KANTONSSCHULE WATTWIL | **Maturitätsprüfung 2009**

Gymnasium 4SB | Mathematik

Hilfsmittel: "Fundamentum" und Zusatzblatt Mathematik 4SB 2009 — total 4 Stunden

Teil A: Ohne Taschenrechner

A1) Grundfertigkeiten Analysis — 9 Punkte

a) Leite die folgenden Funktionen einmal ab: aI) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ aII) $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

b) Berechne folgende Integrale: bI) $\int 3 \cdot \cos(4 - x) \cdot dx$ bII) $\int_1^3 (x-2)^2 \cdot dx$.

c) Gib die Gleichungen der Asymptoten der folgenden Funktion an: $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

d) Gib die Gleichung der Wendetangente der Funktion $k(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

A2) Grundfertigkeiten Vektorgeometrie — 5 Punkte

a) Zerlege den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in Komponenten mit den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gib von der Geraden g je eine Gleichung in Koordinaten- und in Normalenform. Berechne sodann den Abstand der Geraden vom Punkt P= (-40 / 30). – Die Gerade g ist gegeben durch: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A3) Wahrscheinlichkeit und Statistik — 8 Punkte

a) Die Tombola des Geissenzüchtervereins verspricht: "Jedes dritte Los ein Treffer". Toni kauft fünf Lose. – Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau zwei Treffer?

b) Chiara und Daniela werfen eine gute 2 Franken-Münze so oft, bis Kopf oder Zahl fünf Mal erschienen ist. Chiara erhält die Münze bei 5 mal Kopf, Daniela bei 5 mal Zahl. Eines schönen Abends müssen sie beim Stand von 4 : 3 für Chiara aufhören. – Beende das Spiel theoretisch mit einem Baumdiagramm, leite daraus ab, wie die Gewinnchancen für die beiden Damen stehen und wie demnach die zwei Franken verteilt werden müssten.

Hinweis: Blaise Pascal (im Bild nebenan) hat sich schon um 1630 mit dieser Frage beschäftigt

c) Kommentiere in höchstens fünf Sätzen und unter Verwendung von Fachausdrücken aus der beschreibenden Statistik folgende Aussage: "Die Statistik beweist, dass der Bildungsstand der Kinder stärker vom Bildungsstand der Mütter als von demjenigen der Väter abhängt."

Bitte Lösungen zum Teil A abgeben und weiter mit Taschenrechner:

"Mit Köpfchen und Knöpfchen!"

Teil B: Mit Taschenrechner TI 89

B1) Noten-Statistik 12 Punkte

In der folgenden Tabelle sind die Matur- und die Mathematiknoten einer früheren Klasse angegeben.

Matur	5.3	5.2	5.1	5.0	5.0	4.9	4.9	4.9	4.8	4.8
Mathematik	6.0	5.0	5.5	5.2	5.1	4.9	4.5	4.4	4.7	4.6
Matur	4.8	4.7	4.7	4.6	4.6	4.6	4.5	4.3	4.2	3.9
Mathematik	4.1	4.5	4.3	4.9	4.5	4.0	4.8	3.4	3.8	2.5

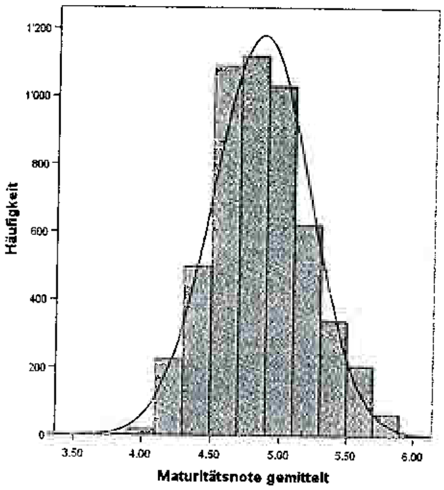
a) Berechne für die Matur- und die Mathematiknoten je den Mittelwert und die Standardabweichung.

b) Zeichne die Ergebnisse jeder zweiten Person in ein Mathematik-Matur - Diagramm und lege von Auge eine Korrelationsgerade. Berechne nun mit allen Werten die Korrelationsgerade und zeichne sie ebenfalls ein.

Eine Analyse des Zusammenhangs zwischen Maturanoten und der Basisprüfung an der ETH Zürich

(...) Um die Noten von allen Gymnasien vergleichbar zu machen, wurde von allen Noten pro Schüler der Gesamtdurchschnitt errechnet (ohne Gewichtung der einzelnen Noten).

Es besteht ein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Gesamtdurchschnitt der Maturanoten und der Note bei der Basisprüfung. Das heisst, je besser die Leistung in der Schule, desto besser die durchschnittliche Note bei der Basisprüfung.



c) Berechne den Korrelationskoeffizienten und kommentiere damit in höchstens drei Sätzen folgende Behauptung: "Die ETH-Studie sagt, dass die Maturnoten eine gute Vorhersagekraft für die ETH-Basisprüfung besitzen. Noch besser wäre die Vorhersagekraft der Mathematiknoten des Gymnasiums."

d) Mache für die Mathematiknoten eine sinnvolle Klasseneinteilung und stelle sie in einem Balkendiagramm dar. Zeichne den Median sowie die Bandbreite "Mittelwert ± Standardabweichung" ein. – Ist der Median hier eine gute Näherung für den Mittelwert? Wie viele % der Schüler liegen innerhalb der Bandbreite?

e) Die Verteilung der Mathematiknoten kann folgendermassen durch eine GAUSS-Kurve angenähert werden:

Berechne mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0.7}\int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4.5}{0.7}\right)^2}\cdot dx$ den Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler, die innerhalb der Bandbreite $3.8 \le x \le 5.2$ liegen. Vergleiche dieses Ergebnis mit demjenigen von d).

B2) Zwei unabhängige Analysis-Aufgaben 9 Punkte

a) Ein Polynom dritten Grades hat bei A = (0 / 0) und B = (8 / 4) je eine waagrechte Tangente. – Berechne die Funktionsgleichung, skizziere den Kurvenverlauf und berechne den Steigungswinkel (in Grad) der steilsten Tangente zwischen A und B.

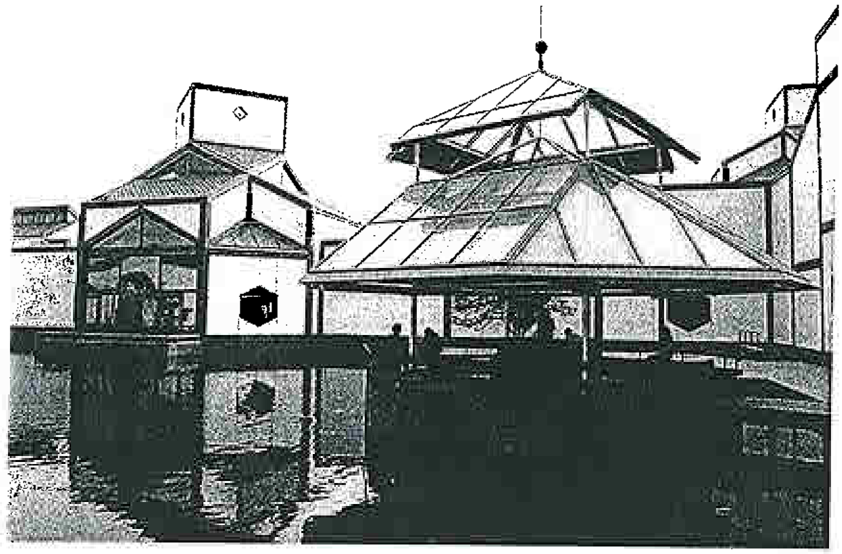
b) Französischer Weichkäse wird manchmal in Halbzylindern verpackt. – Berechne den Halbkreis-Radius und die Höhe der Schachtel so, dass bei gegebenem Volumen V die Oberfläche minimal wird. Hinweis: Nimm für das Volumen 250 (in cm^3), wenn Dir die allgemeine Rechnung nicht gelingt.

B3) Vektorgeometrie im berühmten Museum von 苏州市 12 Punkte

a) Die Punkte A = (4 / 0 / 8), B = (0 / 4 / 8) und C = (0 / 0 / 16) bilden eines der vielen Dreiecke im berühmten Museum von Suzhou. – Wie gross ist der Winkel{ACB}? Welchen Winkel schliesst die Ebene Σ = ABC mit der Horizontalebene (d. h. der x-y - Ebene) ein?

b) A'B'C' ist der Grundriss von ABC: Skizziere das schräg abgeschnittene Prisma {A'B'C'A B C} und berechne sein Volumen. Hinweis: Effektive Höhe = Höhe zwischen den Schwerpunkten der Deckflächen.

c) Zeige, dass die Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ windschief sind, berechne ihren Mindestabstand und gib die Koordinaten eines der beiden Punkte an, die den Mindestabstand aufweisen.



B4) Verschiedene (Un-)Wahrscheinlichkeiten 9 Punkte

Annabella, Bettina und Caroline versuchen, ihre gelesenen 20 MINUTEN in den Papierkorb zu werfen. Die Treff-Wahrscheinlichkeit ist 2/3. Sie werfen eine Runde um die andere immer in der Reihenfolge ABCABC...

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen mindestens zwei von ihnen in der ersten Runde?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie nach drei Runden keinen Treffer erzielt?

c) Nach wie vielen Runden ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens einen Treffer erzielen, grösser als 0.999?

d) Isabella darf aus einem Sack, der insgesamt 10 Kugeln enthält, gleichzeitig zwei Kugeln ziehen. Sie weiss, dass es eine Mischung von schwarzen und weissen Kugeln ist. Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche zu erhalten ist um 1/15 kleiner als die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedene zu erhalten. – Wie viele weisse Kugeln sind es?

B5) Noch mehr Analysis 9 Punkte

a) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 4 \cdot e^{x/2} - 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. – Zeige, dass f und g dort, wo sie die y-Achse schneiden, eine gemeinsame Tangente besitzen. Betrachte sodann das endliche Flächenstück, das für $x < 0$ von $f(x)$ und für $x \geq 0$ von $g(x)$ mit der x-Achse eingeschlossen wird. Lasse dieses um die x-Achse rotieren und berechne das Volumen dieses Rotationskörpers!

b) Gegeben ist die Funktion $h(x) = a \cdot \sin(x) + \cos(x) + 1$. – Wie gross muss a sein, damit sie bei $x = \pi/6$ ein Maximum besitzt? Wie gross ist dann die Fläche, die die Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 2\pi$ mit der x-Achse einschliesst?