Kantonsschule Willisau **Schriftliche Maturitätsprüfung 2004**

Klassen 6a/6b/6c

Dauer : 3 Stunden

Mathematik

Erlaubte Hilfsmittel : Formelsammlung DMK
Graphikrechner HP-38 G

Bemerkungen :

- Folgende Aufgaben sind zu lösen : ❶ - ❸ und entweder ❹ oder ❺ .
- Wir müssen wissen, ob Sie sich für ❹ oder für ❺ entschieden haben; wenn Sie dazu keine Angaben machen, werden weder ❹ noch ❺ korrigiert / bewertet. Geben Sie deshalb nachfolgend Ihre Wahl bekannt:

Nr. ....

- Die Aufgaben dürfen in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite zu beginnen.
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe klar erkennbar sein.
- Nicht-ganzzahlige Resultate sind auf 4 zählende Stellen zu runden.

Punkte pro Aufgabe:

Aufgabe :	❶	❷	❸	❹	❺
Punkte :	1/2/2/4/4	3/2/4/2/2/4	4/3/3/4/6	5/6	5/3/3

Notenskala : Gesamtpunktzahl : 61 Für Note 6 : 52 Für Note 4 : 32

---

❶ Wahrscheinlichkeitstheorie

Geg.: Gemäss Angaben der SBB sind im Jahr 2003 81% aller Züge pünktlich angekommen, und 13% hatten eine Verspätung von maximal 5 Minuten. - Wir nehmen an, dass diese Daten auch jetzt (2004) noch gültig sind und betrachten Züge, die in den Hauptbahnhof Luzern einfahren. - Alle Wahrscheinlichkeiten sind in Prozent anzugeben.

Ges.:

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Zug eine Verspätung von mehr als 5 Minuten aufweist.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 10 Zügen die ersten 6 pünktlich sind und die letzten 4 jeweils maximal 5 Minuten Verspätung haben.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 10 Zügen 6 pünktlich sind und die restlichen 4 jeweils maximal 5 Minuten Verspätung haben.
d) Die Lautsprecher geben durch, dass der nächste Zug verspätet eintreffen wird. - Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass seine Verspätung maximal 5 Minuten betragen wird.
e) Wieviele Züge können einfahren, damit mit höchstens 40%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einer davon mehr als 5 Minuten Verspätung hat ?

❷ Vektorgeometrie

Geg.: Die Geraden $g \;:\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $h \;:\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind (die Verlängerungen von) zwei einander gegenüberliegenden Mantellinien eines Lichtkegels, welcher von der Lampe L ausgeht, einen spitzen Öffnungswinkel besitzt und einen kreisförmigen Lichtfleck auf die Wand W wirft. W steht senkrecht auf der Lichtkegelachse k , und P(7 , 0 , -6) liegt auf W .

Ges.: a) Berechne die Koordinaten von L .

b) Berechne den Öffnungswinkel des Lichtkegels.

Die nachfolgende Teilaufgabe c) ist etwas anspruchsvoller. Daher ist es vielleicht sinnvoll, sie vorerst mal zu überspringen. Beachte aber, dass das Resultat von c) unter Umständen nützlich weiterverwendet werden kann !

c) Zeige, dass die Parameterdarstellung von k wie folgt lautet : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

d) Berechne die Koordinatengleichung von W .

e) Berechne den Abstand von L zu W .

f) Berechne die Grösse des Lichtflecks auf W .

❸ Analysis I

Geg.: Wir betrachten die Funktion $f(x) = 4 / x^2$, $x > 0$. Der Punkt P(1 , ?) liegt auf dem Graphen von f .

Ges.: a) Die durch P gehende Tangente t an den Graphen von f bildet mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck, das bei Rotation um die y-Achse einen Kreiskegel erzeugt. - Berechne die Gleichung von t und die Höhe und den Grundkreisradius dieses Kreiskegels.

b) Berechne die Gleichung derjenigen Parabel, welche symmetrisch zur y-Achse ist und welche den Graphen von f in den Punkten P und Q(2 , ?) schneidet.

c) Nimm an, dass die Lösung von b) wie folgt lautet : $g(x) = - x^2 + 5$. - Berechne damit die Grösse der von den Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche.

d) Die Funktion $g(x) = - x^2 + 5$ begrenzt, zusammen mit den positiven Koordinatenachsen, ein endliches Flächenstück, welches um die x-Achse gedreht wird. - Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

e) Dem bei d) entstandenen Rotationskörper wird ein gerader Kreiszylinder K einbeschrieben, wobei die Zylinderachse gleich der x-Achse ist. - Berechne diejenige Höhe h von K , für welche das Volumen von K maximal wird.

❹ Analysis II / 1. Wahlmöglichkeit

Geg.: In einer $400\ m^3$ grossen Baumwollspinnerei werden Baumwollfasern verarbeitet. Die Baumwollfasern entziehen der Luft laufend etwas Wasser; insgesamt sind es $3\ kg$ Wasser pro Stunde. Damit der Betrieb aufrechterhalten werden kann, wird daher ein Wasserverdampfer eingesetzt, welcher pro Stunde $3.5\ kg$ Wasser verdampft.

Ein Gebläse sorgt für den Luftaustausch, d.h. für die Abfuhr der Innenluft der Spinnerei und für die Zufuhr frischer Aussenluft; auf diese Weise werden pro Stunde $100\ m^3$ Luft ausgetauscht. Die Aussenluft hat einen Wassergehalt von $5\ g/m^3$.

Wir nehmen an, dass

- sich das verdampfte Wasser und die zuströmende Aussenluft sofort und gleichmässig in der ganzen Spinnerei verteilen;
- in der Spinnerei die Wasserkonzentration $w(t)$ zur Zeit $t = 0$ $15\ g/m^3$ beträgt.

Ges.: a) Leite eine DG her für die Wasserkonzentration $w(t)$ zur Zeit $t > 0$.

b) Wir nehmen an, dass die Lösung von a) wie folgt lautet : $\dot{w}(t) = 2\,t\,w(t) + 5\,t$. - Löse diese DG unter Verwendung der relevanten AB.

❺ Analysis II / 2. Wahlmöglichkeit

Geg.: Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 1}$.

Ges.: a) Bestimme die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte von f .

b) Bestimme alle Asymptoten und Symmetrien von f .

c) Berechne die Fläche zwischen f und der x-Achse im Bereich $[0\ ,\ 1[$.