**KANTONSSCHULE WATTWIL** **Maturitätsprüfung 2009**

Gymnasium 4LW/4W Mathematik

Teil 1: 10 Kurzaufgaben à 3 Punkte.
Teil 2: 3 Aufgaben in einem grösseren Zusammenhang à 10 Punkte.
Die Maximalnote wird für 50 Punkte erteilt.
Zeit: 4 Stunden

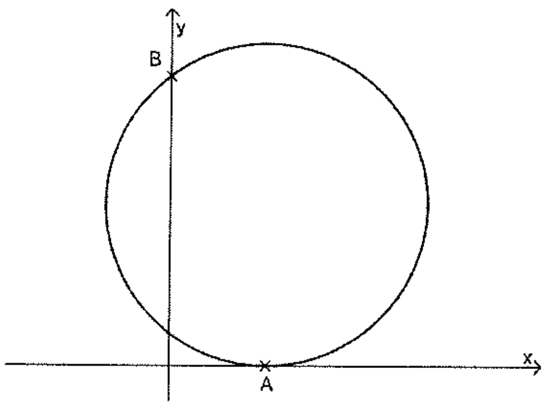
## Teil 1: Kurzaufgaben ohne Taschenrechner

**Erlaube Hilfsmittel: Formelsammlung.**

**Der Lösungsweg muss jeweils aus der Darstellung ersichtlich sein. Für blosse Resultate gibt es keine Punkte.**

### Kurzaufgabe 1

Der nebenan gezeichnete Kreis berührt die x-Achse im Punkt A(3|0) und schneidet die y-Achse im Punkt B(0|9). Bestimme seine Gleichung.




### Kurzaufgabe 2

Löse die Gleichung $2\log(x + 5) = 1 + \log(2x + 10)$ in der Menge der reellen Zahlen ($\log = \log_{10}$).

### Kurzaufgabe 3

Eine Zahlenfolge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} + \frac{1}{n+1}$

a) Berechne die Glieder $a_2$, $a_3$, und $a_4$.

b) Suche eine explizite Formel für $a_n$ und bestimme den Grenzwert a dieser Folge für $n \to \infty$.

**Kurzaufgabe 4**

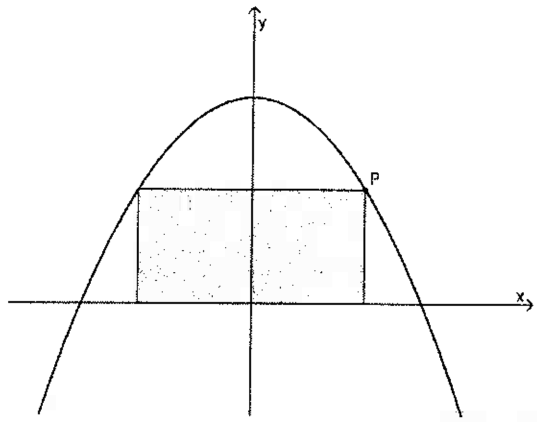
Gegeben ist die Ebene E: $x + 2y - 2z - 4 = 0$ und die Gerade g durch die Punkte P(5|1|1) und Q(3|1|0).
Begründe, dass die Gerade g parallel zur Ebene E liegt und bestimme den Abstand von g zu E.

**Kurzaufgabe 5**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 9 - x^2$.

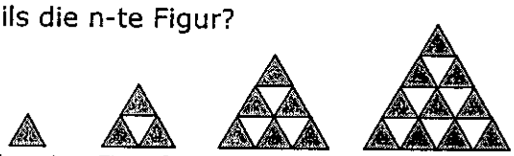
a) Bestimme die Koordinaten von P so, dass das y-Achsensymmetrische Rechteck einen möglichst grossen Flächeninhalt hat.

b) P hat nun die Koordinaten (2|...). Welcher Bruchteil des Flächenstücks zwischen Graph und x-Achse wird durch das Rechteck überdeckt?




**Kurzaufgabe 6**

Aus wie vielen grauen Dreiecken besteht jeweils die n-te Figur?



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

**Kurzaufgabe 7**

Vom Dreieck ABC kennt man die Eckpunkte A(5|3|2) und C(7|0|8) sowie seinen Schwerpunkt S(5|2|3).

a) Berechne die Koordinaten des dritten Eckpunkts B.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

**Kurzaufgabe 8**

Eine Laplace-Münze wird 400-mal geworfen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 180-mal "Kopf" geworfen wird. (Näherung mit Normalverteilung)

b) In welchem Intervall $[\mu-k;\mu+k]$ liegt die Anzahl der "Kopf"-Würfe mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit?

**Kurzaufgabe 9**

Du stehst im Dunkeln vor einer verschlossenen Tür und hast 6 (gleich aussehende) Schlüssel zur Auswahl, von denen nur einer der Passende ist. Du probierst jeden der Reihe nach durch.

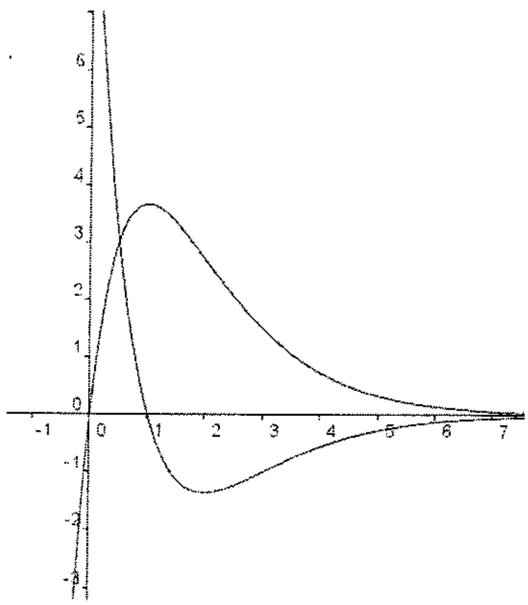
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
1) der 1. Schlüssel
2) erst der letzte Schlüssel passt.

b) Stell dir vor, oben geschildertes Problem passiert dir immer wieder. Mit wie vielen Versuchen musst du über lange Sicht gesehen durchschnittlich rechnen?

**Kurzaufgabe 10**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10(x+b)\cdot e^{ax}$.

In der Figur nebenan siehst du den Graphen von f sowie den Graphen ihrer Ableitungsfunktion f '.




a) Welcher der beiden Graphen stellt die Funktion f dar? Begründe.

b) Bestimme die Funktionsgleichung von f.

## Teil 2 : Mit Taschenrechner

**Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung**
**Jede Aufgabe soll auf einem neuen Blatt begonnen werden.**

### Aufgabe 11

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

a) Diskutiere die Funktion f und zeichne ihren Graphen.

b) Betrachte eine 2. Funktion $g(x) = \frac{ax}{x^2+1}$. Bestimme a so, dass der Graph von g durch den Hoch- und Tiefpunkt von f verläuft.

c) Die Gerade x = b schneidet aus den Graphen von f und g eine Strecke heraus. Für welchen Wert von b wird diese Strecke möglichst lang?

d) Untersuche, wie viele Tangenten man vom Punkt $P(\frac{8}{3}|0)$ an den Graphen von f legen kann.

### Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte A(1|1|1), B(3|3|1), C(0|4|5) sowie die Gerade

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.

c) Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(6|-2|8). Berechne ihr Volumen.

d) Die Pyramide ist symmetrisch zu einer Ebene F. Bestimme die Koordinatengleichung von F.

e) Spiegle die Gerade g an der Ebene E und bestimme die Gleichung der Spiegelgeraden g'.

**Aufgabe 13**

Die Firma BETRUG bringt neben Laplace-Würfel auch spezielle Betrugs-Würfel auf den Markt, die sich äusserlich nicht von den Laplace-Würfeln unterscheiden.
Die Betrugs-Würfel zeigen die Augenzahl "6" mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

a) In einer Box liegen drei Laplace-Würfel und 2 Betrugs-Würfel. Ein Spieler entnimmt der Box zufällig einen Würfel und wirft ihn. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine 6 wirft?

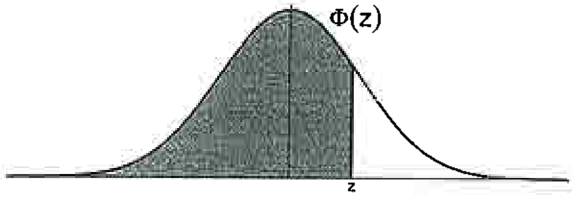
b) Beim Zufallsversuch von a) wird eine 6 gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung mit einem Betrugs-Würfel gewürfelt wurde?

c) Ein Betrugs-Würfel wird nun 30-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 10-mal eine "6" geworfen wird.

d) Der Betrugs-Würfel wird nun 300-mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl "6"-er zwischen 80- und 120 (einschliesslich dieser beiden Zahlen) liegt.

e) In welchem kleinsten Intervall $[\mu-k;\mu+k]$ liegen die Anzahl der "6"-er bei 300 Würfen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99%?

# Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}[Z \leq z]$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$




Bsp.: $\mathrm{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| .1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| .2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| .3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| .4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| .5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| .6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| .7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| .8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| .9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |