

Studienwoche Mathematik

Aus der Welt der Mathematik

ETH-Studienwochen für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten
Montag, 3. bis Freitag, 7. Juni 2024

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie: Vom Flickwerk zur Sensation

Es leuchtet ein, dass man ausgehend von Nichts auch nichts beweisen kann. Jede mathematische Theorie ist aufgebaut auf einem Fundament von Grundannahmen, einem sogenannten Axiomen System. Anhand des von Euklid (um 300 v.Chr.) eingeführten Axiomen Systems für die Geometrie studieren wir diesen Begriff ausführlich.

Nach Euklid haben Mathematiker:innen während Jahrhunderten vergeblich versucht zu zeigen, dass Euklid an einer gewissen Stelle (Stichwort Parallelenaxiom) ein Fehler unterlaufen ist. Noch anfangs des 19. Jahrhunderts beschwor ein durch seine diesbezüglichen, ebenso intensiven wie erfolglosen, Bemühungen völlig verzweifelter Mathematiker seinen Sohn in dramatischen Worten, sich auf gar keinen Fall auf diese Frage einzulassen. Aber der Sohn (J. Bolyai), wie das halt vorkommt, missachtete den väterlichen Rat. Wir vollziehen nach, wie er schliesslich, neben anderen Mathematikern (N. Lobatschewski, C.F. Gauss), in der zur Diskussion stehenden Frage zu völlig neuen, überraschenden Erkenntnissen kam, welche die Frage nicht nur abschliessend klärten, sondern dabei Tore zu völlig neuen mathematischen Welten öffneten.



Max Ernst. Junger Mann beunruhigt durch den Flug einer nichteuklidischen Fliege.

M.C. Escher. Circle Limit 3 (Modell einer nichteuklidischen Geometrie).
Zum Parallelenaxiom: Parallel oder schneidend – was jetzt?

Kuriositäten der Unendlichkeit

Gerade hat in Zürich ein aufsehenerregendes neues Grand Hotel eröffnet. Das Besondere daran: Es hat unendlich viele Zimmer! Innerhalb kürzester Zeit haben sich unendlich viele Gäste aus aller Welt angemeldet, und alle Zimmer sind bereits belegt. Dennoch werden neue Besucher nicht abgewiesen, für jeden weiteren Gast kann ein Zimmer frei gemacht werden. Wie ist das möglich?

Mit diesen und ähnlichen Fragen über die Kuriositäten der Unendlichkeit wollen wir uns im Kurs beschäftigen. Wir werden zunächst den Begriff der Mächtigkeit von Mengen kennenlernen und sehen, dass zwei unendlich grosse Mengen nicht notwendigerweise gleich mächtig sein müssen, mehr noch, dass es sogar unendlich viele Abstufungen der Unendlichkeit gibt. Dies führt zu einigen überraschenden, teils paradox erscheinenden Ergebnissen. So kann man zum Beispiel zeigen, dass es „viel mehr“ reelle Zahlen als rational Zahlen gibt.

Ausserdem wollen wir uns mit einigen klassischen Paradoxien beschäftigen. Unter anderem werden wir eine unendlich lange Trompete kennen lernen, die man mit endlich viel Farbe füllen, aber nicht mit endlich viel Farbe von aussen bemalen kann.



Kryptographie und Zahlentheorie

Wie hat eigentlich Caesar mit seinen Freunden kommuniziert? Sicher hat er nicht einfach Briefe geschrieben, die man ohne weiteres lesen konnte. Dann wäre die Gefahr zu gross gewesen, dass Feinde seine Boten abgefangen hätten und so der Inhalt der Briefe bekannt geworden wäre. Daher hat Caesar seine Post verschlüsselt (allerdings nicht sehr gut, wie wir in diesem Kurs lernen werden). Seit den alten Römern hat sich viel getan, und die sichere Verschlüsselung von Nachrichten und Daten ist in unserer digitalisierten Welt immer wichtiger geworden. Wer will schon, dass alle unsere Selfies anschauen oder unseren Kontostand sehen können?

Die heute üblichen Kryptoverfahren beruhen zum grossen Teil auf klassischen Ergebnissen der Zahlentheorie. In diesem Kurs werden wir uns mit klassischen Verfahren, wie der Caesar- und der Vigenère-Chiffre, aber auch aktuell relevanten Kryptosystemen, wie dem RSA-Verfahren, beschäftigen. Dabei werden wir auch die mathematischen Grundlagen aus der Zahlentheorie kennenlernen, und verschiedene Angriffe auf Kryptoverfahren diskutieren und durchführen.

Hinweis: Wir werden für den Kurs keine Vorkenntnisse in Zahlentheorie oder im Programmieren voraussetzen.



Kontakt: ETH Zürich, Studentische Dienste
Gaby Kläy
HG F 69.3
Rämistrasse 101
8092 Zürich

Telefon: +41 44 632 60 51
gaby.klaey@sts.ethz.ch
www.ethz.ch/studienwochen