

Grundlagenfach **MATHEMATIK**

Erlaubte Hilfsmittel: - Formelsammlung: Das grosse Tafelwerk, Cornelson.
- Taschenrechner HP38, HP39, TI-84 oder ein leistungsschwächeres Modell

Bemerkungen: - Die Aufgaben dürfen in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite zu beginnen.
- Die Lösungswege müssen klar nachvollziehbar sein.
- Nicht-ganzzahlige Resultate sind, wenn nicht anders vermerkt, auf vier zählende Stellen zu runden.

Bewertung:	Aufgabe:	1	2	3	4	5
	Punkte:	7/4/4	7/4	4/4/3/8	7/2/9/1/1/6	4/7/8

80 Punkte : Note 6, 48 Punkte : Note 4, maximal: 90 Punkte

1. Analysis I

Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = (a-1) \cdot x^3 + bx^2 - 4ax + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

- a) Bestimmen Sie a , b und c so, dass der Graph von f im Punkt $(1/5)$ eine horizontale Tangente und bei $x = \frac{1}{6}$ einen Wendepunkt hat. (7P)

Für die folgenden Teilaufgaben wird $b=c=0$ und $a < 0$ angenommen. Wir betrachten somit die Funktion f_a mit Parameter $a < 0$ gegeben durch $f_a(x) = (a-1) \cdot x^3 - 4ax$.

- b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion. (4P)
- c) Bestimmen Sie die Fläche, welche der Graph im 1. Quadranten mit der x -Achse einschliesst.
(Rechnen Sie unabhängig davon, was Sie in Teilaufgabe a) erhalten haben, mit den Nullstellen 0 und $\pm \sqrt{\frac{2a}{a-1}}$ weiter.) (4P)

2. Analysis II

Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{1}{x^2}$

- a) Der Punkt P liegt auf den Graphen der Funktion im 1. Quadranten. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P derart, dass der Abstand zum Ursprung minimal wird. (7P)
- b) Der Graph der Funktion rotiert im Intervall $[1; \infty]$ um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des so entstandenen Körpers. (4P)

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

2007 wurde in einer Studie eine Häufung von Leukämiefällen bei Kindern unter 5 Jahren, welche im Umkreis von 5km um eines der 18 deutschen Kernkraftwerke (KKW) wohnen, festgestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass in Deutschland ein Kind an Leukämie erkrankt liege in Deutschland bei 0,01%.

- a) Weltweit gibt es 440 KKW. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 18 KKW auszuwählen, wenn 15 davon deutsche KKW sein sollen? (4P)
- b) Wir gehen davon aus, dass in der Studie 16'000 Kinder untersucht wurden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 37 Leukämiefälle zu erhalten? (Unter der Annahme, dass in Nähe der KKW keine erhöhte Erkrankungswahrscheinlichkeit, sondern die in Deutschland gängige von 0,01%, vorkommt.) Stellen Sie nur die Formel auf ohne auszurechnen. (4P)
- c) Wir betrachten ein quadratisches Gebiet mit 400km^2 mit einem KKW im Zentrum. Innerhalb des Umkreises von 5km um das KKW gelte die erhöhte Erkrankungswahrscheinlichkeit von 0,025%, ausserhalb die normale Erkrankungswahrscheinlichkeit von 0,01%. Die Bevölkerung sei im gesamten Gebiet homogen (gleichmässig) verteilt. Geben Sie in dieser Aufgabe die Resultate auf 5 Stellen genau an.
- (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt ein Kind innerhalb des 5-km-Umkreises um das KKW? (3P)
- (2) Ein bestimmtes Kind hat Leukämie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wohnt es ausserhalb des 5-km-Umkreises um das KKW? (8P)

4. Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $A(1/2/1)$, $B(-1/3/0)$ und $C(-2/-3/1)$, sowie die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Gerade g und der Ebene E , welche die Punkte A , B und C enthält. (7P)
- b) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks ABC . (2P)
- c) Bestimmen Sie $D \in g$ derart, dass die Pyramide $ABCD$ das Volumen 26 aufweist. (9P)
- d) Spiegeln Sie
- (1) den Punkt A an der xz -Ebene. (1P)
 - (2) den Punkt B an der x -Achse. (1P)
 - (3) den Punkt C an der Geraden g . (6P)

5. Unabhängige Aufgaben

5.1 Lösen Sie nur eine der folgenden beiden Teilaufgaben a) oder b). (Sollten Sie beide zu lösen versuchen, muss klar erkennbar sein, welche bewertet werden soll, ansonsten wird a) bewertet.) (4P)

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx$$

- b) Bestimmen sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\int x^2 \cdot \sin(x) dx$$

5.2 Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{x^2 + 4x - 45}{x - 2}$

Bestimmen Sie die Nullstellen, die erste Ableitung f' und alle Asymptoten (auch Pole) des zugehörigen Graphen. (7P)

5.3 Eine Urne enthält 10 schwarze und eine unbekannte Anzahl gelber Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen und beiseite gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden gezogenen Kugeln um Kugeln der selben Farbe handelt, beträgt 50%. Wie viele gelbe Kugeln befinden sich demnach zu Beginn in der Urne? (8P)