MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2008

Klasse 4B | Mathematik schriftlich | Peter Strickler

Viel Glück!

1 Ein Apfel (anfänglich 200 g) verliert jeden Tag 2% seiner Masse.

a Berechne seine Masse nach 20 Tagen.

b Wie lautet das allgemeine Massenabnahmegesetz dieses Apfels?

c Nach wie vielen Tagen hat sich die Anfangsmasse halbiert?

2 Folgendes Polynom approximiert die Funktion f an der Stelle x = 0:

$$P_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

a Berechne P_1 für $f(x) = \sqrt{1+x}$.

b Berechne P_1 für $f(x) = \ln(1+x)$.

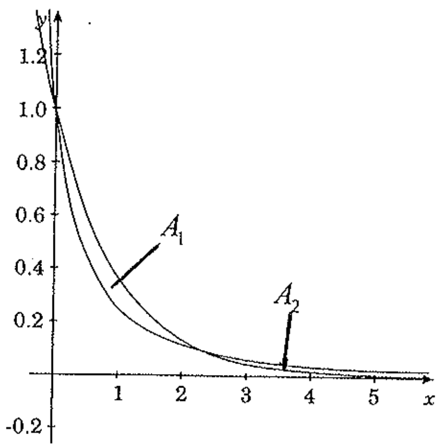
c Berechne P_3 für $f(x) = \sin x$.

3 Berechne folgende Integrale: $\int_0^\infty e^{-x}dx$ und $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx$.

Es existieren die beiden kleinen Schnittflächen A_1 und A_2 (vgl. Fig. 1). Da die beiden Integrale gleich gross sind, müssen auch die beiden Flächen A_1 und A_2 gleich sein. Erkläre das!

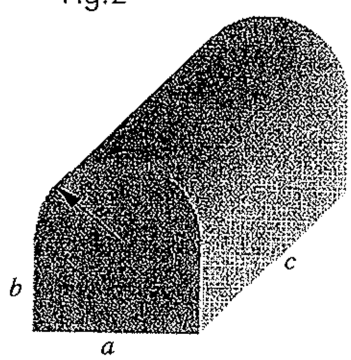
4 Eine Gärtnerei möchte ein Treibhaus bauen: einem Quader wird ein halber Kreiszylinder aufgesetzt (vgl. Fig. 2). Das Volumen soll $35m^3$ sein und die Länge c muss $7m$ betragen. Das Treibhaus wird auf allen Aussenflächen (ohne Boden!) mit einer Folie überzogen. Wie muss man a und b wählen, damit die von der Folie bedeckte Fläche minimal wird? (Empfehlung: wähle x = a.)

Fig. 1



Vergleich der Graphen $f(x) = 1/(x+1)^2$ und $g(x) = e^{-x}$

Fig. 2



Klasse 4B	Mathematik schriftlich	Peter Strickler

Aufgabe 5

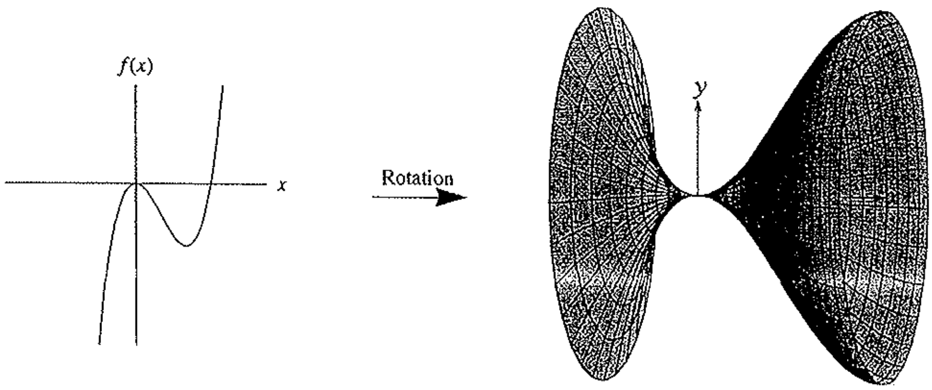
a Der Graph eines Polynoms 3. Grades hat im Koordinatenursprung einen Extrempunkt und in den Punkten $P_1(5/50)$ und $P_2(-3/y_2)$ zueinander parallele Tangenten. Bestimme diese ganzrationale Funktion.

b Ein Glasdesigner möchte ein neues Cocktailglas entwerfen, dessen Rand durch Rotation der Funktion $f(x)=x^3-3x^2$ um die x - Achse entsteht (vgl. Fig.3). Der Fuss des Glases soll die gleiche Breite wie der Kelch an seiner breitesten Stelle haben. Berechne die Höhe des Glases. (Beim Lösen dieses Problems ergibt sich eine Gleichung 3. Grades, bei der man die Lösung, die interessiert, leicht erraten kann.)

c Wie gross ist das Fassungsvermögen des Glases (b)?

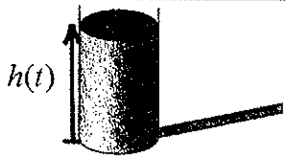
d Nun werde die Funktion $f(x)$ von (b) durch $g(x)=ax^3-3ax^2$ ersetzt. Wie muss die positive reelle Zahl a gewählt werden, damit der Glasinhalt doppelt so gross wie bei (c) wird? (Natürlich rotiert $g(x)$ um die x-Achse; gib eine exakte Begründung.)

Fig.3



Klasse 4B	Mathematik schriftlich	Peter Strickler

Aufgabe 6



Aus einem zylindrischen Gefäss mit einem horizontalen Ausflussrohr fliesst Wasser. Die experimentelle Kurve ist durch die Messpunkte (vgl. unten) gegeben. Die theoretische Kurve habe immer den gleichen Startpunkt P_0 wie die experimentelle Kurve. Die theoretische Kurve wird durch folgende Gleichung beschrieben: $h(t) = h_0 e^{-kt}$.

a Der Messpunkt P_4 liege auf der theor. Kurve. Berechne daraus die Konstante k .

b Im Startpunkt P_0 habe die theor. Kurve ungefähr die gleiche Steigung wie die exp.. Skizziere die exp. Funktion,lese die Steigung ab und berechne daraus die Konstante k.

c Der Volumenstrom $I(t) = I_0 e^{-kt}$ soll integriert werden. Berechne $\int_0^\infty I(t)dt$.

($I_0 = 1.56x10^{-5} \frac{m^3}{s}$ und $k = 0.0027 s^{-1}$.)

d Interpretiere das Integral (c) und berechne daraus den Zylinderradius r.

(Messpunkte: (Zeit t/Höhe h) in (sekunden/meter):
P_0(0/0.184) P_1(77/0.15) P_2(150/0.12) P_3(207/0.10) P_4(235/0.092))

Aufgabe 7

Gegeben sind die beiden Ebenen E_1 und E_2 sowie die Gerade g.

$E_1 : x - 2y + 2z + 8 = 0$ $E_2 : 14x + 2y - 5z = 0$ g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

a Berechne den Durchstosspunkt D_1 von g mit E_1.

b Berechne den Winkel zwischen E_1 und E_2 sowie den Neigungswinkel zwischen g und E_1.

c E_1 schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X, Y und Z. Berechne die Fläche des Dreiecks XYZ.

d Bestimme die Punkte auf g, die von E_1 und E_2 gleich weit entfernt sind (2 Lös.!).

Klasse 4B	Mathematik schriftlich	Peter Strickler

8 Stochastik

8.1 Gauss – Verteilung

Eine Maschine stellt Metallplatten mit einer mittleren Dicke von 8.00 mm her. Die Streuung beträgt 0.04 mm.

a Skizziere diese Gausssche Glockenkurve (mit quantitativer Achsenbeschriftung.)

b Mit wie viel Prozent Ausschuss ist zu rechnen, wenn die Dicke zwischen 7.95 und 8.05 mm liegen soll?

c Welche beiderseitige Abweichung vom Mittelwert müsste man tolerieren, wenn der Ausschuss nicht mehr als 2 % betragen darf?

8.2 Zufallsvariable und ihre Verteilung

Auf einem Glücksrad stehen die Zahlen 1, 2 und 3. Der Zeiger bleibt auf den entsprechenden Feldern mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{6}$ stehen. Das Glücksrad werde zweimal gedreht. Die Zufallsvariable X sei die Summe der Zahlen.

a Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (Tipp: Baumdiagramm) und zeichne ein entsprechendes Histogramm.

b Berechne den Erwartungswert und die Streuung von X.

c Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable höchstens 4 beträgt?

Kantonsschule Ausserschwyz
8808 Pfäffikon/8855 Nuolen

Maturitätsprüfungen 2008

Klasse 4B | Mathematik mündlich | Peter Strickler

I VEKTORGEOMETRIE

1. Gleichungen der Geraden und Ebene: Gleichungsformen, Schnittprobleme, Spuren.
2. Skalarprodukt: Winkel zwischen Ebenen und Geraden.
3. Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden.
4. Vektorprodukt: Flächenberechnung, Abstand Punkt-Gerade.
5. Normalenformen: HNF, Abstand Punkt-Ebene

II ANALYSIS

Differentialrechnung

6. Begriff der Ableitung (Tangente, Normale, Steigungswinkel).
7. Ableitungsregeln: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel.
8. Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung.
9. Extremwertaufgaben.
10. Ableitung von Polynomen, trigonometrischen Funktionen, Exponential- und Log.-Funktionen.
11. Umkehrfunktionen und ihre Ableitungen.

Integralrechnung

12. Bestimmtes und unbestimmtes Integral.
13. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
14. Integrationsregeln.
15. Flächenberechnung.
16. Drehkörpervolumen (Rotation um x-Achse).

III STOCHASTIK

17. Mittelwert, Varianz und Streuung.
18. Histogramme, standardisierte Histogramme und Normalverteilung.
19. Unabhängige Wahrscheinlichkeiten.
20. Wahrscheinlichkeitsalgebra (Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten).
21. Baumdiagramme.
22. Zufallsgrössen und ihre Verteilungen (Gaussverteilung).