

- Bemerkungen:
- \* Erlaubte Hilfsmittel: Formelbuch und Taschenrechner.
  - \* Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein.
  - \* Für jede Aufgabe sind 12 Punkte (P) (d.h. 3 P pro Teilaufgabe) vorgesehen.
  - \* Pro Aufgabe ist eine neue Seite anzufangen.
  - \* Die Note N berechnet sich als  $N = (P/10) + 1$ , gerundet auf halbe Noten.

### Einzelaufgaben

- 1.) a) In einer Urne befinden sich 10 Kugeln mit den Nummern 0 bis 9. Drei Kugeln werden gezogen und der Reihe nach nebeneinander gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht die Zahl 567, wenn
- a<sub>1</sub>) eine gezogene Kugel nicht mehr zurückgelegt wird ?  
 a<sub>2</sub>) eine gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird ?
- b) Der Graph der Funktion  $y = 2^x$  ( $x < 0$ ) rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
- c) Welchen Abstand hat  $P(5/1/1)$   
 c<sub>1</sub>) von  $\varepsilon: 2x - 3y + 6z + 1 = 0$  ?    c<sub>2</sub>) von  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?
- d) Wie gross ist ein von den Graphen  $y = \sin(2x)$  und  $y = \cos(2x)$  begrenztes Flächenstück ?

### Vektorgeometrie

- 2.) Gegeben sind zwei Geraden  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$
- a) Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel von g mit  $\pi_2$ .
- b) Welchen Abstand hat  $Q(-10/1/12)$  von der durch h und den Nullpunkt verlaufenden Ebene ?
- c) Zeige: g und h liegen windschief – senkrecht zueinander und die kürzeste Verbindung zwischen g und h verläuft durch  $A(0/11/7) \in g$  und  $E(5/13/21) \in h$ .
- d) Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen g und h soll die Kante eines Würfels sein, von dem je eine weitere Kante auf g und auf h liegen. Bestimme die Eckpunkte eines solchen Würfels.

## Analysis

3.) Gegeben sind die Funktionen  $f_1: y = \frac{1}{3}x^2$  und  $f_2: y = \frac{x^3}{4-x^2}$ .

a) Skizziere  $f_1$  und diskutiere  $f_2$  (Pole, Asymptoten, Extrema).

b) Zeige, dass  $\int f_2(x) dx = \frac{1}{2}(4-x^2) - 2 \ln(4-x^2) + C$ .

c) Berechne die von  $f_1$  und  $f_2$  eingeschlossene Fläche.

d) Unter welchem Winkel schneiden sich  $f_1$  und  $f_2$  im Bereich  $x < 0$  ?

4.) Betrachte die Kurve  $k$  mit der Gleichung  $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

a) Zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $k$  ist ein Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalt einzubeschreiben. Berechne die  $x$ -Werte der Eckpunkte des Rechtecks.

b) Zeige: Zwei Eckpunkte des Rechtecks von Aufgabe a) entsprechen den Wendepunkten der Kurve  $k$ . Berechne anschliessend die Fläche zwischen  $k$ , der  $x$ -Achse und den senkrechten Kanten des Rechtecks.

c) Die Gerade  $y = \frac{1}{2}$  und  $k$  begrenzen ein Flächenstück, welches um die  $y$ -Achse rotiert. Berechne das Volumen des Körpers.

d) In der Umgebung des Nullpunktes soll  $k$  durch eine Parabel  $p: y = -a x^2 + b$  so angenähert werden, dass  $p$  die Kurve  $k$  in ihren Wendestellen berührt. Bestimme die Parabelgleichung.

## Stochastik

5.) Der Mathematiklehrer eines Gymnasiums schätzt die Leistungen seiner 45 Schülerinnen und Schüler an der schriftlichen Maturaprüfung angenähert normalverteilt, d.h. wie folgt ein:

|                                |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
|--------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Zufallsvar. X                  | 0           | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8           | 9           | 10          |
| Ereignis $x_i$<br>(Notenwerte) | 1.0-<br>1.2 | 1.3-<br>1.7 | 1.8-<br>2.2 | 2.3-<br>2.7 | 2.8-<br>3.2 | 3.3-<br>3.7 | 3.8-<br>4.2 | 4.3-<br>4.7 | 4.8-<br>5.2 | 5.3-<br>5.7 | 5.8-<br>6.0 |
| absolute<br>Häufigkeit         | 0           | 0           | 1           | 2           | 5           | 9           | 11          | 10          | 4           | 2           | 1           |

- Berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung, zeichne ein geeignetes Histogramm und gib eine Funktion an, welche die Verteilung näherungsweise bestimmt.
- Vreneli möchte eine Note von mindestens 5.0 erreichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann eine solche Note erreicht werden? [ Falls a) nicht gelingt, rechne mit  $\mu=4$  und  $\sigma=0.84$  ]
- Hansli möchte sich nicht signifikant von den andern unterscheiden und legt für sich ein Signifikanzniveau von 10% fest. In welchem Bereich müsste seine Note liegen?
- Die absoluten Häufigkeiten in der Tabelle sollen nun binomial verteilt werden mit  $n=10$  und  $\mu=6$  (d.h. Notendurchschnitt 4.0). Berechne  $p$ ,  $q$  und  $\sigma$ .  
In welchem Bereich müsste die Note von Hansli liegen, wenn man wieder mit einer Normalverteilung annähert, obwohl die Voraussetzung  $npq > 9$  nicht erfüllt ist?

## I VEKTORGEOMETRIE

1. Vektoren im 2- und 3-dim. Raum.
2. Koordinatengleichung der Ebene.
3. Skalarprodukt: Winkelberechnung.
4. Vektorprodukt: Flächenberechnung, Normalvektoren.
5. Parametergleichung der Gerade.
6. Die HNF und ihre Anwendungen.

## II ANALYSIS

7. Numerische und algebraische Lösung von Gleichungen
8. Ganze und gebrochen rationale Funktionen.

### **Differentialrechnung**

9. Begriff der Ableitung (Tangenten, Normale, Steigungswinkel).
10. Ableitungsregeln: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel.
11. Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung.
12. Extremwertaufgaben.
13. Ableitung von Polynomen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Log.-Funktionen.
14. Umkehrfunktionen und ihre Ableitungen.

### **Integralrechnung**

15. Bestimmtes und unbestimmtes Integral.
16. Integrationsregeln.
17. Flächenberechnung und Flächenextrema.
18. Drehkörpervolumen (Rotation um x- und y-Achse).
19. Uneigentliche Integrale.

## III STOCHASTIK

20. Mittelwert, Varianz und Streuung.
21. Relative Häufigkeiten und Begriff der Wahrscheinlichkeit.
22. Unabhängige und bedingte Wahrscheinlichkeiten.
23. Wahrscheinlichkeitsalgebra (Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten).
24. Variationen, Permutationen und Kombinationen.
25. Binomische Verteilung, der binomische Lehrsatz.
26. Binomial- und Normalverteilung.