

Mathematikmatur

Laptopklasse 4F

Kantonsschule Baden

20. Mai 2008

Bemerkungen

1. Erlaubte *Hilfsmittel*

- Formelsammlung
- 1 Computer-Algebra-System (Texas Instruments)
- Schreibzeug und Zeichengeräte

2. Zu allen *Lösungen* gehören *stichwortartige und vollständige Dokumentationen* in der üblichen mathematischen Notation von

- *Analysen* der Aufgabenstellung,
- wesentlichen *Ideen* oder Bemerkungen beim Lösen
- zum *Einsatz des Rechners*: Alle Angaben, die nötig sind, um den Rechnereinsatz nachzuvollziehen, [zB Mode- und Graphikeinstellungen]

Ergebnisse ohne Beleg, Antworten ohne Begründung, Zitat oder Herleitung sind wertlos.

3. Soweit zweckmässig soll formal gerechnet werden. Bei theoretischen Aufgaben sind formal exakte Lösungen erwünscht. Werden Dezimalzahlen als Näherungswerte für exakte Lösungen angegeben, so sind mindestens fünf gültige Ziffern, Vorzeichen und Exponent anzugeben.
4. Dauer der Prüfung: 4 Stunden.
5. Für jede der fünf Aufgaben gilt: Die vollständige und korrekte Lösung wird mit 10 Punkten bewertet.
6. Für 40 oder mehr Punkte wird die Note 6 erteilt. Der Notenmassstab ist linear.

Aufgaben

1. Die folgenden drei Teilaufgaben sind von einander unabhängig

1.1 Begründen Sie im Rahmen der Vektorgeometrie mit der üblichen Notation, dass der CAS-Befehl

$$\cos^{-1}(\text{DotP}(\text{UnitV}(\mathbf{a}), \text{UnitV}(\mathbf{b})))$$

den Zwischenwinkel zu den Vektoren \vec{a} und \vec{b} berechnet, falls diese Vektoren als \mathbf{a} und \mathbf{b} eingegeben werden.

Für welche Eingaben versagt der Befehl?

1.2 Die folgenden Funktionen f_n sind definiert im Bereich $x \geq 0$ durch die Vorschrift

$$f_n : x \mapsto x^n \cdot \exp(-x) \quad \text{mit einer Konstanten } n \geq 1$$

a) Wo steigt der Graph der Funktion f_n ?

b) Wo ist die Steigung des Graphen von f_n am grössten?

1.3 Ich rolle einen fairen Würfel 5 mal.

a) Wie gross ist die Chance, dass die Augenzahl 6 in der Fünferserie nicht vorkommt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Fünferserie alle Augenzahlen von 1 bis 5?

2. Gegeben sind die Punkte $P(1|4|-6)$, $Q(3|2|-5)$, $R(6|4|1)$, $S(-10|-10|-10)$

2.1 Wie gross ist das Volumen des Tetraeders $PQRS$?

2.2 Die Ebene η wird durch P , Q , R bestimmt. In T trifft das Lot von S aus auf η . Wie lange ist der Vektor \overrightarrow{ST} ?

2.3 Wie gross ist der minimale Abstand zwischen den Geraden PQ und RS ?

2.4 Welchen spitzen Winkel bilden die Gerade PS und die Ebene η ?

2.5 Unter welchem spitzen Winkel trifft die Ebene η auf die $(x|y)$ -Ebene?

3. Es sei $g : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$

3.1 Skizzieren Sie den Graphen von g ohne grosse Rechnung qualitativ richtig. Begründen Sie den gezeichneten Verlauf des Graphen stichwortartig mit mathematischen Argumenten.

3.2 Welches sind die exakten Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von g ?

3.3 Im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ rotiert der Graph von g um die x -Achse und erzeugt einen Rotationskörper. Wie gross ist dessen Volumen?

3.4 Für $x \geq -2$ wird die Funktion $G : x \mapsto \int_{-2}^x g(t) dt$ betrachtet.

In welchem Punkt $(x|G(x))$ befindet sich ein Maximum? Ist es global? Begründen Sie die Antwort.

4. Von einer Polynomfunktion $p: x \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ höchstens dritten Grades sind folgende Funktionswerte für $x = 0$ und $x = 2$ vorgeschrieben:

$$p(0) = t \quad p'(0) = u \quad p(2) = v \quad p'(2) = w$$

- 4.1 Es bezeichne m_1 den Mittelwert der Ableitung p' im Bereich $0 \leq x \leq 2$. Warum gilt die Formel $m_1 = (p(2) - p(0))/2$?
- 4.2 Es sei m_2 der Mittelwert der Ableitung p'' im Bereich $0 \leq x \leq 2$. Wie lässt sich m_2 aus den gegebenen Grössen bestimmen?
- 4.3 Wie gross ist $p(1)$?
- 4.4 Begründen oder widerlegen Sie: Der Mittelwert m_0 der Funktion p im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ist gegeben durch $m_0 = \frac{1}{6}(p(0) + 4p(1) + p(2))$.
5. In einem Versuch soll abgeklärt werden, ob die Art des Bodens die Keimfähigkeit von Erbsen beeinflusst. Je 12 Erbsen werden in Sand beziehungsweise in Kompost ausgesät. Im Sand keimen 7 Erbsen, im Kompost 11.
- 5.1 Wie gross ist die mittlere Keimfähigkeit \bar{p} der Erbsen in diesem Versuch insgesamt? Mit welcher Streuung muss man beim Wert \bar{p} aufgrund der Angaben rechnen?
- 5.2 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Keimfähigkeit von 75% in einem Versuch mit 12 Erbsen deren 11 oder 12 keimen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen weniger als 8 Erbsen?
- 5.3 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Versuch mit 120 Erbsen bei einer Keimfähigkeit von 75% die Zahl k der Keimlinge im Bereich $70 \leq k \leq 110$ liegt?