Gymnasium Kirschgarten Basel **Mathematik**
Maturitätsprüfung 2009

- Erlaubte Hilfsmittel:
  Taschenrechner (nichtgraphikfähig), Formeln und Tafeln (DMK/DPK) oder Fundamentum.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten dotiert. Ab 50 Punkten wird die Note 6 erteilt.
- Die Darstellung fliesst in die Bewertung ein.

Aufgabe 1 Zum Jahr der Astronomie

1.1. Galileo Galilei hat vor sich die Skizze eines Trapezes mit den Seiten a, b, c und d.
Er verfügt über die Angaben: $a=5$, $b=4$, $c=3$ und a ist parallel zu c.
Zusätzlich setzt er einmal $d=4$ und einmal $d=3$ und berechnet jeweils den Winkel α zwischen a und d.
Machen Sie es wie Galilei:
Skizzieren Sie die Trapeze und berechnen Sie für beide Fälle den Winkel α.

1.2. Galilei nimmt sein Fernrohr und hebt es gegen den Himmel. Dort entdeckt er 4 Leuchtpunkte A, B, C und D die genau sein Trapez mit $d=3$ bilden.
Einige Zeit später scheinen die Punkte gewandert zu sein, bilden aber ein ähnliches, nur grösseres Trapez A\`, B\`, C\`und D\`.
Der Punkt A ist noch am gleichen Ort aber die neue Höhe des Trapezes beträgt $h\grave{}=h+2$.
Zeichnen Sie die Situation und berechnen Sie die Strecke $\overline{BB\grave{}}$ sowie die Flächeninhalte der beiden Trapeze.

Aufgabe 2

Durch die Gleichung $y = a+\dfrac{bx^2}{c-x}$ mit $a, b, c \in R$ wird eine von den Parametern a, $b$und c abhängige gebrochen rationale Funktion f definiert.

2.1. Bestimmen Sie a, b und c so, dass die Funktion f bei $x=2$ eine Polstelle (Definitionslücke), bei $x=-1$ eine Nullstelle und bei $x=4$ den Funktionswert $f(4)=-5$ hat.

2.2. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für das gefundene f durch. (Definitionsbereich, Nullstellen, asymptotisches Verhalten, lokale Extrema mit Abklärung, Wendepunkte)

2.3. Skizzieren Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem.
(1 LE = 1cm, $-3 \leq x \leq 7$, $-7 \leq y \leq 3$)

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $P(0/14/15)$, $Q(6/8/12)$, $R(14/0/8)$ und $O(0/0/0)$.

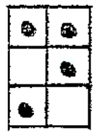
3.1. Zeigen Sie, dass die Punkte P, Q und R auf einer Geraden g liegen und berechnen Sie den Schnittwinkel von g mit der Geraden h durch die Punkte O und Q.

3.2. In welchem Verhältnis teilt die Strecke $\overline{OQ}$ den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOPR ?

3.3. Ein Quader hat eine Ecke im Punkt O und die diagonal gegenüberliegende Ecke $E(x/y/z)$ auf der Strecke $\overline{PR}$.
Die Kanten des Quaders liegen auf den Koordinatenachsen bzw. parallel zu diesen.
Zeigen Sie, dass das Volumen des Quaders maximal wird, wenn E = Q gilt und berechnen Sie dieses maximale Volumen.

Aufgabe 4 Gewidmet: Louis Braille, geboren am 4.Januar 1809

Die Blindenschrift besteht aus Zeichen, die durch die Braille`sche Zelle dargestellt werden. Sie besteht aus 6 Plätzen, die über Erhebungen verfügen oder leer gelassen werden. Für Sehende gilt das angegebene Modell mit schwarzen Punkten oder weissen Flächen.



4.1. Wieviele Zeichen sind damit überhaupt möglich ?

4.2. Bei wievielen Zeichen sind genau 2 oder genau 3 Punkte schwarz gefärbt ?
Wie gross ist also die Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3 schwarze Punkte ?

Wir betrachten nun eine Anordnung von 4 solcher Zellen, die wir hintereinander setzen. Sie beschreibt unterschiedliche, vierteilige Ausdrücke.

4.3. Wieviele solcher verschiedener, vierteiliger Ausdrücke gibt es also ?

4.4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vierteiliger Ausdruck aus 3 Zellen mit einem schwarzen und einer Zelle aus 3 schwarzen Punkten besteht ?

4.5. Bei wievielen dieser Ausdrücke sind <u>insgesamt</u> 6 schwarze Punkte bemalt und wie gross ist damit deren Wahrscheinlichkeit ?

Aufgabe 5

Eine Folge a_n sei rekursiv definiert durch: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(2n+1)(2n-1)}$, $a_1 = 1$.

5.1. Bestimmen Sie die ersten 5 Glieder dieser Folge.

5.2. Stellen Sie eine Formel für die direkte Vorschrift a_n auf und bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge. Von welchem Glied an sind alle Glieder der Folge um weniger als 0.001 vom Grenzwert a entfernt ?

Gegeben sei die Folge b_n durch die direkte Vorschrift: $b_n = (2n+1)(2n-1)$.

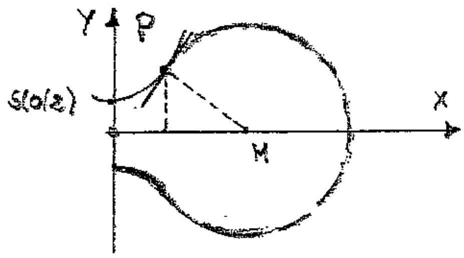
5.3. Berechnen Sie die Summenformel s_n dieser Folge in Abhängigkeit von n.

5.4. Welche Zahl erhalten Sie, wenn Sie die Grösse $s_{11} - 4$ ausrechnen ?

Aufgabe 6 Zum Abschied der Glühbirne

Das Modell einer `Glühbirne` hat den abgebildeten Längsschnitt.

Der Kreis mit Mittelpunkt $M\left(\dfrac{25}{3}/0\right)$ berührt die Parabel in $P(3/4)$.



6.1. Bestimmen Sie die Gleichungen des Kreises und der Parabel.

6.2. Wie gross ist der Rauminhalt der `Glühbirne` ?

6.3. In einem Kreis mit Mittelpunkt $M(0/0)$ und Radius r = 4 soll ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, dessen Spitze C(4/0) ist und dessen Basis parallel zur y-Achse liegt. Wie gross ist der maximale Flächeninhalt ?

Viel Glück wünschen Ihnen:
Elke Kuchelmeister, Sieglinde Pressler, Erika Veltin, Daniel Bühler und Alain Wagner