

Klasse 4f

Mathematik
schriftlich

Hans Heinrich Huwiler

Prüfungsdauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung / Taschenrechner

Maximal sind 100 Punkte möglich. Für die Note 6 sind 90 Punkte erforderlich.

Die Lösungen müssen logisch klar dargestellt und in sauberer Schrift präsentiert werden.

Bitte für jede der fünf Aufgaben ein neues Blatt verwenden!

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(7/2/12)$, $M(1/5/6)$ und $S(-3/13/14)$. A ist eine Ecke und M der Mittelpunkt der Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Spitze S.

- Gib eine Gleichung der Geraden $g(MS)$ an.
- Zeige, dass die Vektoren \overline{MA} und \overline{MS} senkrecht zueinander stehen.
- Gib eine Gleichung der Ebene Φ an, welche die Grundfläche der Pyramide enthält.
- Berechne den Winkel φ zwischen der Ebene Φ und der xy -Ebene.
- Berechne die Ecken B, C und D der Grundfläche und das Volumen der Pyramide.
- Berechne den Lotfusspunkt L des Punktes $P(5/12/1)$ auf die Gerade $h(AM)$.

20 Punkte (2 / 2 / 2 / 2 / 8 / 4)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \mapsto f_a(x) = \frac{x^3 - x^2}{(x+a)^2}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- Es sei $a = -2$. Diskutiere die zugehörige Funktion.
Definitionsmenge, Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte; Darstellung des Graphen mit Asymptoten mit Einheit 2 Häuschen (ganze Seite verwenden)
- Bestimme die Asymptoten der Schar in Abhängigkeit vom Parameter a.
- Kann a so gewählt werden, dass die zugehörige Funktion eine schräge Asymptote hat, die durch den Nullpunkt geht? Falls ja, welches ist der entsprechende Parameterwert?
- Der Parameter a kann so festgelegt werden, dass die zugehörige Funktion keine Polstelle hat. Bestimme den entsprechenden Wert von a und zeichne die zugehörige Funktion.
- Für welchen Wert des Parameters a hat die zugehörige Funktion f_a an der Stelle $x = -1$ ein Extremum?

34 Punkte (22 / 3 / 2 / 3 / 4)

Klasse 4f

Mathematik
schriftlich

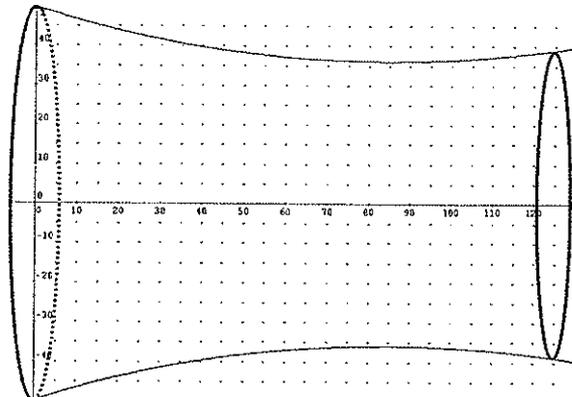
Hans Heinrich Huwiler

Aufgabe 3

Kühltürme von Kraftwerken haben eine charakteristische Form, die sich aus physikalischen und bautechnischen Anforderungen ergibt. Eine geeignete Form entsteht, wenn man eine so genannte Kettenlinie um eine Achse rotieren lässt.

Wenn wir als Rotationsachse die x -Achse wählen (also den Kühlturm in liegender Position betrachten), dann kann die Mantellinie eines 125 m hohen Kühlturmes durch die Kettenlinien-Funktion $f: x \mapsto f(x) = 18(e^{0.01x-0.85} + e^{-0.01x+0.85})$, $0 \leq x \leq 125$ dargestellt werden.

- Welches ist der Durchmesser des betrachteten Kühlturmes an der Basis ($x = 0$)?
In welcher Höhe (also für welches x) hat der Kühlturm den kleinsten Durchmesser, und wie gross ist dieser?
- Unter welchem Winkel trifft eine Mantellinie auf dem Boden auf?
- Wie gross ist die Fläche des Achsenschnittes (also die doppelte Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse)?
- Welches Volumen hat der Rotationskörper?



16 Punkte (6 / 3 / 3 / 4)

Klasse 4f

Mathematik
schriftlich

Hans Heinrich Huwiler

Aufgabe 4

Ein Passwort besteht aus vier, fünf, sechs oder sieben Grossbuchstaben des deutschen Alphabetes, das aus 26 Buchstaben besteht. Für ein Passwort ist selbstverständlich die Reihenfolge der Buchstaben relevant. Buchstaben dürfen wiederholt werden.

- a) Wie viele mögliche Passwörter gibt es?
- b) Wie viele mögliche Passwörter aus lauter verschiedenen Buchstaben gibt es?
- c) Wie viele mögliche Passwörter gibt es, bei denen nie zwei gleiche Buchstaben nebeneinander stehen?
- d) Das Passwort laute "IGLU". Ein Betrüger, der das Passwort nicht kennt, weiss aber, dass dieses aus vier Buchstaben besteht. Er probiert nun absolut **zufällig** ein mögliches Passwort (mit vier Buchstaben) nach dem andern aus.

Wie viele Passwörter muss der Betrüger mindestens ausprobieren, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal das Passwort zu treffen?

Diese Aufgabe ist unter zwei verschiedenen Voraussetzungen zu lösen:

- d1) Der Betrüger merkt sich alle schon ausprobierten Möglichkeiten und wiederholt sich nicht beim Probieren.
- d2) Der Betrüger vergisst ständig die schon ausprobierten Möglichkeiten, so dass Wiederholungen beim Probieren vorkommen können.

15 Punkte (3 / 3 / 3 / 6)

Klasse 4f

Mathematik
schriftlich

Hans Heinrich Huwiler

Aufgabe 5

Vom Stapel eines gewöhnlichen Jasskartenspiels (9 Eichen, 9 Rosen, 9 Schellen, 9 Schilten) werden nacheinander so lange zufällig Karten gezogen (ohne Zurücklegen), bis eine Karte mit einer schon vorher gezogenen Farbe erscheint. Diese letzte Karte mit der bereits vorhandenen Farbe wird zurück auf den Stapel gelegt. Den auf diese Weise bestimmten Karten sagen wir eine "Ziehung". Eine "Ziehung" enthält also eine, zwei, drei oder vier Karten.

Beispiel: 1. Karte: **Schellen-Bauer**
2. Karte: **Rosen-7**
3. Karte: **Eichel-Ass**
4. Karte: Rosen-König

Mit der 4. Karte hat sich die Farbe der "Rosen" wiederholt. Der gezogene Rosen-König wird deshalb zurück auf den Stapel gelegt. Die "Ziehung" besteht also aus den folgenden drei Karten: **Schellen-Bauer, Rosen-7, Eichel-Ass**.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht eine "Ziehung" aus zwei Karten?
- Zeichne einen möglichst einfachen Baum, welcher die Situation für "Ziehungen" mit einer, zwei, drei oder vier gezogenen Karten wiedergibt.
- Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Karten, welche zu einer "Ziehung" gehört. Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X sowie ihren Erwartungswert $E(X)$.
- Welches der beiden folgenden Ereignisse ist wahrscheinlicher:
 - Eine "Ziehung" besteht aus **vier Nummernbildern**.
 - Eine "Ziehung" besteht aus **zwei Königen**.

15 Punkte (3 / 3 / 5 / 4)

Grundlagenfach Mathematik

Stoffübersicht: Maturitätsprüfung mündlich

ANALYSIS

1. Begriff der Funktion
Summe, Differenz, Produkt, Quotient zweier Funktionen
Zusammensetzung von Funktionen, Umkehrfunktionen
2. Spezielle Funktionen: Polynomfunktionen, rationale Funktionen,
Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen,
trigonometrische Funktionen
3. Folgen und Reihen
Konvergenz von Folgen und Reihen, wichtige Grenzwerte
4. Grenzwerte von Funktionen
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
5. Ableitungsregeln: Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel
6. Kurvendiskussion für Funktionen und Funktionenscharen
7. Extremalaufgaben
8. Integralrechnung:
Flächeninhaltsfunktionen, Integralfunktionen
Stammfunktionen, unbestimmte Integrale
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Bestimmte Integrale
Uneigentliche Integrale
Flächen- und Volumenberechnungen

Klasse 4f

Mathematik
mündlich

Hans Heinrich Huwiler

KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1. Variationen und Kombinationen
2. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
3. Mehrstufige Zufallsversuche
Multiplikationssatz, bedingte Wahrscheinlichkeit
4. Geometrische Wahrscheinlichkeiten
5. Zufallsvariablen, Verteilungen, Erwartungswerte
6. Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung

VEKTORGEOMETRIE

1. Vektoren im ebenen und räumlichen Koordinatensystem
2. Vektoroperationen: Summe, Vielfaches, Skalarprodukt, Vektorprodukt
3. Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in Parallelprojektion
4. Vektorgleichung einer Geraden
Vektorgleichung und Koordinatengleichung einer Ebene
5. Abstandsprobleme, Parallelität, Normalität, Winkel