Grundlagenfach Mathematik am Gymnasium
im Hinblick auf den Übergang an die Hochschule

Mathématiques en discipline fondamentale au gymnase
en vue du passage à l'université

Corso di base di matematica nei licei
in prospettiva del passaggio alle università

Kanon Mathematik
Catalogue mathématique
Catalogo di matematica

DMK/CRM/CMSI 2016

Deutschschweizerische Mathematik-Kommission
Eine Kommission des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Commission Romande de Mathématique

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

VSG SSPES SSISS

VEREIN SCHWEIZERISCHER GYMNASIALLEHRERINNEN UND GYMNASIALLEHRER
SOCIETE SUISSE DES PROFESSEURS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SOCIETA SVIZZERA DEGLI INSEGNANTI DELLE SCUOLE SECONDARIE

VSH AEU

Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden
Association Suisse des Enseignant-e-s d'Université

Kommission Gymnasium-Universität
Commission Gymnase-Université

Kommission Gymnasium-Universität KGU
c/o Norbert Hungerbühler
Departement Mathematik
ETH Zürich
Rämistrasse 101
8092 Zürich

E-Mail: norbert.hungerbuehler@math.ch
URL: http://kgu.vsg-sspes.ch

Impressum

Dieses Dokument wurde im Auftrag der Kommission Gymnasium-Universität von Vertreterinnen und Vertretern der Deutschschweizerischen Mathematik-Kommission, der Commission Romand de Mathématique, der Commissione di Matematica della Svizzera Italiana und der Schweizerischen Universitäten erstellt. Die Verwendung des Textes als Ganzes oder in Teilen, sowie der Nachdruck und die Verbreitung, auch in elektronischer Form, ist unter Angabe der Quelle ausdrücklich gestattet.

Gestaltung

Stephan Ammann und Norbert Hungerbühler

Druck

ETH Zürich
Druckzentrum ETH Zentrum
HG D 48.2
Rämistrasse 101
8092 Zürich

E-Mail: druckzentrum-hg@ethz.ch
Telefon: +41 44 632 21 20

 http://math.ch/kanon

Vorwort

Vorgeschichte

Die Hochschulrektorenkonferenz hat 1990 einen Katalog Grundkenntnisse in Mathematik veröffentlicht. Darin wurde festgelegt, welcher Stoff zu Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt wird. Nach der Maturitätsreform 1995 wurde der Katalog von der DMK, der CRM und einer Kommission der ETH Zürich 1997 überarbeitet und nach einer umfassenden Vernehmlassung gesamtschweizerisch zur Umsetzung empfohlen. Seit der Jahrtausendwende haben sich die Rahmenbedingungen wiederum geändert. So wurde vielerorts die Schulzeit verkürzt, graphikfähige Taschenrechner und CAS (Computer Algebra Systeme) sowie Geometriesoftware bieten neue Möglichkeiten im gymnasialen Mathematikunterricht. Untersuchungen wie EVAMAR II haben darüber hinaus gezeigt, dass am Übergang vom Gymnasium an die Hochschule Probleme auftreten, die unter anderem in der überaus heterogenen Stundendotation des Grundlagenfachs Mathematik gründen. An der Konferenz Übergang Gymnasium-Hochschule im Oktober 2010 im Centro Stefano Franscini wurde deshalb angeregt, den Katalog neu zu gestalten. Die Kommission Gymnasium-Universität hat daraufhin die DMK beauftragt, eine breit abgestützte Gruppe aus Vertretern von DMK/CRM/CMSI und der Hochschulen zu bilden, um die Arbeit auszuführen und das Resultat in eine allgemeine Vernehmlassung zu geben.

Ziele dieses Katalogs

Einerseits weiss man in Gymnasien oft nicht genau, welche mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten die Universitäten in den Grundvorlesungen voraussetzen, umgekehrt weiss man in den Universitäten oft nicht genau, welchen Ausbildungsstand man von den Maturandinnen und Maturanden erwarten kann. Der vorliegende Katalog soll beiden Seiten Orientierung und Information sein. Ein unerwünschter Grad an Standardisierung von Inhalten und Lehrplänen soll jedoch vermieden werden. Lehrfreiheit und Vielfalt sind ein hohes Gut, ohne das keine Schulentwicklung möglich ist. Auch historisch gewachsene oder kulturelle Unterschiede sollen ihren Platz haben. Trotzdem soll klar werden, welches Wissen, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten und welches Verständnis Maturandinnen und Maturanden im Fach Mathematik bei allgemeiner Hochschulreife mitbringen sollen. Gleichzeitig soll einer ausufernden Heterogenität entgegengewirkt werden, indem der Katalog als Orientierung bei der Überarbeitung von kantonalen oder schulinternen Lehrplänen dient. Damit macht dieser Katalog indirekt auch die Erwartung des Gymnasiums an den Ausbildungsstand beim Übergang von der Sekundarstufe I deutlich. Der Katalog stellt als Ganzes dar, welche Fähigkeiten und welches Fachwissen an der Hochschule von den Studierenden erwartet werden. Darunter fallen auch Themenbereiche, die bereits vor der Sekundarstufe II vermittelt werden müssen. So sollen beispielsweise Termumformungen, Gleichungen, Elementargeometrie, Stereometrie und stochastische Betrachtungen schon früh thematisiert werden und später auf gymnasialer Stufe auf höherem Abstraktionsniveau erneut Unterrichtsgegenstand sein.

Rahmenbedingungen

Der vorliegende Katalog ist für das Grundlagenfach Mathematik konzipiert. Er basiert auf einer Dotation von gesamthaft 16 Jahreswochenlektionen für ein vierjähriges Gymnasium. Schulen, die unter dieser Lektionenzahl liegen, müssen somit Abstriche in Kauf nehmen, denn Mathematik braucht Zeit. Unabhängig davon müssen die Gymnasien ihre Schülerinnen und Schüler darauf hinweisen, dass je nach Studienwunsch die Wahl des Ergänzungsfachs Anwendungen der Mathematik oder des Schwerpunktfachs Physik und Anwendungen der Mathematik ihren Studienerfolg entscheidend begünstigen kann.

Was ist neu?

Internet und Computer durchdringen unser Leben, durchdringen jedes am Gymnasium gelehrte Fachgebiet. Jedoch wird kein Fach dadurch stärker tangiert als die Mathematik, notabene durch ihre ureigenste Erfindung, den Computer. Internet, Visualisierungs- und Geometriesoftware sowie CAS und andere Hilfsmittel haben ihren Platz in jedem zeitgemässen Mathematikunterricht. Diese neuen Instrumente bieten die Chance, die Mathematik verstehensorientierter zu lehren. Themen wie Kurvendiskussion oder das Auffinden von Stammfunktionen bei verzwickten Integranden haben im Zeitalter von Computeralgebrasystemen an Bedeutung verloren. Der Einsatz elektronischer Hilfsmittel muss jedoch gezielt und wohlüberlegt erfolgen und darf nicht zu einem Verlust der Rechenfertigkeit führen: Die Hochschulen erwarten nach wie vor ausreichendes handwerkliches Können, zum Beispiel bei Termumformungen, beim Auflösen von Gleichungen und beim Ausführen von längeren Rechnungen, um die Erfordernisse eines Studiums meistern zu können. Unterricht, der CAS integriert, darf sich daher nicht darin erschöpfen, traditionelle Aufgaben mit dem Taschenrechner zu behandeln. Er muss sich vielmehr neu orientieren und den Einsatz eines CAS sinnvoll und kritisch hinterfragend an den Inhalten ausrichten, ohne die handwerklichen Fertigkeiten zu vernachlässigen.

Die tatsächlichen Anforderungen im Studium variieren erheblich und hängen von der gewählten Studienrichtung, dem Prüfungsfach und der jeweiligen Universität ab. An einigen Hochschulen sind Taschenrechner jeglicher Art an den meisten Basisprüfungen nach dem ersten Studienjahr nicht zugelassen. Sie sind aber einerseits auch nicht nötig, da die Prüfungsaufgaben verständnisorientiert sind und Fertigkeiten im manuellen Umgang mit mathematischen Gegenständen erfordern und andererseits auch naheliegende juristische Gründe gegen elektronische Hilfsmittel bei Prüfungen sprechen. Gleichzeitig bildet der Einsatz mathematischer Software ein zentrales Element zahlreicher Studiengänge. Die Universitäten sind daher in der Pflicht, die Anforderungen für die einzelnen Studienrichtungen in Broschüren und auf Webseiten darzustellen. Umgekehrt müssen sich Gymnasien, Lehrkräfte und Maturandinnen und Maturanden über die Anforderungen informieren, um eine adäquate Vorbereitung auf das Studium zu gewährleisten.

Aufgrund der heterogenen Situation kann der Katalog also keine allgemeingültigen Angaben im Umgang mit CAS machen, er strebt jedoch eine Balance zwischen verfahrenstechnischen Fertigkeiten (Syntax), verstehensorientiertem Wissen (Semantik) und selbständigem Forschen (Exploration) an. Dieser Ansatz spiegelt sich im unten stehenden inhaltlichen Teil des Katalogs wieder.

Zürich, Herbst 2015
Arbeitsgruppe Kanon

PRÉFACE

Catalogue des connaissances de base en mathématiques dispensées dans les gymnases, lycées et collèges romands : Pourquoi un autre catalogue en Suisse romande.

Historique

En 1990, la CRUS (Conférences des Recteurs des Universités Suisses) a défini de manière succincte les éléments de base d'un plan d'études pour l'enseignement des mathématiques au gymnase. Ce document (Katalog Grundkenntnisse in Mathematik) a établi les prérequis en mathématiques pour un-e gymnasien-ne qui entre à l'université. Le catalogue a été remanié en 1997, suite à la réforme de la maturité (RRM 95) dans un travail commun conduit par la DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission), la CRM (Commission Romande de Mathématique), et une commission de l'EPFZ. Après consultation des gymnases (Conférences des Directrices et Directeurs de Gymnases Suisses CDGS) et des Universités (Conférence des Recteurs des Universités Suisses CRUS), ce document a été accepté et publié (http://vsmp.ch/crm/cat.htm).

Depuis l'année 2000, les conditions cadres ont de nouveau changé. Dans plusieurs cantons, le temps d'école a été réduit et dans certains gymnases, notamment Suisse alémaniques, les CAS (Computer Algebra System) ont fait leur apparition. Les enquêtes comme EVAMAR II ont montré que les problèmes rencontrés lors du passage entre le gymnase et les Hautes Écoles étaient entre autre dus à une hétérogénéité de la dotation horaire en mathématiques. En octobre 2010 s'est tenue au centre Centro Stefano Franscini CSF (Ascona/Monte Verità) une rencontre entre des représentants des Gymnases et des Universités pour parler du passage Gymnase – Universités. Il est alors apparu nécessaire de retoucher une nouvelle fois le catalogue des connaissances de base, afin de prendre en compte les expériences effectuées dans le cadre du RRM 95. Il est de plus apparu que la liste des thèmes pourrait être complétée par des remarques didactiques et, éventuellement, par quelques exemples et exercices illustratifs. Le nouveau catalogue devrait laisser suffisamment de liberté et de flexibilité aux enseignants-es et permettre la prise en compte des différences culturelles ou régionales. La Commission Gymnase – Université a alors chargé la DMK de former un groupe représentatif des représentants de la DMK, de la CRM, de la CMSI (Commissione di Matematica della Svizzera Italiana) et des Hautes Écoles, afin de conduire le travail et de donner le résultat dans une perception générale. Les travaux du groupe de travail peuvent être consultés sur le site http://math.ch/kanon.

Position de la CRM (Commission Romande de Mathématique)

Trois membres de la CRM ont participé à quelques réunions des sous-groupes Analyse, Algèbre et Géométrie et Stochastique. Si la CRM partage les principes généraux énoncés dans le préambule du Kanon, des différences entre ce qui se faisait en Suisse allemande et ce que nous faisions en Romandie sont rapidement apparues, les principales étant les suivantes :

- Nous disposons dans nos lycées, gymnases et collèges de deux niveaux de mathématiques alors que ce n'est généralement pas le cas outre-Sarine. Il nous semblait important de défendre cette particularité.
- Les CAS (Computer Algebra System – calculatrices sophistiquées) sont largement utilisées en Suisse allemande, et peu ou pas en Suisse romande.
- Il nous paraissait de plus impossible, au vu de la durée différente des études gymnasiales dans les différents cantons, de proposer un même programme ou des objectifs semblables.
- De plus, un catalogue de connaissances «basales» fait courir le risque qu'il devienne le but à atteindre et de réduire ainsi la formation dispensée dans nos écoles.

Nous avons alors élaboré un catalogue romand sur les principes suivants :

(i) Les études gymnasiales ont une durée de 4 ans et suivent la 11e Harmos. Le niveau I de mathématique bénéficie de 4 périodes hebdomadaires par année (16 périodes en tout) et le niveau II de 5 périodes hebdomadaires par année (20 périodes en tout). Dans les cas où les dotations horaires de 16 ou 20 périodes ne sont pas remplies, il faut admettre que les connaissances figurant dans le catalogue ne peuvent être toutes acquises.

(ii) Afin de préserver la liberté pédagogique des enseignants, nous ne sommes pas entrés dans les détails des chapitres et avons renoncé à une présentation séparant les parties sémantiques, syntaxiques et d'exploration.

(iii) Nous n'avons pas mentionné d'activités transdisciplinaires (étude des valeurs du pH en chimie lorsqu'on étudie la fonction logarithme, par exemple), celles-ci n'ayant pas leur place à nos yeux dans un catalogue de connaissances mathématiques.

(iv) Certains sujets ne figurent pas dans le Kanon, alors qu'ils sont mentionnés dans le Catalogue, comme l'étude du cercle trigonométrique par exemple. D'autres notions, comme la modélisation par des équations différentielles font partie du Kanon, alors qu'elles ne sont pas mentionnées dans le Catalogue. La stochastique semble peu étudiée en Suisse romande, alors que le Kanon y consacre 25 à 30 semaines.

Comme dans le Kanon, le catalogue romand mentionne que les gymnases doivent faire remarquer à leurs étudiant-e-s, que, après leur choix d'études, le choix des mathématiques comme option complémentaire ou comme option spécifique peut être décisif dans le succès de leurs études ultérieures.

Neuchâtel, automne 2015
Groupe de travail catalogue des connaissances de base

PREAMBOLO

Antefatto

Nel 1990, la Conferenza dei Rettori delle Università svizzere aveva pubblicato un Catalogo delle conoscenze di base di matematica. Vi figurava la materia che veniva considerata nota all'inizio degli studi universitari. Dopo la riforma della maturità del 1995, la Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK, la Commission Romande de Mathématique CRM e una Commissione della Scuola Politecnica Federale di Zurigo rielaborarono il catalogo e, dopo un'ampia consultazione sul piano nazionale, ne raccomandarono l'adozione. Le condizioni quadro cambiarono ancora all'inizio del secolo - in taluni Cantoni venne ridotta la durata degli studi fino alla maturità, si introdussero calcolatrici grafiche e software di calcolo simbolico (CAS, Computer Algebra System) come pure di geometria dinamica - e si aprirono così nuove prospettive per l'insegnamento della matematica a livello liceale. Indagini come EVAMAR II hanno mostrato che nel passaggio dal Liceo all'Università sorgono problemi anche a causa della diversa dotazione oraria della matematica come disciplina fondamentale. Nelle giornate dedicate a "Il passaggio Liceo-Università" dell'ottobre 2010, organizzate al Centro Stefano Franscini dalla Commissione Liceo-Università della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie in collaborazione con la Società svizzera dei docenti universitari venne perciò proposto di rielaborare il catalogo. La Commissione Liceo-Università ha incaricato la DMK di formare un gruppo di rappresentanti delle tre Commissioni di matematica – la DMK, la CRM e la Commissione di Matematica della Svizzera italiana CMSI - e delle Scuole universitarie per realizzare il progetto e proporre un documento per una consultazione generale.

Scopi del Catalogo

Sovente nei Licei non si conosce con precisione quali conoscenze e quali abilità matematiche vengano presupposte nei corsi universitari di base; analogamente nelle Scuole universitarie spesso non si conosce con precisione quale formazione ci si possa attendere da parte dei nuovi studenti. Questo Catalogo deve servire da orientamento e informazione per entrambe le parti, senza chiedere una standardizzazione dei contenuti e dei piani di studio che sarebbe malvista poiché la libertà d'insegnamento con le sue diversificazioni è un bene prezioso, senza il quale non è possibile uno sviluppo della scuola. Nel Catalogo devono trovar posto anche le differenze storiche e culturali che si sono radicate nel tempo, ma deve risultare chiaramente quale sapere, quali capacità, quali abilità e quale livello di comprensione debbano avere in matematica i giovani in possesso di una maturità liceale. Si deve comunque evitare un'eccessiva eterogeneità tra scuole e tra Cantoni e il Catalogo deve servire come orientamento per la stesura dei programmi cantonali o di sede. Allo stesso tempo questo Catalogo può chiarire anche le aspettative del Liceo per il passaggio dalla Scuola media, anche se, a dire il vero, esso espone globalmente quali capacità e quali conoscenze disciplinari l'Università si aspetta dagli studenti. Vi trovano posto anche argomenti che devono già essere stati sistemati prima del liceo. Per fare qualche esempio, il calcolo algebrico, le equazioni, la geometria elementare, la stereometria e considerazioni di carattere stocastico devono già essere state affrontate in precedenza e, al più tardi a livello liceale, trattate di nuovo nell'insegnamento, ma ad un più alto livello di astrazione.

Condizioni quadro

Questo Catalogo è stato concepito per la Matematica come disciplina fondamentale. È pensato per una dotazione globale di 16 ore-lezione/settimana distribuite su 4 anni. Le scuole che dispongono di meno ore devono effettuare delle riduzioni di programma, perché la matematica richiede tempo. Inoltre, nei Licei gli allievi devono essere informati che – a dipendenza del curricolo universitario che intendono scegliere – potrebbe essere opportuna la frequenza del corso di OS FAM oppure di OC Matematica applicata.

Che c'è di nuovo?

Internet e il computer permeano e condizionano le nostre attività quotidiane e ogni ambito disciplinare al Liceo, ma nessuna disciplina è influenzata più fortemente della matematica dalle innovazioni introdotte dall'informatica. Internet, software per la visualizzazione e la geometria, come pure CAS e altri sussidi devono trovar posto in qualsiasi insegnamento moderno della matematica. Questi nuovi strumenti offrono la possibilità di insegnare la matematica in modo orientato alla comprensione. Temi come la discussione di curve o la ricerca di funzioni primitive di bizzarri integrandi hanno perso importanza nell'era dei sistemi di algebra computazionale. L'introduzione di sussidi elettronici deve avvenire, però, in modo mirato e ben ponderato perché non conduca ad un indebolimento delle capacità di calcolo: affinché gli studenti possano affrontare con padronanza le esigenze dello studio, le Scuole universitarie si aspettano, come finora, che gli studenti sappiano lavorare senza sussidi nelle espressioni algebriche, nella risoluzione di equazioni e nell'esecuzione di calcoli anche lunghi. Un insegnamento che integra i CAS in modo sensato e critico non può esaurirsi nel trattare con il computer gli esercizi tradizionali; deve invece porsi davanti a nuovi compiti senza per questo dimenticare le abilità strumentali tradizionali. Le richieste effettive per lo studio universitario variano considerevolmente a dipendenza del curricolo scelto, della materia d'esame e dell'Università. In talune Scuole universitarie, per gli esami di base dopo il primo anno di studi non vengono più ammesse calcolatrici tascabili di nessun genere: da un lato perché non sono necessarie, in quanto gli esercizi dell'esame sono orientati alla comprensione e richiedono abilità nel trattare con gli oggetti matematici e, d'altro canto, perché ovvi motivi giuridici impediscono l'uso di sussidi elettronici agli esami. Ne deriva che le Scuole universitarie sono tenute a specificare in opuscoli o in siti web le esigenze per i singoli curricoli. Da parte loro, i docenti e gli allievi del Liceo devono informarsi su tali esigenze per garantire una preparazione adeguata allo studio universitario. A causa dell'eterogeneità delle situazioni, il Catalogo non può fornire indicazioni valide in generale per l'uso dei CAS; tende comunque a un equilibrio tra l'abilità nei metodi (sintassi), il sapere orientato alla comprensione (semantica) e la ricerca personale (esplorazione), e un tale equilibrio si rispecchia nei contenuti di questo Catalogo.

Locarno, autunno 2015
Gruppo di lavoro catalogo fondamentale

Mitglieder der Arbeitsgruppe

Kerngruppe (Organisation)

Vorname Name (Affiliationen): Untergruppe

- Meike Akveld (ETHZ): Analysis
- Norbert Hungerbühler (ETHZ, KGU, SMK, VSH): Präambel
- Andreas Nüesch (Gymnasium Oberwil, DMK): Algebra und Geometrie
- Hansjürg Stocker (VSMP, DMK): Stochastik
- Thomas Wihler (Universität Bern, DMK): Analysis

Weitere Mitglieder von Gymnasien

- Ulrich Anderegg (Kantonsschule Enge Zürich, HSGYM): Präambel
- Gisela Bissig (Kollegium Heilig Kreuz, Fachdidaktik Université de Fribourg): Stochastik
- Werner Durandi (Kollegium Stans): Algebra und Geometrie
- Barbara Fankhauser (Gymnasium Bäumlihof Basel): Präambel
- Arno Gropengiesser (Liceo di Lugano 1, SSIMF, CMSI): Stochastik
- Jean-Marc Ledermann (Lycée Denis-de-Rougemont Neuchâtel, SSPMP, CRM): Analysis
- Tatiana Mantuano (Gymnase français, Bienne, CRM): Analysis
- Robert Märki (Gymasium Schadau Thun): Analysis
- Franz Meier (Kantonsschule Alpenquai Luzern, VSMP, DMK): Stochastik
- Luca Rovelli (Liceo di Lugano 1, SSIMF, CMSI): Algebra und Geometrie
- Patrick Turtschy (Lycée Blaise-Cendrars La Chaux-de-Fonds, CRM): Algebra und Geometrie
- Nicolas Quinodoz (Collège des Creusets, Sion, CRM): Analysis
- Beatrice Vogel (Kollegium Brig): Analysis
- Alfred Vogelsanger (Kantonsschule Burggraben St. Gallen): Algebra und Geometrie
- Josef Züger (Bündner Kantonsschule, DMK): Algebra und Geometrie
- José-Luis Zuleta (Gymnase de Chamblandes Pully, EPFL, SSPMP, CRM): Präambel

Weitere Mitglieder von Hochschulen

- Hans Rudolf Künsch (ETHZ): Stochastik
- Marco Picasso (EPFL): Algebra und Geometrie
- Hans-Jörg Ruppen (EPFL): Präambel
- Reto Schuppli (Universität & Pädagogische Hochschule St. Gallen): Analysis

Legende der Affiliationen

CMSI	Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
CRM	Commission Romande de Mathématique
DMK	Deutschschweizerische Mathematik-Kommission
EPFL	École Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETHZ	ETH Zürich
HSGYM	Hochschule und Gymnasium
KGU	Kommission Gymnasium-Universität
SMK	Schweizerische Maturitätskommission
SSIMF	Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica
SSPMP	Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
VSH	Vereinigung der Schweizerischen Hochschuldozierenden
VSMP	Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

INHALTSVERZEICHNIS

1 Kanon Mathematik

1.1 Einleitung

1.1.1 Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts

Die Mathematik ist ein riesiges Wissensgebiet und ein über Jahrtausende gewachsenes Kulturgut. Ihre Anwendungen bilden die Grundlage unserer hochtechnisierten Gesellschaft. Sie liefert grundlegende Werkzeuge für alle quantitativ arbeitenden und logisch argumentierenden Wissenschaften. Ihre Bedeutung als Bildungsziel im Unterricht weist aber weit über die Wissenschaft als Studienziel hinaus. Im Schulunterricht muss Zeit sein

- fürs Fragen, für die Suche nach Antworten, fürs Begründen, fürs Entdecken von Regeln,
- fürs Erklären, Üben, Lernen und Wiederholen,
- fürs Erkunden, Spielen, für Geschichte(n) und für den Wettbewerb.

Mathematik ist modern und lebendig, sie verändert sich ständig. Dies betrifft die innermathematische Weiterentwicklung dieser Wissenschaft, das Bild der Mathematik von aussen, die verwendeten Instrumente und die immer neuen Anwendungen. Diese Dynamik muss sich in der Schule reflektieren. Mathematik ist Neugier und Kreativität, der Unterricht soll die Freude daran wecken. Ein Konzept für den Unterricht enthält demnach die Elemente:

- Mathematik als Wissensgebiet: Geschichte und Geschichten, Anwendungen und Übersicht sind wichtig für die Motivation und als Bildungsziel für alle
- Grundlegende Werkzeuge
- Mathematik als Wissenschaft

Aus dieser Sicht ergeben sich nun allgemeine Konsequenzen für den Unterricht.

1.1.2 Nicht themengebundene Aspekte

In der Mathematik werden die Sachverhalte bewiesen, und diese Wahrheiten gelten dann universell und für immer. Kein anderes Fach kann diese Erfahrung vermitteln. Die intensive Beschäftigung mit Mathematik fordert und fördert eine gewisse Strenge im Geist und lehrt Hartnäckigkeit und Durchhaltewille angesichts schwieriger Aufgaben. Selbstvertrauen und Mut zum Probieren sind Grundvoraussetzungen dafür, dass Schülerinnen und Schüler aufgeschlossen gegenüber mathematischen Themen sind, Lust haben, selber zu entdecken, zu begründen und zu beweisen. Dabei sollten sie auch die Erfahrung machen, dass die saubere Darstellung eines Lösungsweges sowie Plausibilitätsbetrachtungen Voraussetzung dafür sind, dass man auch Fehler entdecken und beheben kann. Eine positive Arbeitshaltung und eine stimmige Selbsteinschätzung sind wichtiges Rüstzeug für einen erfolgreichen Start im Studium.

Logisches Argumentieren: Der Umgang mit Wissen und Information erfordert, nicht nur in der Mathematik, die Fähigkeit verschiedene Elemente logisch miteinander zu verknüpfen. Auch innermathematische Gründe machen eine Beschäftigung mit elementaren logischen Strukturen nötig, denn durch deren Verknüpfung gelangt man schliesslich zum zentralen Begriff des Beweises. Was ein Beweis ist und warum man ihn braucht, soll genauso Thema im Unterricht sein, wie spezielle Beweismethoden (direkter und indirekter Beweis, vollständige Induktion). Die mathematische Arbeitsweise erfordert, dass Schülerinnen und Schüler vertraut sind mit den Begriffen Definition, Satz (Voraussetzung, Behauptung), Beweis, notwendige und hinreichende Bedingung, sowie Negation, Umkehrung und Kontraposition. Es ist notwendig, dass diese Begriffe an einsichtigen Beispielen geübt werden.

Modellbildung: Mathematik ist Sprache und Werkzeug für andere Wissenschaften. Der ungeheure Nutzen der Mathematik für unser tägliches Leben bleibt dem oberflächlichen Betrachter meist verborgen. Er beruht einerseits auf der Tatsache, dass die Mathematik erlaubt, Modelle von realen Gegebenheiten zu bilden, und andererseits darauf, diese Modelle mit mathematischen Methoden zu untersuchen und aus den Ergebnissen Rückschlüsse für die Realität zu ziehen. Zentrale Fragen sind: Was ist ein Modell? Wie gelangt man von einem realen Phänomen zu einem Modell? Welche Faktoren sind vernachlässigbar, welche relevant? Wo liegen die Grenzen von Modellen? Welche Beziehung besteht zwischen Modell und Realität? Wie lassen sich Prognosen, Simulationen und Optimierungen mit Hilfe von Modellen realisieren? Diese Fragen sollen im Unterricht zur Sprache kommen.

Fertigkeiten von Hand: So wie das Beherrschen einer Sprache einen Grundwortschatz und die Vertrautheit mit der Grammatik erfordert, so kann nur mathematisch tätig sein, wer ein gewisses Mass an Handfertigkeiten und Techniken beherrscht. Dazu gehört auch der sichere und korrekte Umgang mit mathematischer Notation. Diese handwerklichen Fertigkeiten sollen stetig an einsichtigen Beispielen geübt werden. Erst die ausreichende Rechenfertigkeit erlaubt es, mathematisch ausdrucksfähig zu werden.

Algorithmisches Denken: Der Algorithmus ist ein zentraler Begriff für die Mathematik und betont deren konstruktive und dynamische Seite. Er bildet zudem eine Brücke zur Informatik. So spielen zum Beispiel Rekursionen, Schleifen und Schleifeninvarianten, oder iterative und numerische Verfahren in vielen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle.

Geometrisches Vorstellungsvermögen: Zahlreiche Begriffe der Geometrie wie Dimension, Symmetrie, Erhaltungsgrösse oder Abbildung, aber auch räumliches Vorstellungsvermögen, sind wesentlich für ein vertieftes Verständnis weiter Teile der Mathematik. Was in der Geometrie anschaulich erlebbar ist, kann übertragen werden auf abstraktere Gegenstände. Durch die geometrische Visualisierung kann das Verständnis von tiefer liegenden Aspekten gefördert werden.

Einsatz neuer Technologien: Die Schülerinnen und Schüler sollen einen ersten Kontakt mit mathematischer Software in der analytischen, numerischen und statistischen Behandlung von mathematischen Problemen erhalten. Insbesondere sollen Berührungsängste mit elektronischen Hilfsmitteln abgebaut und ein erster Umgang mit heutigen Technologien gepflegt werden, auch im Hinblick auf einen fortgeschritteneren Einsatz auf universitärer Stufe. Dies soll einerseits den Kontakt zu realitätsnahen Problemstellungen in einfachen Anwendungen ermöglichen, andererseits aber auch das Entdecken komplexerer mathematischer Phänomene durch Experiment, Simulation und numerische Rechnung unterstützen und fördern. Ebenso soll dadurch der Einsatz von Visualisierungsmethoden und der Umgang mit Daten zugänglich gemacht werden. Gleichzeitig muss die Problematik erlebbar werden, dass der unkritische Umgang mit Computern zu falschen Schlüssen führen kann.

Im Rahmen der Gerüstdidaktik und des black-box/white-box Prinzips ermöglicht es der Rechner auch schwächeren Schülerinnen und Schülern, mathematische Erfolgserlebnisse zu haben. Weil ausserdem syntaktische Routinerechnungen an den Computer delegiert werden können, kann man im Unterricht Zeit gewinnen, um Platz zu schaffen für theoretische und verständnisorientierte Vertiefungen. Dies darf jedoch nicht dazu führen, das Handrechnen zu vernachlässigen.

Wissenschaftliche Denkweise: Mathematik ist eine wissenschaftliche Disziplin mit ihr eigenen Arbeitsmethoden, die im Unterricht ihren Niederschlag finden sollen. Ausgehend von zufälligen oder systematischen Beobachtungen, Verallgemeinerungen, oder Betrachtung von Spezialfällen wird eine Hypothese erstellt. Dabei ist Gegebenes von Gesuchtem zu unterscheiden, und auf den Gebrauch von zweckmässigen Bezeichnungen zu achten. Aufbauend auf einer entsprechenden Kernidee wird anschliessend versucht deduktiv, basierend auf vorhandenem Wissen, die These zu beweisen, oder allenfalls zu modifizieren, um neues Wissen zu erschliessen und die Erkenntnisse neu zu ordnen. Dazu gehört auch die Diskussion der Lösung durch Plausibilitätsbetrachtungen oder Überschlagsrechnungen. Aus diesem Prozess, der ein hohes Mass an Kreativität erfordert, ergeben sich neue Gesichtspunkte, Bezüge, Interpretationsmöglichkeiten und neue Fragen.

1.1.3 Interdisziplinarität

Mit dem MAR 95 und der Schaffung von Schwerpunktsfächern wie Physik und Anwendungen der Mathematik oder Biologie und Chemie hat die Interdisziplinarität einen erhöhten Stellenwert im gymnasialen Unterricht erhalten. Der Katalog gibt Anhaltspunkte, an welchen Stellen die mathematischen Inhalte mit anderen Fächern verknüpft werden können. Dies zeigt auch den Nutzen der Mathematik als Strukturwissenschaft und liefert zusätzliche Motivation. Interdisziplinarität darf jedoch nicht zum alleinigen Prinzip erhoben werden: Ohne fundiertes disziplinäres Wissen lässt sich nicht interdisziplinär arbeiten. Mathematische Inhalte sind nicht selten zunächst in reiner Form am verständlichsten. Sie zeigen gerade dann ihre eigene Ästhetik und die Berechtigung der Mathematik als eigenständige Wissenschaft und ebenso als zentrales Unterrichtsfach.

1.1.4 Die Stoffgebiete

Die Lehrpläne der Mathematik orientieren sich an den klassischen Grundpfeilern: Geometrie, elementare Algebra, Analysis, Anwendungen der Mathematik, insbesondere Stochastik. Die Schulmathematik zeichnet somit, dem genetischen Prinzip folgend, die historische Entwicklung der Wissenschaft nach.

Die **Algebra** am Gymnasium öffnet den Schülerinnen und Schülern den Weg heraus aus der Arithmetik von Zahlen, hin zum Verständnis von Variablen und zum Rechnen mit ihnen. Damit wird insbesondere eine wichtige Voraussetzung für den Funktionsbegriff und die Analysis geschaffen. Die fundamentalen algebraischen Rechenregeln (Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz) werden in der Schule durch Analogie mit dem Zahlenrechnen oder geometrisch erschlossen und bilden die Grundlage von Termumformungen sowie der Theorie einfacher Gleichungen. Das Studium einfacher Funktionen (Potenz-, Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktion) und der handwerkliche Umgang mit ihnen wird in der gymnasialen Mathematik traditionellerweise ebenfalls der Algebra zugeordnet. Durch die Sprache der Algebra eröffnet sich damit ein breites Feld an Anwendungen sowie einfachen Modellen, womit die Analysis weiter unterstützt wird. Aspekte der höheren Algebra, etwa die enge Verknüpfung mit der Geometrie, finden im Grundlagenfach zwar kaum Platz, der historische Rahmen vermag jedoch exemplarisch die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft aufzuzeigen.

Die **Analysis** befasst sich mit funktionalen Zusammenhängen aus Wissenschaft und Mathematik. Sie liefert eine Sprache, um diese darzustellen, und entwickelt gleichzeitig rechnerisch-analytische sowie graphisch-visuelle Werkzeuge und Methoden zu deren Erforschung. Die Rechentechniken (Syntax) müssen einer tieferen Einsicht in die Bedeutung der Konzepte (Semantik) untergeordnet werden. Technologie kann dieses Vorhaben gut unterstützen. Eines der traditionellen Kernthemen der gymnasialen Analysis, die Kurvendiskussion, ist deshalb nicht mehr zeitgemäss und taucht nicht als eigenständiges Thema auf. Viele der bedeutsamsten und fundamentalsten wissenschaftlichen Gesetze und Modelle, von der Physik über die Meteorologie, Biologie, Chemie, Medizin bis hin zur Volkswirtschaftslehre, basieren auf der Differential- und Integralrechnung und werden in Form von Differentialgleichungen formuliert. Damit solche Modelle und Gesetze auch nur ansatzweise verstanden werden können, ist es unerlässlich, dass das Konzept und ein qualitatives Verständnis einer Differentialgleichung auch im Grundlagenfach vermittelt wird. Dies ist auch mit einfachen mathematischen Methoden und ohne die Notwendigkeit analytischer Lösungsverfahren möglich.

Im Bereich der **Geometrie** wurden historisch die Grundsteine der Methodik mathematischen Tuns gelegt. So wurde in den Elementen von Euklid zum ersten Mal der auch heute noch übliche Aufbau von mathematischen Texten praktiziert: Definitionen, Axiome, Sätze und Beweise. Dieser Aufbau hat sich innerhalb der Mathematik als fundamental erwiesen und kann im Geometrieunterricht an vergleichsweise anschaulichen Beispielen nachvollzogen und erlebbar gemacht werden. Die Weiterentwicklung der Geometrie im Rahmen von Abbildungsgeometrien, Transformationsgruppen und Invarianten hat zu weitreichenden Verallgemeinerungen, etwa der Topologie oder der diskreten Geometrie, und zu einer inneren Einheit mit der Algebra geführt. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Geometrie auch als modernes Werkzeug erleben, welches sich mit der technischen Entwicklung gewandelt und modernen Fragestellungen zugewandt hat. Das numerische Erfassen und Beschreiben von Figuren und Körpern (Form, Grösse und Lage) und ihre Darstellung findet in verschiedensten Wissenschaften ihren Niederschlag. Insbesondere die Vektorgeometrie bietet die Möglichkeit, den rein mathematischen Themenkreis zu sprengen und geometrische Konzepte in der Physik, der Chemie, der Biologie, der Geographie, den Wirtschaftswissenschaften usw. anzuwenden.

Die **Stochastik** hat in der jüngeren Vergangenheit zahlreiche Anwendungen in allen quantitativ arbeitenden Wissenschaften gefunden und hat damit an Bedeutung gewonnen: Dies gilt auch für viele Studienrichtungen ausserhalb von Naturwissenschaft und Technik, wie etwa Medizin, Ökonomie, Psychologie, Soziologie oder Wirtschaft und Recht. Die Stochastik ist für die entsprechenden Studienrichtungen zunehmend wichtig geworden, was sich im inhaltlichen Teil des Stoffkatalogs widerspiegelt. Stochastik gehört darüber hinaus heute zur Allgemeinbildung: Wir werden alle täglich mit Zufall, Statistik, Risiko und Unsicherheit konfrontiert. Es geht nicht darum, Inhalte von Statistikvorlesungen an den Universitäten vorwegzunehmen, sondern darum, einen elementaren Einblick in die Denkweise und die Konzepte der Stochastik zu vermitteln. Der Alltagsbezug der Stochastik erzeugt bei vielen Schülerinnen und Schülern eine besondere Motivation für die Mathematik. Häufig bieten ihnen die dazugehörigen Fragestellungen auch einen Zugang zur Mathematik, der unabhängig ist von ihren bisherigen Unterrichtserfahrungen. Stochastik eignet sich sehr gut, Aspekte der mathematischen Modellbildung zu illustrieren. Stochastische Modelle bilden eine wichtige Ergänzung beziehungsweise einen Kontrast zu den deterministischen Modellen der Analysis.

Weitere Gebiete der Mathematik ausser den oben genannten vier Grundpfeilern können, allein schon aus Zeitgründen, nicht im gleichen Masse ihren Niederschlag in der Schule finden. Trotzdem sollten etwa die im Zusammenhang mit dem Computer wichtigen Gebiete der Numerik oder der diskreten Mathematk nach Möglichkeit im Unterricht thematisiert werden.

1.2 Fachspezifische Inhalte

Der inhaltliche Teil wird für jedes mathematische Gebiet als Tabelle mit drei Spalten dargestellt. Ergänzt wird jede Tabelle durch Hinweise auf weitere Vertiefungsthemen, auf Querverbindungen zu den anderen, innermathematischen Gebieten respektive zu anderen Fachdisziplinen, und auf Anwendungen.

Die drei Spalten **Verstehensorientiertes, inhaltliches Wissen (Semantik)**, **Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)** und **Verstehensorientierte Erkundung/ Vertiefung (Exploration)** sollen im Unterricht gleichwertig ihren Niederschlag finden. So genügt es beispielsweise nicht, die Ableitungsregeln syntaktisch zu beherrschen, wenn mit dem Begriff der Ableitung kein inhaltliches Konzept verbunden wird oder die praktische Relevanz der Ableitung als Werkzeug in Anwendungen, weggelöst vom reinen Ableitungsbegriff, unbehandelt bleibt. Dieser Ansatz bedeutet auch, dass Prüfungen nicht ausschliesslich verfahrensorientierte Fertigkeiten abfragen dürfen. Die Spalte **Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)** übernimmt insofern eine besondere Rolle, als dass sie wahlweise für einen explorativen Einstieg oder auch für eine vertiefte Auseinandersetzung mit einem Thema genutzt werden soll. Die Hochschulen dürfen davon ausgehen, dass die Inhalte der beiden Spalten Semantik und Syntax im Unterricht abgedeckt wurden. Bei den Inhalten der dritten Spalte steht es den Lehrpersonen frei, eigene Schwerpunkte zu setzen, womit auch die Möglichkeit besteht, aufgrund einer vertieften Behandlung eines bestimmten Themas ein anderes nur zu streifen oder ganz wegzulassen. Die aufgeführten weiteren Vertiefungsthemen und Querverbindungen sind als bereichernde Zusatzelemente zu sehen und sind durch andere, sinnvolle Inhalte ersetzbar.

1.2.1 Algebra

Themen	*Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik)*	*Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)*	*Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)*
Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	• Darstellungsformen • Exakte und genäherte Darstellung von Zahlen • Absoluter Betrag einer Zahl	• Rechnen mit Brüchen und Wurzeltermen	• Unterschied rational - irrational
Variablen, Operationen und Umkehroperationen, Terme, binomische Formeln, Polynome	• Geometrische Veranschaulichung von Termumformungen • Termstrukturen erkennen	• Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz • Grundoperationen mit Bruchtermen • Doppelbrüche, Wurzelterme, Faktorisieren	• Binomischer Lehrsatz (Pascalsches Dreieck)
Direkte und indirekte Proportionalität	• Erkennen in Anwendungen		• Erkennen von anderen funktionalen Abhängigkeiten
Potenzen und Logarithmen	• Herleitung der Potenzgesetze für natürliche Exponenten • Begriffe n-te Wurzel und Logarithmus	• Potenzgesetze (für rationale Exponenten) und Logarithmengesetze	• Herleitung der Potenzgesetze für negative ganze und rationale Exponenten • Logarithmische Skala
Gleichungen	• Begriff der Lösung einer Gleichung, geometrische Interpretation der Lösungsmenge (Gerade, Kreis) • Äquivalenzumformung	• Äquivalenzumformungen anwenden • Verschiedene Typen von Gleichungen lösen: Lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen, Gleichungen, welche auf die Form $x^a = b$, $a^x = b$, oder $\log_a x = b$ gebracht werden können • Einsetzungskontrolle	• Lösen von Ungleichungen
Gleichungssysteme	• Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme • Geometrische Deutung von linearen Gleichungssystemen in $\mathbb{R}^2$	• Verschiedene Lösungsverfahren anwenden	• Spezialfälle bei linearen Gleichungssystemen • Begriff der Lösungsmenge

Zeitbedarf

30 bis 35 Wochen à 4 Lektionen (Sekundarstufe II) zuzüglich 20 bis 40 Wochen (Sekundarstufe I).

Weitere explorative Vertiefungsthemen

- Äquivalenz von Gleichungen
- Komplexe Zahlen
- Kryptologie: RSA-Verfahren, Diffie-Hellman-Schlüsselaustauschprotokoll
- Numerik: verschiedene Verfahren kennen, um Gleichungen näherungsweise zu lösen
- Mengenlehre: Kardinalität von Mengen, die Cantorschen Diagonalverfahren

Querverbindungen zu den anderen Gebieten

Algebraische Umformungen werden in allen Themenbereichen des gymnasialen Mathematikunterrichts verwendet. Speziell sollte Folgendes thematisiert werden:

- Analysis: Terme–Gleichungen–Funktionen
- Geometrie: Flächen- und Volumenformeln umformen
- Stochastik: Binomialverteilung

Anwendungen und Querverbindungen zu andern Fachdisziplinen

Informatik

- Binärzahlen
- Rechnen mit Näherungswerten beim Taschenrechner

Physik

- Gesetze wie ohmsches Gesetz, $s = vt$, drittes Keplersches Gesetz
- Linsengleichung
- dB-Skala

Chemie

- pH-Werte
- Chemisches Gleichgewicht

Biologie

- Weber-Fechner-Gesetz (Helligkeits- und Lautstärkeempfinden)
- Henry-Koeffizient (Stoffaustausch)

Geografie

- Richter-Skala

Wirtschaftswissenschaften

- Lineare Optimierung
- Einfache ökonomische Modelle wie Angebot und Nachfrage

Philosophie

- Begriff der Wahrheit

1.2.2 Analysis

Themen	*Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik)*	*Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)*	*Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)*
Folgen und Reihen	• Diskrete Modelle (z.B. Zellteilung, Zinseszins, Kochkurve) • Explizite und rekursive Form • Intuitiver Grenzwertbegriff	• Folgen, endliche und unendliche Summen (Reihen) • Umgang mit Summenzeichen • Arithmetische Folgen, geometrische Folgen und Reihen • Elementare Grenzwerte berechnen	• Vollständige Induktion • Anwendungen in Finanzmathematik (Zinsen und Renten)
Funktionen	• Diskrete vs. kontinuierliche Modelle • Funktionsbegriff, Unterschied zwischen Term, Gleichung und Funktionsvorschrift • Graph einer Funktion	• Auswertung von Funktionen • Funktionen als Black-Box	• Von Daten zur Funktion (Interpolation und Approximation)
	• Monotonie, Symmetrie, Periodizität, Beschränktheit, Nullstellen • Anschauliches Verständnis von asymptotischem Verhalten, Grenzwertbegriff, Stetigkeit, Invertierbarkeit	• Grundfunktionen und ihre Graphen (lineare und quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen)	• Bijektivität, Injektivität, Surjektivität • Umkehrfunktionen (z.B. Wurzel-, Arcusfunktionen)
	• Logische Analyse von Funktionstermen (z.B. verkettete Funktionen erkennen können)	• Operationen mit Funktionen: Summe, Produkt, Quotient, Verkettung • Transformationen (Streckung, Verschiebung, Spiegelung)	

Themen	*Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik)*	*Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)*	*Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)*
Grundlagen der Differentialrechnung	• Mass für die Veränderung: Mittlere und momentane zeitliche Änderungsrate mittels Anwendungen • Linearisierung, Tangente, Steigung (z.B. Monotonie) • Extremal- und Wendepunkte • Optimierungsanwendungen	• Differenzenquotient • Differentialquotient, Ableitung • Ableitungsfunktion • Grundeigenschaften der Ableitung (Linearität) • Ableitung der Grundfunktionen • Ableitung von $f(ax+b)$ • Extremalprobleme	• Lineare Approximation, Newtonverfahren • Anwendungen in den Natur- und Sozialwissenschaften sowie der Ökonomie (Kinematik, Wachstum und Zerfall) • Ableitungskalkül (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)
Grundlagen der Integralrechnung	• Riemann-Summe mittels Anwendungen	• Teilsummenfolgen • Bestimmtes Integral • Grundeigenschaften des bestimmten Integrals (Linearität, Additivität)	• Anwendungen aus Geometrie (z.B. Flächen und Rotationskörper) und Physik • Aspekte der numerischen Integration
Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung	• Intuitive Begründung	• Stammfunktion, unbestimmtes Integral • Stammfunktionen der Grundfunktionen	• Anwendungen aus der Physik (z.B. Weg und Geschwindigkeit, Arbeit, Energie, Impuls) • Integrationskalkül
Differentialgleichungen und Modellierung	• Grundkonzepte des Modellierens mit Differentialgleichungen • Momentane Änderungsrate einer Funktion • Begriff der Lösung einer Differentialgleichung	• Diskretisierung mittels Eulermethode • Richtungsfelder und graphische Lösung	• Anwendungen (z.B. Populationsmodelle in der Biologie, freier Fall in der Physik)

Zeitbedarf

40 bis 50 Wochen à 4 Lektionen.

Weitere explorative Vertiefungsthemen

- Grenzwertsätze, Regel von Bernoulli-de l'Hôpital
- Numerische Differentiation und Integration
- Vertiefung der Approximation (z.B. Taylor-Reihen), Regression (Methode der kleinsten Quadrate)
- Vertiefung der Integration: Integrationsmethoden, uneigentliche Integrale (z.B. Wahrscheinlichkeitsdichten, Integralkriterium für Reihen, Potential- und Gravitationsfelder)
- Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Satz von Steiner, Guldinsche Regeln
- Elementare, analytische Lösungsmethoden für Differentialgleichungen (Exponentialansatz, Separation)

Querverbindungen zu den anderen Gebieten

Stochastik

- Daten und Funktionen (Interpolation, Regression)
- Wahrscheinlichkeitsdichten, Erwartungswert, Median

Algebra

- Numerische Gleichungslöser: Bisektion, Heron, Vertiefung Newton-Raphson
- Rekursion und Iteration

Geometrie

- Fraktale und Attraktoren bei Iterationen (z.B. Newton-Raphson-Methode)
- Geometrische Wahrscheinlichkeiten (z.B. Problem von Buffon)

Anwendungen und Querverbindungen zu andern Fachdisziplinen

Physik

- Vertiefung Mechanik: Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungsfunktion, Energie und Arbeit, Felder (Potential, Gravitation), Bewegung von Partikeln (einfache Differentialgleichungen, Trägheitsgesetz von Galilei, freier Fall), Schwingungsvorgänge
- Exponentieller Zerfall (Radioaktivität)
- Newtons Abkühlungsgesetz

Biologie

- Diskrete und kontinuierliche Wachstumsmodelle (linear, exponentiell (z.B. Zellteilung), logistisch, Fibonacci-Zahlen)
- Einfache Differentialgleichungssysteme für Populationsinteraktionen: Räuber-Beute (z.B. Lotka-Volterra), Konkurrenz und Symbiose

Philosophie

- Begriff des Unendlichen

Finanz- und Wirtschaftswesen

- Zinsen und Renten, Konsumenten- und Produzentenrente
- Marginale und totale Funktionen
- Modelle für Wettbewerb

Medizin

- Bateman-Funktionen und geometrische Reihen zur Modellierung von kontinuierlicher resp. diskreter Medikamentenaufnahme
- Pumpvermögen des Herzens und Hagen-Poiseuille Gesetz des laminaren Flusses in Blutgefässen
- Epidemiemodelle mit Differentialgleichungen (z.B. SIR-Modell)

Sport

- Evolute und Evolvente (z.B. Startlinie des 1500-Meter-Laufs)
- Modellieren und Optimieren des Freiwurfs beim Basketball

1.2.3 Geometrie

Themen	*Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik)*	*Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)*	*Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)*
Elementar-geometrie	• Dreiecke, Vierecke, Kreis, Tangente, Winkelsätze, Kongruenz, Ähnlichkeit und Strahlensätze, Satzgruppe von Pythagoras, Thaleskreis, Ortsbogen • In geometrischen Situationen Zusammenhänge finden und erklären • Abbildungen (Translation, Drehung, Spiegelung, zentrische Streckung)	• Fehlende Grössen in geometrischen Figuren berechnen	• Konstruktionen mit Zirkel und Lineal • Reguläre Polygone • Formeln für Flächeninhalte herleiten • Kongruenz und Ähnlichkeit von Figuren beweisen
Trigonometrie	• Definition der Winkelfunktionen • Bogenmass • Sinus- und Cosinussatz	• Berechnungen im rechtwinkligen und im allgemeinen Dreieck • Zusammenhänge zwischen Definitionen im Einheitskreis und Graph der trigonometrischen Funktionen erkennen • Trigonometrische Gleichungen der Form $\mathrm{trig}(ax+b)=c$ lösen	• Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen • Nichtlinearität der Winkelfunktionen (Additionstheoreme)
Darstellung dreidimensionaler Objekte	• Ein Schrägbild interpretieren können	• Anschauliche Darstellung von räumlichen Situationen	
Stereometrie	• Volumen und Oberfläche (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Tetraeder, Oktaeder, Zylinder, Kegel, Kugel)		• Prinzip von Cavalieri
Vektorgeometrie in Ebene und Raum	• Koordinatensystem • Begriff des Vektors • Kollinearität, Komplanarität • Bedeutung der elementaren Vektoroperationen, des Skalar- und Vektorprodukts • Beschreibungsformen von Geraden (in Ebene und Raum) und Ebenen durch Parameter- und Koordinatengleichungen • Rechnerische Lösung von Inzidenzproblemen	• Vektoren zeichnerisch und rechnerisch addieren, subtrahieren und skalar multiplizieren • Länge eines Vektors • Skalar- und Vektorprodukt • Inzidenzprobleme rechnerisch lösen	• Komplexere Aufgaben mit unterschiedlichen Lösungswegen bearbeiten • Fehlende Punkte in einer geometrischen Figur oder einem geometrischen Körper berechnen • Flächeninhalte und Volumen berechnen

Zeitbedarf

30 bis 40 Wochen à 4 Lektionen (Sekundarstufe II) zuzüglich 15 bis 30 Wochen (Sekundarstufe I).

Weitere explorative Vertiefungsthemen

- Goldener Schnitt
- Harmonische Schwingungen
- Platonische Körper
- Eulerscher Polyedersatz
- Kreis, Kugel und Tangentialebene
- Spatprodukt
- Erhaltungsgrössen bei Parallelprojektionen
- Affinität
- Ausblick auf die Zentralperspektive

Querverbindungen zu den anderen Gebieten

Analysis

- Abstand Punkt–Gerade als Extremwertaufgabe

Algebra

- Lage von Geraden und Ebenen und lineare Gleichungssysteme
- Schnitt Gerade–Kreis/Kugel und quadratische Gleichungen

Anwendungen und Querverbindungen zu andern Fachdisziplinen

Physik

- Addition von Geschwindigkeiten und Kräften
- Skalarprodukt und physikalische Arbeit
- Vektorprodukt und Drehmoment
- Magnetischer Anteil der Lorentz-Kraft
- Gerade mit Parameter als Zeit und Richtungsvektor als Geschwindigkeitsvektor
- Harmonische Schwingungen

Geografie

- Landesvermessung

Technik

- Architekturpläne

Astronomie

- Historische Distanzbestimmungen: Erdumfang nach Eratostenes, Distanz Erde-Mond nach Aristarchos von Samos, Lalande und Lacaille, Grösse und Entfernungen von Mond und Sonne nach Aristarchos von Samos
- Definition von 1 Parsec

1.2.4 Stochastik

Themen	*Verstehensorientiertes inhaltliches Wissen (Semantik)*	*Verfahrensorientierte, algorithmische Fertigkeiten (Syntax)*	*Verstehensorientierte Erkundung/Vertiefung (Exploration)*
Deskriptive Statistik	• Grafische und Numerische Darstellungen (Histogramm, Boxplot, Streudiagramm) • Lage- und Streumasse (Arithmetisches Mittel, Median, Standardabweichung, Quartilsdifferenz) • Streudiagramm und Grundidee der Korrelation	• Berechnungen und Grafiken erstellen mit IT-Mitteln	• Irreführende Darstellungen erkennen • Unterschied Korrelation und kausaler Zusammenhang • Lineare Regression
Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente	• Zufallsexperiment • Endlicher Grundraum (oder Ereignisraum, Stichprobenraum) • Wahrscheinlichkeitsbegriff(e) • Additivität der Wahrscheinlichkeit • Stochastische Unabhängigkeit • Bedingte Wahrscheinlichkeiten	• Berechnungen im Laplace-Modell (Kombinatorik) • Ausnutzen von $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ • Darstellung mehrstufiger Zufallsexperimente als Baum oder Vierfeldertafel • Anwendung der Pfadregeln	• Beispiele von Paradoxien • Geometrische Wahrscheinlichkeiten • Unterscheidung von zufälligen und konstruierten binären Folgen (Münzwürfe) • Bayes-Formel (Bauminversion)
Zufallsvariable, Erwartungswert, Binomialverteilung	• Zufallsvariable, Erwartungswert (Interpretation “auf lange Sicht”) • Faires Spiel • Binomialverteilung (Vorkommen, Voraussetzungen)	• Berechnung in Beispielen • Wahrscheinlichkeit von Intervallen $[k_1, k_2]$ bei der Binomialverteilung (Berechnung mit Taschenrechner oder mit Sigma-Regeln) • Umgang mit Summenzeichen	• Scheinbarer Widerspruch der Gedächtnislosigkeit des Zufalls zur Interpretation “auf lange Sicht” • Form und Streubereich der Binomialverteilung als Funktion von n und p • Unterschiede Binomial- und hypergeometrische Verteilung • Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung
Beurteilende Statistik	• Unterschiede: – Stichprobe / Population – relative Häufigkeit / Wahrscheinlichkeit • Welche Abweichungen lassen sich vernünftigerweise noch als zufällig ansehen?	• Verwerfungsbereich für den zweiseitigen Binomialtest (bestimmt mit Taschenrechner oder mit der Sigma-Regel)	• Fehlerarten beim Testen
Kombinatorik	• Additionsprinzip • Multiplikationsprinzip • Urnenmodell (Ziehen), Fächermodell (Verteilen)	• Anzahl Permutationen, Variationen und Kombinationen • Fakultät • Binomialkoeffizienten	• Unterschiedliche Zählweisen benützen • Rekursive Berechnungen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung sollen nicht nur Laplace-Modelle behandelt werden. Die Kombinatorik kann auch separat behandelt werden, vor allem wenn ausfürlicher darauf eingegangen wird.

Zeitbedarf

25 bis 30 Wochen à 4 Lektionen. Teile der deskriptiven Statistik, gelegentlich auch der Kombinatorik, werden bereits in der Sekundarstufe I behandelt.

Weitere explorative Vertiefungsthemen

- Auswirkungen von Variablentransformationen
- Medizinische Tests
- Simpson-Paradoxon
- Meinungsumfragen, Fragebögen (systematische und zufällige Fehler)
- Vorzeichentests
- Vertrauensintervall bei der Binomialverteilung
- Statistische Kryptoanalyse

Querverbindungen zu den anderen Gebieten

Algebra

- Binomischer Lehrsatz
- Logarithmische Skala

Analysis

- Geometrische Reihe und Wartezeit auf den ersten Erfolg beim Münzwurf
- Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Integralrechnung (Wahrscheinlichkeit von Intervallen, Erwartungswert, Median)
- Lineare Regression als Extremalaufgabe

Geometrie

- Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Anwendungen und Querverbindungen zu andern Fachdisziplinen

Physik

- Radioaktiver Zerfall und Poisson- bzw. Exponentialverteilung
- Statistische Auswertung einfacher Experimente (Fallversuche und Regression)
- Statistische Physik und Markovketten (Ehrenfestmodell, Entropie)

Biologie

- Vererbung (Mendelsche Gesetze, Hardy-Weinberg-Gleichgewicht, Wright-Fisher-Modell, Blutgruppen und ihre Verteilung in verschiedenen Ländern)
- Populationsdynamik (Verzweigungsprozesse, stochastische Räuber-Beute-Modelle)
- Capture/recapture Methoden (Lincoln-Petersen-Methode)
- Tests in der Medizin

Geografie

- Beispiele zur deskriptiven Statistik (z.B. Darstellung des Klimas an verschiedenen Orten der Erde)

Wirtschaft, Politik

- Grafische Darstellungen (z.B. der Wohlstandsverteilung in verschiedenen Ländern, der politischen Einstellungen von Kandidaten und Parteien)

Informatik und Technik

- Qualitätskontrolle und Zuverlässigkeit, Zufallszahlen (Monte Carlo-Methode)

Philosophie

- Gibt es Zufall?

2 Catalogue mathématique

Mathématiques niveau standard	Mathématiques niveau renforcé

2.1 Algèbre

Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
Opérations sur les ensembles, notations, inclusion, appartenance.	Opérations sur les ensembles, notations, inclusion, appartenance.
Calcul numérique et littéral élémentaire, identités remarquables.	Calcul numérique et littéral élémentaire, identités remarquables.
Puissances et règles des puissances.	Puissances et règles des puissances.
Polynômes : addition, multiplication, division euclidienne, factorisation.	Polynômes : addition, multiplication, division euclidienne, factorisation.
Équations de degré 1 et 2 et de degré 3 avec une solution évidente.	Équations de degré 1 et 2 et équations s'y ramenant.
Calculs de fractions algébriques simples.	Calculs de fractions algébriques.
Calculs avec des racines.	Calculs avec des racines.
Inéquations de degré 1 et 2.	Inéquations de degré 1 et 2, inéquations rationnelles.
Systèmes d'équations linéaires de 2 équations à 2 inconnues, 3 équations à 3 inconnues.	Systèmes d'équations linéaires de 2 équations à 2 inconnues, 3 équations à 3 inconnues.
Systèmes de 2 équations à 2 inconnues, de degré 2.	Systèmes de 2 équations à 2 inconnues, de degré 2.
	Systèmes d'inéquations.
	Déterminant : définition et propriétés. Systèmes d'équations linéaires, méthode de Cramer.

2.2 Analyse

2.2.1 Suites et séries

	Suites, séries. Calculs de limites.
	Développement en séries de Taylor.
	Démonstrations par récurrence.

2.2.2 Fonctions

Notion de fonctions.	Notion de fonctions.
Fonctions élémentaires et leurs représentations graphiques (polynômes, rationnelles, racines, valeurs absolues, exponentielles, logarithmes, trigonométriques).	Fonctions élémentaires et leurs représentations graphiques (polynômes, rationnelles, racines, valeurs absolues, exponentielles, logarithmes, trigonométriques, trigonométriques inverses).
Sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions.	Sommes, différences, produits, quotients et compositions de fonctions.
	Fonctions définies par morceaux.
Notion intuitive de limite et de continuité.	Notion de limite et de continuité.
	Réciproque d'une bijection.
	Comportement asymptotique.
	Théorème de Bolzano et méthode de la bissection.

2.2.3 Calcul différentiel

Définition de la dérivée.	Définition de la dérivée.
	Théorèmes de Rolle et de Lagrange (accroissements finis), règle de l'Hospital.
Dérivées des fonctions élémentaires.	Dérivées des fonctions élémentaires.
Règles de dérivation.	Règles de dérivation.
	Dérivée d'une réciproque.
Tangente en un point du graphe.	Tangentes au graphe.
	Dérivées d'ordres supérieurs.
Variations. Extrema.	Variations. Extrema.
Études de fonctions.	Études de fonctions.
Problèmes d'optimisation.	Problèmes d'optimisation.
	Notion de différentielle.
	Notion d'équations différentielles.

2.2.4 Calcul intégral

Primitives simples.	Primitives simples.
Méthodes élémentaires d'intégration.	Intégration par parties et par substitution.
	Intégration de fonctions rationnelles.
Intégrales définies.	Somme de Riemann et intégrales définies.
Calculs d'aires.	Calculs d'aires.
	Volumes de corps de révolution.
	Valeur moyenne d'une fonction.
	Intégrales impropres.

2.3 Géométrie

2.3.1 Théorèmes

Théorèmes fondamentaux de géométrie euclidienne.	Théorèmes fondamentaux de géométrie euclidienne.

2.3.2 Trigonométrie

Trigonométrie dans le triangle rectangle et quelconque.	Trigonométrie dans le triangle rectangle et quelconque.
	Formules d'addition d'angles.
Cercle trigonométrique, propriétés.	Cercle trigonométrique, propriétés.
Équations simples (trig$(ax+b)=c$).	Équations trigonométriques.

2.3.3 Géométrie vectorielle

Notion de vecteur, opérations.	Notion de vecteur, opérations.
Base, composantes.	Base, composantes.
Produit scalaire, norme, produit vectoriel.	Produit scalaire, norme, produit vectoriel.
Angle entre deux vecteurs.	Angle entre deux vecteurs.
	Produit mixte, déterminant.

2.3.4 Géométrie analytique

Repère, coordonnées, relation de Chasles.	Repère, coordonnées, relation de Chasles.
Équations de droites, plans, cercles, sphères.	Équations de droites, plans, cercles, sphères.
Positions relatives.	Positions relatives.
Questions métriques.	Questions métriques.
Représentations d'objets dans le plan et dans l'espace.	Représentations d'objets dans le plan et dans l'espace.

2.4 Probabilités et Statistiques

2.4.1 Statistique descriptive

Notions de population, d'effectif et de fréquence.	Notions de population, d'effectif et de fréquence.
Distribution discrète au moyen de diagrammes sectoriels ou en bâtons et distribution continue au moyen d'histogramme.	Distribution discrète au moyen de diagrammes sectoriels ou en bâtons et distribution continue au moyen d'histogramme.
Définition et interprétation des indices d'une distribution (moyenne, mode, médiane, étendue, intervalle interquartile, variance et écart type).	Définition et interprétation des indices d'une distribution (moyenne, mode, médiane, étendue, intervalle interquartile, variance et écart type).
Applications de la loi normale.	Applications de la loi normale.
	Mesure de la relation linéaire entre deux variables (droite de régression, coefficient de corrélation).

2.4.2 Analyse combinatoire

Arrangements simples ou avec répétitions, permutations simples ou avec répétitions, combinaisons simples ou avec répétitions.	Arrangements simples ou avec répétitions, permutations simples ou avec répétitions, combinaisons simples ou avec répétitions.
Résolution de problèmes simples de combinatoire.	Résolution de problèmes simples de combinatoire.
Coefficients du triangle de Pascal, binôme de Newton.	Coefficients du triangle de Pascal, binôme de Newton.

2.4.3 Probabilité

Définition d'un événement et de sa probabilité.	Définition d'un événement et de sa probabilité.
	Axiomes de Kolmogorov et démonstrations de quelques propriétés ($P(A \cup B), P(A \setminus B), \ldots$).
Probabilités conditionnelles, notion d'indépendance.	Probabilités conditionnelles, notion d'indépendance.
Arbre de probabilités, distributions binomiales.	Arbre de probabilités, distributions binomiales.
Formule de Bayes.	Formule de Bayes.

2.4.4 Variables aléatoires

Notion de variable aléatoire discrète, moyenne (espérance mathématique), variance et écart type.	Notion de variable aléatoire discrète et continue, moyenne (espérance mathématique), variance et écart type, en particulier dans le cas d'une loi binomiale ou normale. Loi binomiale. Approximation de la loi binomiale par la loi normale.

2.5 Algèbre linéaire

	Systèmes linéaires, matrices.
Calcul matriciel et applications.	Calcul matriciel et applications.
Déterminants et matrice inverse.	Déterminants et matrice inverse.
Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.	Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.
Applications linéaires et matrices associées, noyau et image.	Applications linéaires et matrices associées, noyau et image.
Valeurs propres et vecteurs propres.	Valeurs propres et vecteurs propres.
Applications à la géométrie.	Applications à la géométrie.

2.6 Nombres complexes

	Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle. Opérations et représentation dans le plan d'Argand-Gauss. Équations polynomiales et théorème fondamental de l'algèbre. Racine nième de l'unité. Formule de Moivre. Lieux géométriques. Notion de fonctions complexes.

3 Catalogo di matematica

3.1 Introduzione

3.1.1 Scopi generali dell'insegnamento della matematica

La matematica è un campo immenso dello scibile e un bene culturale sviluppatosi durante millenni; le sue applicazioni sono la base della nostra società fortemente tecnologicizzata. Essa fornisce strumenti fondamentali a tutte le scienze che lavorano con il metodo quantitativo e a quelle che argomentano logicamente. Il fine formativo del suo insegnamento va ben oltre il suo studio come disciplina a se stante.

Nell'insegnamento deve esserci spazio

- per le domande, la ricerca di risposte, le giustificazioni, la scoperta di regole;
- per le spiegazioni, le esercitazioni, gli apprendimenti e le ripetizioni;
- per le esplorazioni, gli aspetti ludici, la storia, l'aneddotica e la competizione.

La matematica è moderna e viva, e cambia continuamente: lo si constata nella sua evoluzione, nell'immagine che essa mostra all'esterno, negli strumenti usati e in sempre nuove applicazioni. Questa dinamicità deve riflettersi nella scuola. La matematica è curiosità e creatività e l'insegnamento deve risvegliare il gusto per queste sue peculiarità. Un progetto per l'insegnamento deve quindi contenere i seguenti elementi:

- la matematica come campo del sapere: storia e aneddoti, applicazioni e panoramica sulle idee generali sono importanti per la motivazione e come scopo formativo per tutti;
- gli strumenti fondamentali;
- la matematica come scienza.

Da questo punto di vista segue tutta una serie di conseguenze generali per l'insegnamento.

3.1.2 Aspetti non legati a un argomento

In matematica i fatti vengono dimostrati, e di conseguenza le verità valgono sempre e ovunque. Nessun'altra disciplina consente una simile esperienza. Il confronto intensivo con la matematica richiede e promuove un certo rigore nello spirito e insegna ad essere ostinati e tenaci davanti ad esercizi impegnativi. La fiducia in sé e il coraggio di provare sono i presupposti perché gli allievi siano aperti davanti a temi matematici, abbiano la volontà di scoprire da soli, di giustificare e di dimostrare. Dovrebbero anche sperimentare che la presentazione pulita di una procedura risolutiva, così come le considerazioni di plausibilità, costituiscono le premesse per poter scoprire gli errori e correggerli. Il sapersi porre in modo positivo davanti ad un lavoro e una corretta autostima costituiscono un importante corredo per iniziare lo studio con successo.

Argomentare logicamente. Il rapporto con il sapere e con l'informazione richiede, non solo in matematica, la capacità di connettere logicamente tra loro diversi elementi. Anche argomenti interni alla matematica rendono necessario che ci si occupi di strutture logiche, poiché solo per mezzo delle loro connessioni si giunge al concetto centrale della dimostrazione. Cos'è una dimostrazione e perché la si usa è un tema che deve pure essere affrontato nell'insegnamento, così come lo sono particolari tecniche di dimostrazione (diretta e per assurdo, induzione completa). Il modo di lavorare della matematica esige che gli allievi prendano confidenza con i concetti di definizione, teorema (ipotesi, tesi), dimostrazione, condizione necessaria e sufficiente, negazione, inversione e contrapposizione. È necessario che questi concetti vengano esercitati con esempi appropriati.

Costruzione di modelli. La matematica è lingua e strumento per altre scienze. L'enorme utilità della matematica nella vita di tutti i giorni rimane però nascosta agli osservatori più superficiali. Consiste sia nel fatto che la matematica consente di costruire modelli di fenomeni sperimentabili, sia nella possibilità di indagarli con metodi matematici e di trarre poi dai risultati conclusioni per la realtà. Le questioni centrali sono: cos'è un modello? Come si arriva da un fenomeno reale a un modello? Quali fattori si possono trascurare e quali invece sono rilevanti? Dove stanno i limiti del modello? Quale relazione esiste tra modello e realtà? Come si possono realizzare prognosi, simulazioni e ottimizzazioni con l'aiuto di modelli? Queste questioni vanno senz'altro affrontate a scuola.

Abilità di calcolo. Così come per conoscere perfettamente una lingua si devono avere un vocabolario di base e una buona familiarità con la grammatica, anche per lavorare in matematica bisogna possedere un certo bagaglio di abilità strumentali e di tecniche. Di questo bagaglio fa parte anche il corretto uso della notazione matematica. Tali abilità strumentali devono essere continuamente esercitate con esempi appropriati. Solo una sufficiente capacità nel calcolo consente di potersi esprimere matematicamente.

Pensiero algoritmico. L'algoritmo è un concetto centrale della matematica e ne accentua il lato costruttivo e dinamico; costituisce altresì un ponte verso l'informatica. In molti ambiti giocano un ruolo importante ad esempio le ricorrenze, i cicli e i loro invarianti, come pure i procedimenti iterativi e numerici.

Capacità di visualizzare geometricamente. Molti concetti della geometria come la dimensione, la simmetria, le grandezze conservate, gli invarianti, le trasformazioni – come del resto la visione spaziale - sono importanti per una comprensione approfondita di altre parti della matematica. Ciò che può essere visto chiaramente in geometria può essere trasferito su oggetti più astratti. Tramite la visualizzazione geometrica si può favorire la comprensione di aspetti più profondi.

Uso delle nuove tecnologie. Gli allievi devono poter avere un primo contatto con software di matematica per affrontare i problemi in modo analitico, numerico e statistico. In particolare deve sparire la paura di confrontarsi con media elettronici, e il primo approccio alle moderne tecnologie deve essere curato anche nell'ottica di un loro uso più avanzato a livello universitario. Ciò deve sia consentire un contatto con problematiche vicine alla realtà per mezzo di applicazioni semplici, sia sostenere e favorire la scoperta di fenomeni matematici più complessi per mezzo della sperimentazione, della simulazione e del calcolo numerico. Deve anche rendere accessibile l'impiego di metodi di visualizzazione e l'elaborazione di dati. Contemporaneamente l'allievo deve poter sperimentare che un uso acritico del computer può condurre a conclusioni errate.

Nella didattica di sostegno (*scaffolding*) e grazie al concetto *black box - white box*, il computer consente anche agli allievi più deboli di avere successo con la matematica. E poiché i calcoli (sintattici) di routine possono essere delegati alla macchina, l'insegnante può dedicare più tempo ad approfondimenti teorici e orientati alla comprensione, senza ovviamente trascurare il calcolo manuale.

Mentalità scientifica. La matematica è una disciplina scientifica con i suoi propri metodi di lavoro, che dovrebbero ripercuotersi nell'insegnamento. Partendo da osservazioni puntuali o sistematiche, da generalizzazioni o da considerazioni di casi particolari, si stabilisce un'ipotesi. È importante distinguere bene ciò che si cerca da ciò che si conosce e porre attenzione all'uso di denominazioni adatte. Costruendo su un'idea centrale appropriata si cerca – basandosi su conoscenze pregresse e per deduzione – di dimostrare la tesi o di modificarla in modo da acquisire nuovo sapere e riordinare le conoscenze. Fa parte della mentalità scientifica anche la discussione di una soluzione mediante considerazioni di plausibilità o calcoli approssimati. Da questo processo, che richiede un alto grado di creatività, si ricavano nuovi punti di vista, nuove relazioni, nuove possibilità di interpretazione e nuovi interrogativi.

3.1.3 Interdisciplinarità

Con l'ORM 95 e l'introduzione di opzioni specifiche come *Fisica e applicazioni della matematica o Biologia e chimica*, l'interdisciplinarità ha assunto grande importanza nell'insegnamento liceale. Il Catalogo suggerisce occasioni per collegare i contenuti della matematica ad altre discipline. In questo modo si mostra anche l'utilità della matematica come scienza strutturante e si fornisce all'allievo una motivazione maggiore. L'interdisciplinarità non deve però essere elevata a principio assoluto: senza un sapere disciplinare ben fondato non si può lavorare in modo interdisciplinare. Non di rado i contenuti matematici vengono inizialmente compresi più facilmente in forma pura, e proprio in questa forma mostrano la loro propria estetica e la legittimazione della matematica quale scienza indipendente.

3.1.4 Gli argomenti

I programmi di matematica si orientano su quattro direttrici classiche, sviluppandone anche le applicazioni: Geometria, Algebra elementare, Analisi, Stocastica. La matematica scolastica ripercorre in questo modo lo sviluppo storico della disciplina, senza poterne però conglobare gli argomenti più attuali.

Al Liceo, **l'algebra** si sviluppa dall'aritmetica, cioè dal calcolo numerico, e giunge fino a comprendere le variabili e il calcolo con esse. In questo modo si crea un'importante premessa per il concetto di funzione e per l'analisi. Le regole fondamentali del calcolo algebrico (commutatività, associatività, distributività) vengono rese accessibili grazie ad analogie con il calcolo numerico oppure ad argomentazioni geometriche e stanno alla base delle trasformazioni di espressioni algebriche e della teoria delle equazioni elementari. Lo studio delle funzioni più semplici (potenza, radice, esponenziale, logaritmica) e la corrispondente pratica del calcolo vengono pure tradizionalmente messi in relazione con l'algebra. Grazie al linguaggio dell'algebra si apre così un ampio campo di applicazioni e di modelli accessibili su cui poggerà poi l'analisi. Aspetti dell'algebra avanzata, come ad esempio lo stretto legame tra algebra e geometria, trovano difficilmente posto nella disciplina fondamentale, eppure il quadro storico chiede di mostrare –almeno in modo esemplare– l'evoluzione della matematica come scienza.

L'analisi si occupa di relazioni funzionali nelle scienze e nella matematica. Fornisce un linguaggio per descrivere queste relazioni e sviluppa contemporaneamente gli utensili numerico-analitici e grafico-visivi e i metodi per indagarle. Le tecniche di calcolo (sintassi) devono venir sottoposte a rigoroso esame concettuale (semantica). La tecnologia ben si presta a facilitare questo compito. Uno dei temi centrali tradizionali dell'analisi liceale, la discussione di curve, non è quindi più attuale e non appare più come tema a se stante. Molte leggi scientifiche, tra le più fondamentali e significative, dalla fisica passando per la meteorologia, la biologia, la chimica, la medicina fino all'economia politica, si basano sul calcolo differenziale e integrale e vengono formulate sotto forma di equazioni differenziali. Affinché tali modelli e leggi possano venir capiti anche solo a livello di applicazione, è indispensabile che il concetto e la comprensione qualitativa di un'equazione differenziale vengano trasmessi anche nella disciplina fondamentale; e ciò si può fare con metodi matematici semplici senza dover usare procedimenti analitici di risoluzione.

Nel campo della **geometria**, storicamente, vennero poste le basi della prassi del metodo matematico. Negli Elementi di Euclide venne impiegata per la prima volta la struttura dei testi matematici in uso ancora oggi: definizioni, assiomi, teoremi e dimostrazioni. Questa impostazione si è dimostrata fondamentale in matematica e può essere illustrata e resa viva in modo analogo e sperimentale nell'insegnamento della geometria mediante esempi chiari e intuitivi. Lo sviluppo della geometria nel quadro dei gruppi di trasformazioni e degli invarianti ha condotto ad importanti generalizzazioni, come la topologia o la geometria discreta, e ad una unificazione interna con l'algebra. Gli allievi devono vivere la geometria anche come strumento moderno, che si è trasformato grazie agli sviluppi tecnologici e si è orientato su questioni attuali. La comprensione e la descrizione in forma numerica di figure e corpi (forma, grandezza, posizione) e la loro rappresentazione si ripercuotono in diverse scienze. In particolar luogo, la geometria vettoriale offre la possibilità di uscire dallo stretto ambito matematico per applicare concetti geometrici in fisica, in chimica, in biologia, in geografia, nelle scienze economiche, ecc.

Nel recente passato la **stocastica** ha trovato numerose applicazioni in tutte le scienze che lavorano quantitativamente ed ha così guadagnato importanza: ciò vale anche per molti indirizzi di studio al di fuori delle scienze naturali e della tecnica, come ad esempio la medicina, l'economia, la psicologia, la sociologia, l'economia politica e il diritto. La stocastica è diventata sempre più fondamentale per questi indirizzi di studio, e ciò si rispecchia nei contenuti del Catalogo. Ne consegue che la stocastica appartiene oggi alla cultura generale: ogni giorno siamo confrontati con caso, statistica, rischio e incertezza. Non si tratta di anticipare contenuti delle lezioni universitarie di statistica, ma di gettare un colpo d'occhio elementare nel modo di pensare della stocastica. Il rapporto con gli aspetti quotidiani accresce in molti allievi una motivazione particolare per la matematica, poiché spesso i problemi che si trattano in statistica offrono loro un accesso che non dipende dalle precedenti esperienze d'insegnamento. La stocastica si presta bene a illustrare aspetti della modellizzazione matematica. I modelli stocastici si rivelano essere sia un importante ampliamento dei modelli deterministici dell'analisi, sia un motivo di contrapposizione con essi.

Campi della matematica esterni alle quattro direttrici citate in precedenza, fosse anche solo per ragioni di tempo, non possono trovare spazio nella scuola. Ciò nonostante, i principali campi della numerica o della matematica discreta dovrebbero venir accennati con l'aiuto di strumenti informatici.

3.2 Contenuti propri alla disciplina

I contenuti di ogni campo matematico vengono esposti in una tabella a tre colonne. Ogni tabella viene ampliata con cenni ad altri temi di approfondimento, a relazioni trasversali con altri campi interni alla disciplina o con altre discipline, e con applicazioni.

Le tre colonne *Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*; *Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*; *Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)* devono ripercuotersi nell'insegnamento con lo stesso peso. Non è quindi sufficiente padroneggiare sintatticamente le regole di derivazione se alla derivata non è legato alcun contenuto concettuale, come pure se nelle applicazioni non la si usa come strumento al di là della definizione formale. Questa impostazione dell'insegnamento ha come conseguenza che durante gli esami non devono venir valutate solo abilità orientate al procedimento. La colonna *Approfondimenti orientati alla comprensione (esplorazione)* assume un ruolo particolare, in quanto può essere usata a piacere sia per un approccio esplorativo, sia per un confronto più approfondito con un argomento. Le Scuole universitarie devono poter contare sul fatto che i contenuti delle colonne *Semantica e Sintassi* sono stati affrontati nell'insegnamento. I contenuti della colonna *Esplorazione* sono temi che l'insegnante può scegliere per porre degli accenti personali; nulla osta anche alla possibilità di trattarne uno in modo approfondito, solo accennare ad un altro o di rinunciarvi del tutto. I contenuti elencati sotto "Temi di approfondimento" e "Relazioni trasversali" sono da vedere come proposte di arricchimento e possono essere sostituiti da altri contenuti pertinenti.

3.2.1 Algebra e nozioni elementari

Argomenti	*Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*	*Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*	*Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)*
Insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	• Diverse rappresentazioni • Rappresentazioni esatte e approssimate • Valore assoluto di un numero	• Calcolo con frazioni e radicali	• Differenza tra numeri razionali e irrazionali
Variabili, operazioni e loro inverse, espressioni, formula binomiale, polinomi	• Rappresentazione geometrica delle operazioni algebriche • Riconoscere le strutture nelle operazioni algebriche	• Proprietà associativa, commutativa, distributiva • Operazioni con frazioni algebriche • Frazioni doppie, radicali, fattorizzazione	• Formula binomiale (triangolo di Pascal - Tartaglia)
Proporzionalità diretta e inversa	• Riconoscerle nelle applicazioni		• Riconoscere altre dipendenze funzionali
Potenze e logaritmi	• Ricavare le regole per le potenze ad esponenti naturali • Concetti di radice n-esima e logaritmo	• Regole per le potenze ad esponenti razionali e per i logaritmi	• Estendere le regole per le potenze ad esponenti interi negativi e razionali • Scala logaritmica
Equazioni	• Soluzione di un'equazione • Trasformazioni equivalenti	• Uso delle manipolazioni algebriche per trasformare equazioni in equivalenti • Risoluzione di alcuni tipi di equazioni di primo grado, quadratiche, riconducibili alle forme $x^a = b$, $a^x = b$ oppure $\log_a x = b$ • Verifica delle soluzioni per sostituzione	• Risoluzione di disequazioni
Sistemi di equazioni	• Sistemi lineari e non • Significato geometrico di un sistema lineare in $\mathbb{R}^2$	• Uso di differenti metodi risolutivi	• Casi particolari di sistemi lineari • Insieme soluzione di tali sistemi

Tempo previsto

Da 30 a 35 settimane (con 4 ore-lezione settimanali), in aggiunta a quanto trattato alla Scuola media (da 20 a 40 settimane).

Temi opzionali di approfondimento

- Equivalenza di equazioni
- Numeri complessi
- Crittologia: algoritmo RSA, protocollo Diffie-Hellmann per lo scambio di chiavi
- Analisi numerica: qualche metodo per la risoluzione approssimata di equazioni
- Insiemistica: cardinalità di un insieme e argomento diagonale di Cantor

Collegamenti con altri ambiti della matematica

Le trasformazioni algebriche vengono impiegate in tutti gli ambiti della matematica. In particolare occorre trattare quanto segue:

- Analisi: espressioni, equazioni, funzioni
- Geometria: trasformazioni di formule per aree e volumi
- Stocastica: distribuzione binomiale

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Informatica

- Rappresentazione binaria di un numero
- Calcolo approssimato con la calcolatrice tascabile

Fisica

- Legge di Ohm, $s = vt$, terza legge di Keplero
- Formula delle lenti sottili
- Scala dei decibel

Chimica

- pH
- Equilibrio chimico

Biologia

- Legge di Weber-Fechner (percezione della luminosità e dell'intensità sonora)
- Legge di Henry (solubilità)

Geografia

- Scala Richter

Scienze economiche

- Programmazione lineare
- Semplici modelli economici (ad esempio, domanda/offerta)

Filosofia

- Concetto di "verità"

3.2.2 Analisi

Argomenti	*Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*	*Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*	*Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)*
Successioni e serie	• Modelli di crescita discreti (divisione cellulare, interesse composto, curva di Koch) • Forma esplicita e ricorsiva • Concetto intuitivo di convergenza	• Successioni, somme finite e infinite, serie • Uso del simbolo di sommatoria • Successioni aritmetiche e successioni e serie geometriche • Calcolare limiti elementari	• Induzione completa • Applicazioni nella matematica finanziaria (interessi e rendite)
Funzioni	• Modelli discreti vs. continui • Concetto di funzione, differenza tra espressione, equazione e legge d'associazione • Grafico di una funzione	• Calcolare valori numerici di funzioni • Funzioni come scatole nere	• Dai dati alle funzioni e viceversa (interpolazione e approssimazione)
	• Monotonia, simmetrie, periodicità, limitatezza, zeri • Comprensione grafica del comportamento asintotico, del concetto di limite, di continuità, di invertibilità	• Funzioni elementari e loro grafico (funzioni lineari, quadratiche, potenza, polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche)	• Biunivocità, iniettività, suriettività • Funzioni inverse (ad esempio funzioni radice e funzioni trigonometriche inverse)
	• Analisi di espressioni di funzioni (ad esempio di funzioni composte)	• Operazioni con funzioni: somma, prodotto, quoziente, composizione • Trasformazioni (contrazione (omotetia), traslazione, riflessione)	

Argomenti	*Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*	*Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*	*Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)*
Fondamenti del calcolo differenziale	• Indice della variazione: tassi di variazione temporale medio e istantaneo, tramite applicazioni • Linearizzazione, tangente, pendenza (per esempio monotonia) • Estremi e flessi • Applicazioni dell'ottimizzazione	• Rapporto incrementale • Rapporto incrementale/derivata • Funzione derivata • Proprietà fondamentali della derivata (linearità) • Derivata delle funzioni elementari • Derivata di $f(ax+b)$ • Problemi di massimo e minimo	• Approssimazione lineare, metodo di Newton • Applicazioni nelle scienze naturali, sociali ed economiche (cinematica, crescita e decadimento) • Calcolo di derivate (regole del prodotto, del quoziente e della composizione)
Fondamenti del calcolo integrale	• Somma di Riemann, tramite applicazioni	• Successioni di somme parziali • Integrale definito • Proprietà fondamentali dell'integrale definito (linearità, additività)	• Applicazioni alla geometria (per es. aree e volumi di rotazione) e alla fisica • Cenni all'integrazione numerica
Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale	• Giustificazione intuitiva	• Primitiva, integrale indefinito • Primitiva delle funzioni elementari	• Applicazioni in fisica (ad esempio spazio e velocità, lavoro, energia, impulso) • Calcolo di integrali (primitive delle funzioni elementari)
Equazioni differenziali e modellizzazione	• Concetti fondamentali della modellizzazione con equazioni differenziali • Tasso di variazione momentaneo di una funzione • Concetto di soluzione di un'equazione differenziale	• Discretizzazione mediante metodo di Eulero • Campi direzionali e risoluzione grafica	• Applicazioni (ad esempio, modelli per l'evoluzione di popolazioni in biologia, caduta libera in fisica)

Tempo previsto

Da 40 a 50 settimane di 4 ore-lezione settimanali.

Temi opzionali di approfondimento

- Teoremi sui limiti e regola di Bernoulli-de l'Hôpital
- Derivazione e integrazione numerica
- Approfondimento dell'approssimazione (ad esempio serie di Taylor), regressione (metodo dei minimi quadrati)
- Approfondimento dell'integrazione: metodi d'integrazione
- Integrali impropri (ad esempio densità di probabilità, criterio integrale per le serie, campi potenziali e gravitazionali)
- Metodi analitici elementari di risoluzione per equazioni differenziali (ipotesi di soluzione esponenziale, separazione delle variabili)

Collegamenti con altri ambiti

Stocastica

- Dati e funzioni (interpolazione, regressione)
- Densità di probabilità, speranza matematica, mediana

Algebra

- Metodi numerici di risoluzione delle equazioni: (bisezione, Erone, approfondimento Newton-Raphson)
- Ricorsione e iterazione

Geometria

- Frattali e attrattori nelle iterazioni (ad esempio nel metodo di Newton-Raphson)
- Probabilità geometriche, (ad esempio, problema di Buffon)

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica

- Approfondimento della meccanica: spazio, velocità e accelerazione in funzione del tempo, energia e lavoro, campi (potenziali, gravitazionali), moto di masse puntiformi (equazioni differenziali elementari, principio d'inerzia di Galileo, caduta libera), oscillazioni
- Decadimento esponenziale (radioattività)
- Legge di raffreddamento di Newton

Biologia

- Modelli, discreti e continui, di crescita e di decrescita (lineare, esponenziale (ad esempio divisione cellulare), logistica, successione di Fibonacci)
- Sistemi elementari di equazioni differenziali per le interazioni tra popolazioni (ad esempio modello di Lotka-Volterra), concorrenza e simbiosi

Filosofia

- Concetto di "infinito"

Scienze economiche e finanziarie

- Interessi e rendite, rendita dei consumatori e dei produttori
- Funzioni marginali e totali
- Modelli per la concorrenzialità

Medicina

- Funzione di Bateman e serie geometriche per la modellizzazione dell'assunzione discreta, rispettivamente continua, di farmaci
- Capacità di pompaggio del cuore e legge di Hagen-Poiseuille per flussi laminari in vasi sanguinei
- Modelli epidemiologici con equazioni differenziali (ad esempio modello S-I-R)

Sport

- Evoluta ed evolvente (ad esempio linea di partenza della corsa dei 1'500 metri)
- Modellizzazione e ottimizzazione del tiro libero nella pallacanestro

3.2.3 Geometria

Argomenti	*Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*	*Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*	*Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)*
Geometria elementare	• Triangoli, quadrilateri, cerchio, tangenti, congruenza e similitudine, teoremi di Talete e Pitagora, angoli al centro e alla circonferenza • Ricavare e spiegare relazioni in situazioni geometriche • Trasformazioni (traslazione, rotazione, simmetria centrale e assiale, omotetia)	• Calcolo delle grandezze mancanti in figure geometriche	• Costruzioni con riga e compasso • Poligoni regolari • Ricavare formule per le aree • Dimostrare congruenze e similitudini di figure
Trigonometria	• Definizione delle funzioni trigonometriche • Gradi sessagesimali e radianti • Teoremi dei seni e del coseno	• Risoluzione di triangoli rettangoli e qualsiasi • Riconoscere la relazione tra il grafico delle funzioni trigonometriche e la loro definizione nel cerchio trigonometrico • Risoluzione di semplici equazioni riconducibili alla forma $\text{trig}(ax + b) = c$	• Relazioni algebriche tra le funzioni trigonometriche • Non-linearità (formule di addizione)
Rappresentazioni tridimensionali (prospettiche)	• Interpretazione di una rappresentazione prospettica	• Rappresentazione intuitiva (schizzo) di situazioni spaziali	
Geometria solida	• Volumi e superfici (cubo, parallelepipedo, prisma, piramide, tetraedro, ottaedro, cilindro, cono, sfera)		• Principio di Cavalieri
Geometria vettoriale nel piano e nello spazio	• Sistemi di riferimento e coordinate • Concetto di vettore • Collinearità, complanarità • Significato delle operazioni vettoriali elementari, del prodotto scalare, del prodotto vettoriale • Descrizione di una retta (nel piano e nello spazio) e di un piano per mezzo di equazioni parametriche e cartesiane • Soluzione analitica di problemi di incidenza	• Eseguire addizioni, sottrazioni e prodotti scalari algebricamente e geometricamente • Modulo di un vettore • Prodotto scalare e vettoriale • Risoluzione di problemi di incidenza	• Risolvere problemi più complessi con strategie differenti • Determinazione algebrica di punti mancanti in una figura geometrica nel piano o nello spazio • Calcolo di volumi e aree

Tempo previsto

Da 30 a 40 settimane (con 4 ore-lezione settimanali).

Temi opzionali di approfondimento

- Sezione aurea
- Oscillazioni armoniche
- Solidi platonici
- Formula di Eulero per i poliedri
- Rette e piani tangenti
- Prodotto misto
- Invarianti nelle proiezioni parallele
- Cenni sulla prospettiva centrale
- Affinità

Collegamenti con altri ambiti della matematica

Analisi
- La distanza punto-retta come problema di ottimizzazione

Algebra
- Posizioni reciproche di rette e piani e sistemi di equazioni lineari
- Intersezioni di rette e circonferenze (risp. superfici sferiche) ed equazioni quadratiche

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica
- Somma di forze e di velocità
- Prodotto scalare e lavoro
- Prodotto vettoriale e momento di una forza
- Forza di Lorentz
- Tempo e vettore-velocità nell'equazione di una retta
- Oscillazioni armoniche

Geografia
- Topografia

Tecnica
- Piani architettonici

Astronomia
- Storia della misura di distanze: raggio della Terra (Eratostene), distanza Terra-Luna (Aristarco di Samo, Lalande-Lacaille), diametri e distanze di Sole e Luna (Aristarco)
- Definizione di parsec

3.2.4 Stocastica

Argomenti	*Contenuti orientati alla comprensione dei concetti (Semantica)*	*Abilità algoritmiche orientate ai procedimenti (Sintassi)*	*Approfondimenti orientati alla comprensione (Esplorazione)*
Statistica descrittiva	• Rappresentazioni grafiche e numeriche (istogrammi, boxplot, diagrammi di dispersione) • Indici di posizione e di variazione (media aritmetica, mediana, deviazione standard, differenze quantili) • Diagramma di dispersione e idea base della correlazione	• Calcoli / Grafici con strumenti informatici	• Riconoscere rappresentazioni ingannevoli e scorrette • Differenza tra correlazione e relazione causale • Regressione lineare
Esperimenti aleatori a uno o più stadi (prove successive)	• Esperimento aleatorio • Spazio degli eventi o campionario finito • Concetto(i) di probabilità • Additività della probabilità • Indipendenza stocastica • Probabilità condizionata	• Calcoli nel modello di Laplace (calcolo combinatorio) • Uso di $P(A^C) = 1 - P(A)$ • Rappresentazione di esperimenti casuali a più stadi con diagrammi ad albero o tabelle • Applicazione delle regole del prodotto e della somma (regola del cammino)	• Esempi di paradossi • Probabilità geometriche • Differenza tra successioni binarie casuali e costruite (lancio di monete) • Formula di Bayes (inversione del cammino nel diagramma ad albero)
Variabile aleatoria e speranza matematica, distribuzione binomiale	• Variabile aleatoria, speranza matematica (interpretazione “a lungo termine”) • Gioco equo • Distribuzione binomiale (dove si presenta, requisiti)	• Calcolo di esempi • Pobabilità di intervalli $[k_1, k_2]$ per la distribuzione binomiale (calcolo con la calcolatrice o con la regola del sigma) • Uso del simbolo di sommatoria	• Contraddizione apparente tra l’assenza di memoria del caso e l’interpretazione “a lungo termine” • Forma e ampiezza della dispersione della distribuzione binomiale in funzione di n e p • Differenza tra distribuzione binomiale e ipergeometrica • Approssimazione della distribuzione binomiale mediante quella normale
Statistica inferenziale	• Differenze tra popolazione e campione; tra frequenza relativa e probabilità • Quali deviazioni si possono ragionevolmente ancora ritenere casuali?	• Regione di rifiuto per il test binomiale con ipotesi nulla puntuale o bilaterale (determinata con la calcolatrice o con la regola del sigma)	• Specie degli errori nei test
Calcolo combinatorio	• Principio di addizione • Principio di moltiplicazione • Problemi di estrazione (modello dell’urna) e problemi di distribuzione	• Permutazioni, disposizioni e combinazioni • Fattoriale • Coefficienti binomiali	• Utilizzare differenti modalità di enumerazione • Calcoli ricorsivi

Nel calcolo delle probabilità non si dovrebbero trattare solo modelli di Laplace. Il calcolo combinatorio può essere trattato anche come capitolo a se stante; in particolar modo se s'intende collegarlo con ulteriori applicazioni (si veda la tabella precedente).

Tempo previsto

Da 25 a 30 settimane di 4 ore-lezione settimanali. Alcune parti della statistica descrittiva, a volte anche del calcolo combinatorio, sono già trattati nella scuola secondaria I.

Temi opzionali di approfondimento

- Ruolo delle trasformazioni di variabili
- Test in medicina
- Paradosso di Simpson
- Indagini demoscopiche, formulari d'inchiesta (errori sistematici e casuali)
- Test dei segni
- Intervallo di confidenza per la distribuzione binomiale
- Crittoanalisi statistica

Collegamenti con altri ambiti

Algebra

- Teorema binomiale
- Scale logaritmiche

Analisi

- Serie geometrica e tempo di attesa per il primo successo con il lancio di una moneta
- Distribuzioni di probabilità continue e calcolo integrale (densità di probabilità, funzione di ripartizione, speranza matematica, mediana)
- Regressione lineare come problema di ottimizzazione

Geometria

- Probabilità geometriche

Applicazioni e collegamenti con altri ambiti disciplinari

Fisica

- Decadimento radioattivo e distribuzione di Poisson, rispettivamente esponenziale
- Elaborazione statistica di dati sperimentali semplici (caduta libera, regressione)
- Fisica statistica e catene di Markov (modello di Ehrenfest, modelli di diffusione, entropia)

Biologia

- Ereditarietà (Leggi di Mendel, equilibrio di Hardy-Weinberg, modello di Wright-Fisher, gruppi sanguigni e la loro distribuzione in differenti luoghi geografici)
- Dinamica di popolazioni (processi di biforcazione, modelli stocastici preda-predatore)
- Metodi di cattura-marcatura-ricattura (metodo di Lincoln-Petersen)
- Test in medicina

Geografia

- Esempi dell'uso della statistica descrittiva (per esempio rappresentazione del clima in differenti luoghi della Terra)

Economia, politica

- Rappresentazioni grafiche, per esempio della distribuzione del benessere o del PIL in differenti nazioni, delle posizioni politiche di candidati e partiti

Informatica e tecnica

- Controlli della qualità e dell'affidabilità. Numeri (pseudo)-casuali (metodo di Monte Carlo)

Filosofia

- Esiste il caso?

“Das Leben der Götter ist Mathematik.” Novalis

“Il grandissimo libro della natura è scritto in lingua matematica.” Galileo Galilei

“The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift, which we neither understand nor deserve.” Eugene Wigner

“Die Mathematik ist die Königin aller Wissenschaften. Ihr Liebling ist die Wahrheit, ihre Kleidung Einfachheit und Klarheit. Ihr Palast ist von Dornengehölz umwachsen, wer zu ihm gelangen will, muss sich durch dieses Dickicht kämpfen. Ein zufälliger Reisender wird im Palast nichts Anziehendes finden. Seine Schönheit öffnet sich nur dem Verstand, der die Wahrheit liebt, der beim Überwinden von Schwierigkeiten hart wurde und der Zeuge ist für die erstaunliche Neigung des Menschen zu verworrenen, aber unerschöpflichen und erhabenen geistigen Genüssen.” Jędrzej Śniadecki

“Keinerlei Glaubwürdigkeit ist in jenen Wissenschaften, die sich der mathematischen Wissenschaften nicht bedienen oder keine Verbindung zu ihnen haben.” Leonardo da Vinci

“La musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse.” Edouard Herriot