# Rationale Tangles

$\forall\, a \in \mathbb{N}$

$t_a :=$ 

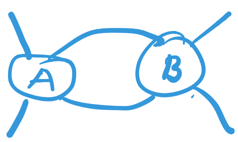
$t_{-a} :=$ 

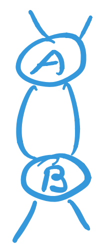
$t'_a :=$ 

$t'_{-a} :=$ 

Bsp: $t_3 =$ , $t'_{-3} =$ 

## Operationen:

$A + B =$ 


$A * B =$ 


Bsp: $t_a + t_b = t_{a+b}$

$t'_a * t'_b = t'_{a+b}$

Achtung:

kommutativ ?

## Allgemeine Konstruktion:

$\forall \quad \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \qquad a_i \in \mathbb{Z}$

$$T_{\underline{a}} = (t_{a_1}, t'_{a_2}, t_{a_3}, \dots)$$

und definiere eine Folge $B_{\underline{a}}$

der rationalen Tangles wie folgt:

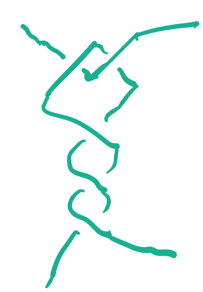
① $B_1 = T_{a_1} = t_{a_1}$

② $k < n$ (rekursiv)

$$T_{a_{k+1}} = t_{a_{k+1}} \Rightarrow B_{k+1} = B_k + t_{a_{k+1}}$$

$$T_{a_{k+1}} = t'_{a_{k+1}} \Rightarrow B_{k+1} = B_k * t'_{a_{k+1}}$$

Bsp: $\underline{a} = (2, -3)$ $\quad T_{\underline{a}} = (t_2, t'_{-3})$

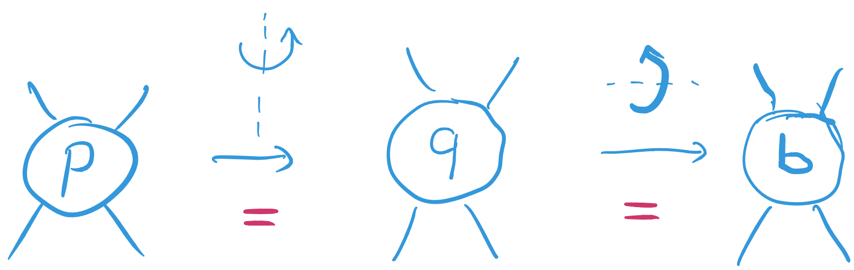
$B_1 = t_2 \qquad B_2 = t_2 * t'_{-3} =$ 

<u>Satz:</u> Für $\forall$ $T$ rat. Tangle

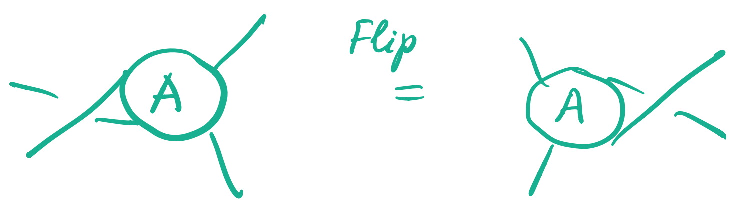
$\exists$ $n$ und $\underline{a} \in \mathbb{Z}^n$, $B_{\underline{a}} = (B_1, \dots, B_n)$

$T = B_n$

<u>Flip Lemma:</u>



<u>Bsp:</u>

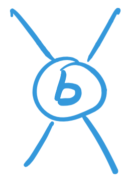
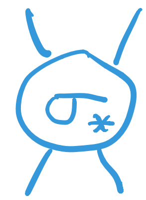


$t_1 + A \;=\; A + t_1$

<u>Folgerung:</u> $\forall$ $T$ rat. tangle

$t_a + T = T + t_a \qquad t_a' * T = T * t_a'$

**Inverse tangle:** Sei $b$ rationale Tangle

$B :=$  $\xrightarrow[\text{Spiegelung}]{90^\circ \text{ Drehung}}$  $:= \frac{1}{B}$

**Negative:**

$$B \xleftrightarrow{\text{Spiegelung}} -B$$

**Lemma:** $-(A+B) = (-A) + (-B)$

$$-\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{-B}$$

$$t_a + t_b' = t_a + \frac{1}{t_b}$$

$$t_a * t_b' = \frac{1}{t_a + \frac{1}{t_b}}$$

Das erlaubt uns eine Function zu definieren:

$a = (a_1, \dots, a_n)$ $\quad F : \{\text{Rat. Tangles}\} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\underline{B_a} = (B_1, \dots, B_n)$ $\quad [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = \frac{p}{q}$

$$B_n \xrightarrow{F} a_n + \cfrac{1}{a_{\dots} + \cfrac{1}{\;\;}} = \frac{p}{q}$$

$n-1$

$\cdots + \frac{1}{a_1}$

Frage: Ist $F$ bijektiv?

**Bemerkung:** $\frac{p}{q} = [a_n, \ldots, a_1]$ bestimmt

$\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ nicht eindeutig!

## Euler-Lagrange Formel

$$a - \frac{1}{b} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1}}$$

**Bsp:** $4 - \frac{1}{5} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}$

$[a, -b] =$
$= [a-1, 1, b-1]$

**Satz (Conway 1970)** Klassifizierung

Seien $T_1, T_2$ zwei rationale Tangles.

$$T_1 = T_2 \iff F(T_1) = F(T_2)$$

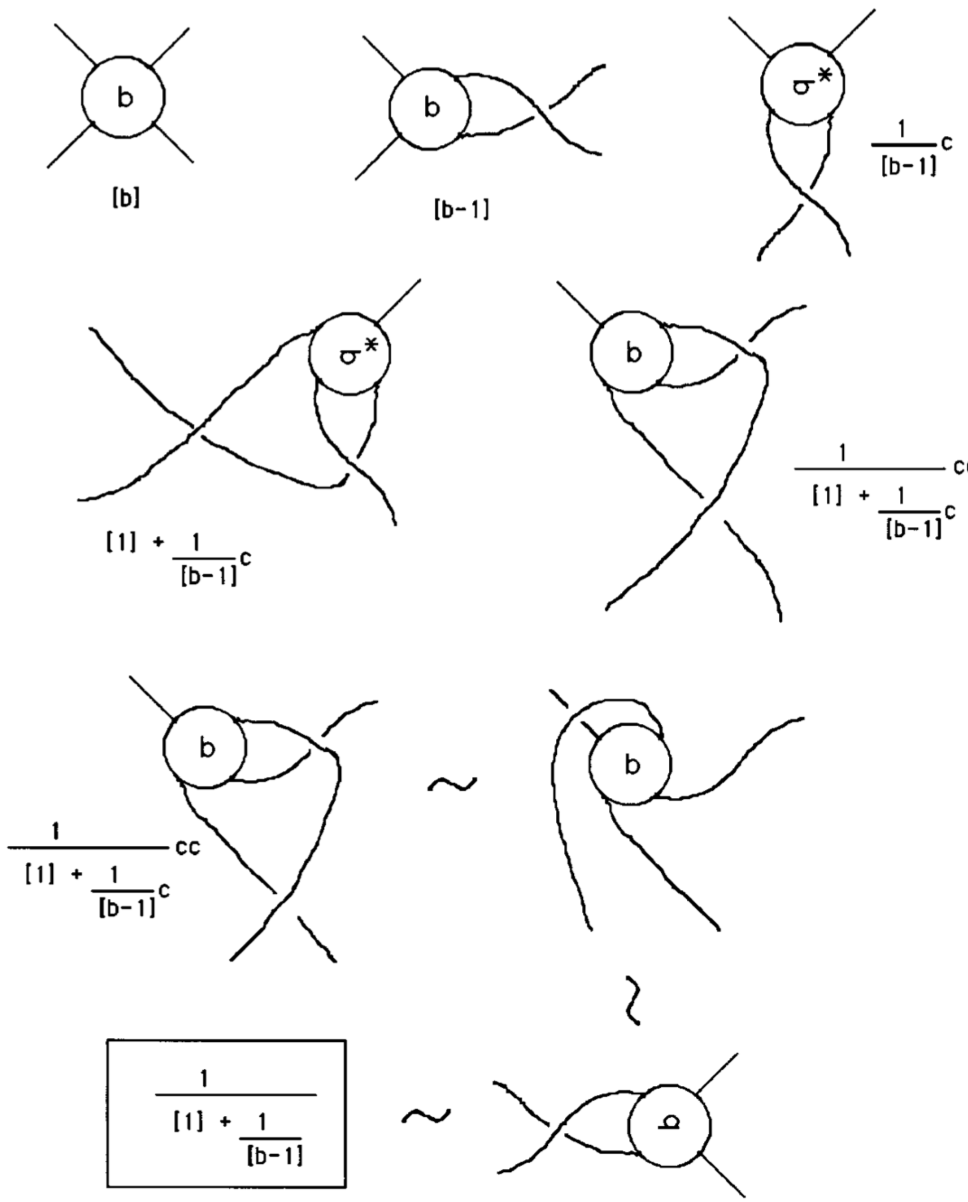
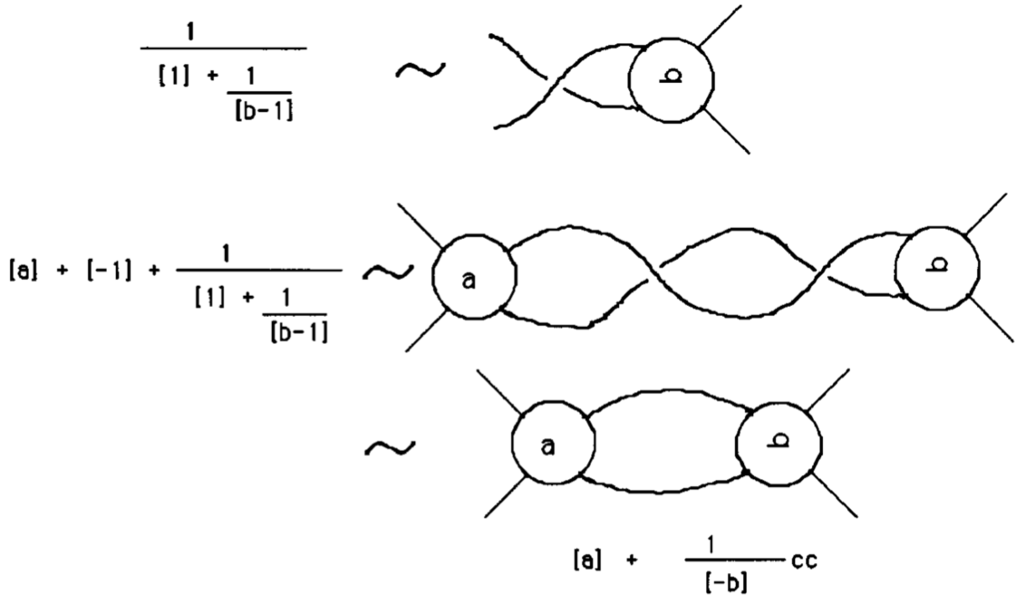



FIGURE 2.10




$$\boxed{[a] + [-1] + \frac{1}{[1] + \frac{1}{[b-1]}} \sim [a] + \frac{1}{[-b]}}$$

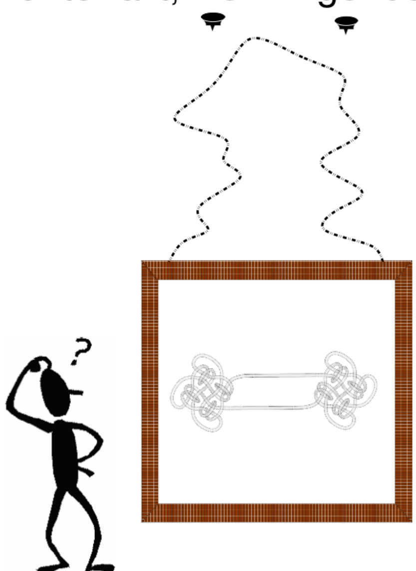
FIGURE 2.11

Literatur: Goldman, Kauffman "Rational Tangles" Adv. App. Math v. 18, 300-332 (1997)

Program: KnotPlot

# Aufgabe

Wie kann man ein Bild mit einer genügend langen Schnur an zwei vorgegebenen Nägeln aufhängen, so dass das Bild runterfällt, wenn irgendeiner der beiden Nägel entfernt wird?







# Junior Euler Society


JES schafft ein Forum, in dem grundlegenden mathematischen Fragen bearbeiten werden:

- an der Universität Zürich
- im Kreis von Gleichgesinnten
- unter wissenschaftlicher Anteilung.

Angesprochen sind MittelschülerInnen.


Themenheft Topologie
DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission
Meike Akveld
Knoten
in der Mathematik
Ein Spiel mit Schnüren,
Bildern
und Formeln