteilung in Abhängigkeit der verschiedenen Halbfinal-Paarungen i), ii) und iii) (wir nehmen an, dass die Verlierer der Halbfinals auch noch um Bronze spielen):

	Gold	Silber	Bronze	nichts
i)	A	C	B	D
ii)	A	B	C	D
iii)	B	D	A	C

Da jede der drei Paarungen mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 ausgelost wird, ist A mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 Turniersieger (nämlich genau dann, wenn eine der Paarungen i) und ii) ausgelost wird), mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 wird B Sieger. Insbesondere haben C und D überhaupt keine Chance, Turniersieger zu werden, obwohl z.B. D besser als A ist (er schlägt ihn in jedem Spiel). Die Wahrscheinlichkeiten für die vier Spieler, Gold bzw. Silber bzw. Bronze bzw. nichts zu bekommen sind also

(∗)

	Gold	Silber	Bronze	nichts
A	2/3	0	1/3	0
B	1/3	1/3	1/3	0
C	0	1/3	1/3	1/3
D	0	1/3	0	2/3

Angenommen, es wurden viele Turniere gespielt, jede der drei Paarungen ist gleich oft vorgekommen, nach jedem Turnier wurden Punkte verteilt (für Gold gibt es mehr Punkte als für Silber). Dann wird A am meisten Punkte haben (er ist also die Nummer 1), an zweiter Stelle steht B, es folgen C und D (wenn es für Bronze keine Punkte gibt, haben C und D gleich viele Punkte).

Wenn nur A und D die Turniere bestreiten würden, dann würde D alle Spiele gewinnen. Da aber die Spieler B und C am Turnier teilnehmen (die schlechter als A, aber besser als D sind), hat D keine Chance mehr auf einen Turniersieg. Aus diesem Beispiel folgt also: *Spieler X kann in der Rangliste besser oder schlechter als Spieler Y sein je nach dem, welche anderen Spieler noch an den Turnieren teilnehmen*

Vielleicht werden Sie jetzt einwenden, dass eine so extreme Situation wie oben beschrieben in der Praxis nicht auftritt. Sie mögen recht haben - aber das Beispiel zeigt doch, dass die Begriffe "bester Spieler" und "Nummer 1" durchaus nicht zusammenfallen müssen: im obigen Beispiel ist A die "Nummer 1" (da er im Mittel am meisten Turniere gewinn), er ist aber nicht "bester Spieler", da er jedes Spiel gegen B verliert.

Das Problem besteht darin: durch die Rangliste wird eine eindimensionale Ordnung zwischen den Spielern hergestellt. In Wirklichkeit ist aber die Güte eines Spielers eine "mehrdimensionale" Grösse, die man nicht in ein eindimensionales Schema pressen kann. Der Schluss "A ist besser als B und B ist besser als C, also ist A besser als C" ist nicht zulässig.

3 Die exotischen Würfel

Kommen wir jetzt zu den vier Würfeln, die wir schon in Abschnitt 1 vorgestellt haben. Zunächst wollen wir je zwei der Würfel vergleichen; dazu wählen wir beispielsweise die Würfel B und C. Je nach dem, welche der sechs Seiten der Würfel B bzw. C oben liegt, gibt es einen anderen Gewinner. In einer Tabelle schreiben wir für alle möglichen dieser 36 Kombinationen auf, wer gewinnt:

$_B\backslash^C$	5	5	5	1	1	1
4	C	C	C	B	B	B
4	C	C	C	B	B	B
4	C	C	C	B	B	B
4	C	C	C	B	B	B
0	C	C	C	C	C	C
0	C	C	C	C	C	C

Von den 36 möglichen Kombinationen gewinnt also C genau 24, B gewinnt 12. Mit anderen Worten: da jede der 36 Seitenkombinationen die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, beträgt in einem Spiel B gegen C die Gewinnchance für C genau 2/3; für B ist sie 1/3.

Mit analogen Diagrammen kann man leicht die Gewinnchancen aller anderen Würfel-Kombinationen ausrechnen; man erhält die folgende Tabelle (dabei ist gg eine Abkürzung für "gewinnt gegen"; in der Zeile hinter "A gg" stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen A gegen B bzw. C bzw. D gewinnt):

	A	B	C	D
A gg	-	1/3	1/2	2/3
B gg	2/3	-	1/3	4/9
C gg	1/2	2/3	-	1/3
D gg	1/3	5/9	2/3	-

Daraus sieht man: B ist "doppelt so gut" wie A (von drei Spielen gegen A gewinnt B im Mittel zwei und verliert nur eines); C ist doppelt so gut wie B, D ist doppelt so gut wie C, A ist doppelt so gut wie D. In diesem Sinne gibt es keinen "besten Würfel" (das wäre ein Würfel, der besser als alle anderen ist). Bei genauerem Hinsehen scheint dennoch irgendwie D der beste Würfel zu sein: neben den Wahrscheinlichkeiten 1/3 und 2/3, die bei allen Würfeln auftauchen, kommt bei ihm noch die Wahrscheinlichkeit 5/9 vor; bei den anderen Würfeln sind die entsprechenden Werte 1/2 bzw. 4/9. Nach dieser Überlegung wäre dann B der schlechteste Würfel, da $5/9 > 1/2 > 4/9$.

Eine genauere Klassierung erhalten wir, wenn wir unsere 4 Würfel (wie bereits im Abschnitt 2 durchgeführt) in ein Turnier schicken und dafür die Siegeschancen ausrechnen. Die folgende Tabelle enthält für alle Würfel die gerundeten Wahrscheinlichkeiten, mit der sie Gold bzw. Silber bzw. Bronze bzw. keine Medaille bekommen:

(∗∗)

	Gold	Silber	Bronze	nichts
A	0.253	0.247	0.247	0.253
B	0.230	0.251	0.249	0.270
C	0.247	0.253	0.253	0.247
D	0.270	0.249	0.251	0.230

In Abschnitt 5 erfährt der interessierte Leser, wie man diese Tabelle berechnen kann.

Wie in Abschnitt 2 schicken wir jetzt unsere 4 Würfel in Turniere und fragen uns, wer Nummer 1 bzw. Nummer 2 sein wird (wir nehmen an, dass die drei möglichen Halbfinal-Paarungen gleich oft vorkommen und dass bei jedem Turnier an die Medaillengewinner Punkte verteilt werden). Dabei machen wir die überraschende Feststellung:

- Unabhängig von der Art, wie Punkte für Medaillen verteilt werden, ist stets D die Nummer 1 und B die Nummer 4.
- Je nach dem, wie die Punkte verteilt werden, sind folgende Varianten möglich (dabei seien g bzw. s bzw. b die Anzahl Punkte, die es für Gold bzw. Silber bzw. Bronze gibt)
  (a) C ist Nummer 2 und A ist Nummer 3 (wähle $g = 5, s = 3, b = 1$)
  (b) A ist Nummer 2 und C Nummer 3 (wähle $g = 4, s = 3, b = 2$)

(c) A und C haben gleich viele Punkte (wähle $g = 3, s = 2, b = 1$)

Für unsere 4 Würfel können wir also die gleichen Bemerkungen machen wie für unsere 4 Spieler aus Abschnitt 2: dadurch, dass auch die Würfel B und C an den Turnieren teilnehmen, wird A schlechter klassiert als D (obwohl er D in zwei von drei Spielen besiegt). Zusätzlich haben wir festgestellt, dass die Reihenfolge innerhalb der Rangliste davon abhängen kann, wieviele Punkte für die einzelnen Medaillen vergeben werden.

Eine ganz andere Methode, die vier Würfel gegeneinander antreten zu lassen, ist die folgende: man wirft gleichzeitig alle 4 Würfel; der Würfel mit der höchsten Zahl hat gewonnen. Welcher Würfel ist jetzt der beste?

Es gibt $6 * 6 * 6 * 6 = 1296$ verschiedene Kombinationen, wie die 4 Würfel fallen (da jeder der 4 Würfel 6 Seiten hat). Die folgende Tabelle gibt an, bei wievielen dieser Kombinationen die einzelnen Würfel gewinnen und wie gross damit ihre Gewinnchance ist:

	A	B	C	D
Anzahl Gewinne	144	288	432	432
Gewinn-Wahrscheinlichkeit	1/9	2/9	3/9	3/9

Wir erhalten eine ganz andere Rangfolge als bei dem Wettkampf, wo der Sieger durch Turniere bestimmt wird. In der Praxis hat dieses Modell wohl wenig Bedeutung, da man normalerweise nicht mehr als zwei Mannschaften gleichzeitig gegeneinander antreten lassen kann.

4 Weitere Möglichkeiten für Spiele

Wenn Sie sich einmal zu zweit oder mehreren die Zeit vertreiben möchten, können Sie das folgendermassen tun: jeder Teilnehmer schreibt sechs Zahlen hintereinander auf ein Blatt (keine der Zahlen ist negativ, die Summer der sechs Zahlen hat einen vorher vereinbarten Wert, z.B. 20). Wenn alle ihre Zahlen geschrieben haben, werden diese Listen offen auf den Tisch gelegt. Zwei Personen spielen so gegeneinander: jeder der beiden würfelt mit einem normalen Würfel eine Zahl zwischen 1 und 6; als gewürfelt gilt dann die entsprechende Zahl auf der Liste (zeigt der Würfel etwa 4, dann gilt die vierte Zahl der Liste). Jede der Listen ist jetzt ein exotischer Würfel; man kann wie oben beschrieben Turniere durchführen. Regeln, wie die Paarungen zu eventuellen Halbfinals ermittelt werden, müssen vorher abgesprochen werden. Bei 4 Personen kann man etwa vereinbaren: wenn bei einem Wurf mit einem Würfel das Resultat 1 oder 2 ist, dann spielen A gegen B und C gegen D; bei 3 oder 4 spielen A gegen C und B gegen D; bei 5 oder 6 spielen A gegen D und B gegen C. Man kann vereinbaren, dass unentschiedene Würfe (wo beide die gleichen Zahlen auf ihren Listen erhalten) solange wiederholt werden, bis einer eine grössere Zahl erhält; man kann auch vereinbaren, dass zwei Spieler nicht nur einmal gegeneinander würfeln, sondern etwa gleich fünf mal und dass dann derjenige ein Turnierspiel gewonnen hat, der bei diesen fünf Würfen am häufigsten die hörere Zahl erhalten hat. Diese Vereinbarung hat den Vorteil, dass der Zufall weniger eine Rolle spielt und dass die Wahrscheinlichkeit grösser ist, dass wirklich der "bessere" der zwei gegeneinander spielenden Würfel gewinnt.

Wenn man oft gegen die gleiche Person spielt, dann lernt man vielleicht die Vorlieben dieser Person kennen und ahnt, wie der andere seine Liste zusammenstellen wird; wenn man die Liste des anderen richtig vorausahnt, kann man seine eigene Liste entsprechend so gestalten, dass man besser ist.

Bei vier Spielern kann man vereinbaren, dass vor jedem neuen Turnier jeweils ein Spieler seine Liste modifizieren darf: er musss seinen Würfel so einrichten, dass er "besser" ist als die drei anderen.

5 Berechnung der Tabelle $(**)$

Wie in Abschnitt 2 gibt es die drei mögliche Paarungen i), ii) und iii) für die Halbfinals; jede dieser Paarungen hat die Wahrscheinlichkeit 1/3.

Bei der Paarung i) spielt A gegen B. Im Gegensatz zu Abschnitt 2 gewinnt jetzt A nur mit der Wahrscheinlichkeit 1/3; mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 verliert er; ferner gewinnt C gegen D mit der Wahrscheinlichkeit 1/3; mit der Wahrscheinlichkeit 2/3 verliert er. Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A gewinnt als auch C (d.h. dass A und C im Endspiel stehen) beträgt 1/9 (man erhält diese Wahrscheinlichkeit durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten: $1/9 = 1/3 \cdot 1/3$). Analog ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und D das Endspiel bestreiten, gleich $2/9 = 1/3 \cdot 2/3$, etc.

Die folgende Tabelle enthält für jede der drei Paarungen alle Endspiel-Kombinationen mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit, dass diese Endspiel-Kombination eintrifft:

i)	A:C	A:D	B:C	B:D
	1/9	2/9	2/9	4/9
ii)	A:B	A:D	C:B	C:D
	2/9	5/18	2/9	5/18
iii)	A:B	A:C	D:B	D:C
	2/9	4/9	1/9	2/9

Bei der Paarung i) ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt (wir bezeichnen sie mit A_i), gleich

$$1/9 \cdot 1/2 \ + \ 2/9 \cdot 2/3 \ = \ 11/54$$

(dabei ist 1/9 die Wahrscheinlichkeit, dass A und C das Endspiel bestreiten und 1/2 die Wahrscheinlichkeit, dass dabei A gewinnt; also ist das Produkt $1/9 \cdot 1/2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A und C das Enspiel bestreiten *und* dass A dieses Enspiel gewinnt; $2/9 \cdot 2/3$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und D das Endspiel bestreiten und dass A gewinnt; die Summe dieser beiden Wahrscheinlicheiten ist also -immer noch bei der Paarung i)- die Wahrscheinlichkeit, dass A im Endpiel ist und das Endpiel gewinnt) Analog kann man bei jeder Paarung für jeden Spieler auf die gleiche Weise die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, mit der er gewinnt; die sich dabei ergebenden Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	A	B	C	D
i)	$A_i = 11/54$	$B_i = 22/81$	$C_i = 11/54$	$D_i = 26/81$
ii)	$A_{ii} = 14/54$	$B_{ii} = 2/9$	$C_{ii} = 13/54$	$D_{ii} = 5/18$
iii)	$A_{iii} = 8/27$	$B_{iii} = 16/81$	$C_{iii} = 8/27$	$D_{iii} = 17/81$

Jetzt können wir endlich die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, mit der jeder einzelne Spieler gewinnt: für A ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$1/3 \cdot A_i + 1/3 \cdot A_{ii} + 1/3 \cdot A_{iii} = 41/162 \sim 0.253$$

denn: weil jede Paarung mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 auftritt, ist in der obigen Summe z.B. $1/3 \cdot A_{ii}$ die Wahrscheinlichkeit, dass Paarung ii) eintritt *und* dass A in dieser Paarung gewinnt. — Analog kann man alle Einträge der Tabelle $(**)$ berechnen.