Kantonsschule Solothurn

Maturaarbeit

N12d

Die Legendre Vermutung

Autor:
Beat Zurbuchen

Betreuer:
Marco Manni

Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie Primzahlen verteilt sind und untersucht dabei regelmässige Primzahlverteilungen. Es wird mit einem Beweis des Bertrandschen Postulats, welches besagt dass zwischen n und $2n$ immer eine Primzahl liegt, angefangen, welches die Konzepte gut illustriert. Es werden dann fortführende Konzepte vorgestellt mit welchen eine Konzeption eines Beweises der Legendreschen Vermutung, welche annimmt dass zwischen n^2 und $(n+1)^2$ immer eine Primzahl liegt, durchgeführt wird. Als Bereicherung werden auch weitere, eigene Beweise aufgeführt unter anderem ein Beweis der Ramanujan-Primzahlen.

1 Einleitung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welche Ansätze ich zum Beweis der Legendreschen Vermutung anstellen kann. Diese behauptet, dass zwischen n^2 und $(n+1)^2$ immer eine Primzahl liegt. Mithilfe von numerischen Berechnungen[4] ist es möglich zu zeigen, dass für jedes $n < 10^9$ immer 2 Primzahlen in diesem Intervall liegen. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dass die Legendresche Vermutung wahr ist. Das aufkommende Problem sind anormale Intervalle, welche viel weniger oder keine Primzahlen besitzen.

Um einen besseren Einstieg zu bieten wird noch ein Beweis des Bertrandschen Postulats erläutert. Das Bertrandsche Postulat besagt, dass zwischen n und $2n$ immer eine Primzahl liegt. Für diese Intervalle gibt es keine anormalen Intervalle, dies wird durch die Existenz von Ramanujan-Primzahlen bestätigt.

1.1 Notationen

Hier sollen noch notatorische Dinge eingeführt werden. n und griechische Buchstaben sind immer $\in \mathbb{N}$ und es sei $x \in \mathbb{R}, x > 0$. p ist immer eine Primzahl.

2 Bertrands Postulat

Als erstes soll in dieser Arbeit das Bertrandsche Postulat[1] behandelt, respektive bewiesen werden. Das Bertrandsche Postulat besagt, dass es für jede natürliche Zahl n ein p gibt, so dass $n \leqslant p < 2n$ gilt. Joseph Bertrand stellte 1845 diese Behauptung auf und bewies sie für alle $n < 3'000'000$. Pafnuti L. Tschebyschew, ein bedeutender Mathematiker seiner Zeit, bewies 1850 das Bertrandsche Postulat für alle Zahlen. 1919 bewies Srinivisa Ramanujan die Existenz sogenannter Ramanujan-Primzahlen, auf welche später eingegangen wird. Paul Erdős lieferte 1932 einen einfacheren Beweis für alle n, mit welchem wir uns in diesem Kapitel beschäftigen werden. Dieser basiert auf einem indirekten Beweis. Man schätzt den Binomialkoeffizienten

$\binom{2n}{n}$ gegen oben und unten ab und kann dann zeigen, dass dieser ohne Primzahlen zwischen n und $2n$ zu klein wäre.

2.1 Summe von Binomialkoeffizienten

Die Summe $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ stellt die Anzahl Möglichkeiten dar, eine Gruppe mit einer Grösse $\leqslant n$ aus n Personen zu bilden. Betrachtet man dieses Problem aus einer anderen Sichtweise, könnte man auch sagen, dass jede Person entweder in einer Gruppe ist oder nicht, also zwei Möglichkeiten hat. Diese andere Sichtweise liefert das Resultat 2^n. Da beide Terme dasselbe Ergebnis haben müssen folgt

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n. \tag{1}$$

Als Beispiel nehme man $n = 4$

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

An diesem Beispiel sieht man auch, dass Binomialkoeffizienten zuerst steigen bis sie in der Mitte der Reihe sind und dann wieder sinken. Dies ist unter anderem eine Folge des Dualismus der Binomialkoeffizienten, welcher besagt, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. [1]

2.2 Abschätzung von Binomialkoeffizienten

Mithilfe dieser Überlegungen kann man nun Binomialkoeffizienten abschätzen. Zuerst soll $\binom{2n+1}{n+1}$ nach oben abgeschätzt werden. Es ist offensichtlich, dass dieser Binomialkoeffizient Summand der Summe $2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}$ ist. Aufgrund des Dualismus weiss man nun, dass dieser Binomialkoeffizient 2 mal vorkommen muss, also wird $\frac{\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}}{2} \geqslant \binom{2n+1}{n+1}$ gelten. Setzt man (1) ein folgt

$$\frac{2^{2n+1}}{2} = 4^n \geqslant \binom{2n+1}{n+1}. \tag{2}$$

Einen ähnlichen Ansatz verwendet man beim unteren Abschätzen von $\binom{2n}{n}$. Wiederum ist $\binom{2n}{n}$ Teil der Summe $2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$. Da $\binom{2n}{n}$ der grösste Summand ist wird er bestimmt grösser sein als der Durchschnitt der Summanden. Für $n \geqslant 1$ ist es möglich die Summanden $\binom{2n}{0}$ und $\binom{2n}{2n}$ zusammenzufassen, da $\binom{2n}{n} \geqslant 2 = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}$ gilt[2]. Folglich wird die obige Beobachtung bei der Betrachtung von $2n$ Summanden anstatt von $2n+1$ nicht verletzt und es folgt

$$\frac{2^{2n}}{2n} = \frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n}. \tag{3}$$

[1] Dies wird klar wenn man beide Binomialkoeffizienten ausschreibt.
[2] Mit $\binom{2n+2}{n+1} > \binom{2n}{n}$ und $\binom{2}{1} = 2$ induktiv beweisbar.

2.3 Der Satz von Legendre

Der Satz von Legendre beantwortet die Frage, wie oft ein Primfaktor in $n!$ vorkommt. Ein Primfaktor kommt in einem Produkt so oft vor, wie er in den Faktoren vorkommt. Man nehme $35 \cdot 20$ als Beispiel. Die Primfaktorzerlegungen sind $35 = 5 \cdot 7$ und $20 = 2^2 \cdot 5$, also ist das Produkt $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 700$. Man kann die Primfaktoren also aufaddieren und erhält das richtige Resultat. Dasselbe Prinzip kann man bei Fakultäten anwenden, indem man die Anzahl Primfaktoren zählt. Man nehme zum Beispiel 35!. Ohne die Fakultät auszurechnen weiss man nun, dass 17 zwei mal in der Primfaktorzerlegung vorkommt, da 17 und 34 Faktor sind. Wollen wir jedoch einen Primfaktor bestimmen, welcher $\leqslant \sqrt{n}$, so werden wir nur ansatzweise auf diese Weise vorgehen können. Wollen wir zum Beispiel auszählen, wie oft $p \leqslant \sqrt{n}$ vorkommt, so wird p^2 nicht nur 1 p sondern 2 p zur Primfaktorzerlegung hinzufügen. Sollte also ein Primfaktor $p^k \leqslant n, k \in \mathbb{N}$, erfüllen, so muss man diesen mindestens k mal zählen.

Um dies nun in einem Term auszuzählen muss man wissen, wie oft die Faktoren ein Vielfaches von p sind. Offensichtlich ist jede p-te Zahl, zum Beispiel $2p$, ein Vielfaches von p. Ist n also zum Beispiel ein 3.5-faches von p, so wird p 3-mal vorkommen, da $p < 2p < 3p < n$. Also kommt p ungefähr $\frac{n}{p}$-mal vor. Für das genaue Resultat muss man $\frac{n}{p}$ abrunden. Dieses Abrunden wird durch die Gauss'sche Klammer signalisiert: $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$. Wir können nun den Satz von Legendre definieren:

Eine Primzahl p kommt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{p^k \leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

mal in $n!$ vor.

Das Problem, dass man $p^j, j \in \mathbb{N}$, j-mal auszählen muss, ist hier ebenfalls gelöst da p^j bei $k = 1, k = 2, \ldots, k = j$ immer jeweils einmahl gezählt wird, insgesamt also j-mal. Dass man die Summe unendlich lang weiterführen kann liegt daran, dass wenn $p^k > n$, dann $\frac{n}{p^k} < 1$. Rundet man eine positive Zahl < 1 ab, so wird diese stets Null, besitzt damit also keinen Einfluss auf die Summe mehr. Die zweite Notation will sagen, dass man alle $k \geqslant 1$ verwenden soll, für welche $p^k \leqslant n$ gilt.

Es seien noch folgende Ungleichungen zur Gauss'schen Klammer erwähnt, da sie im Verlauf der Arbeit noch verschiedene Male verwendet werden:

$$n - 1 < \lfloor n \rfloor \leqslant n. \tag{4}$$

2.4 Obere Abschätzung des Produkts von Primzahlen

Mit den Erkenntnissen über Binomialkoeffizienten kann man nun mithilfe von Induktion

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^{n-1} \tag{5}$$

beweisen. Da eine gerade Zahl nie prim ist (bis auf 2) weiss man, dass das Produkt aller Primzahlen $\leqslant 2n+1$ dasselbe ist wie das Produkt aller Primzahlen $\leqslant 2n+2$, da die gerade Zahl $2n+2$ nie prim sein kann. Deshalb reicht es aus, wenn die Abschätzung für alle ungeraden Zahlen bewiesen wird.

Den Induktionsanfang ist für $n \leqslant 4$ bereits erledigt, da alle Zahlen prim sein können ohne dass die Abschätzung falsch wäre, da jeder Faktor $\leqslant 4$ ist.

Nun soll das Produkt aller Primzahlen $\leqslant 2n+1$ umgeschrieben werden zu

$$\prod_{p \leqslant 2n+1} p = \prod_{p \leqslant n+1} p \cdot \prod_{n+1 < p \leqslant 2n+1} p.$$

Dieses Vorgehen ist ein Aufspalten des Produkts. Nun kann angenommen werden, dass die Abschätzung für alle Zahlen $< 2n+1$ gilt. Somit ist es kein Problem mehr $\prod_{p \leqslant n+1} p$ gegen oben abzuschätzen, da wir bereits eine Abschätzung haben, nämlich 4^n.

Nun gilt es lediglich noch einen Term zu finden, welcher bestimmt grösser ist als das Produkt aller Primzahlen $n+1 < p \leqslant 2n+1$. Dazu verwenden wir den Binomialkoeffizienten $\binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$. Betrachtet man nämlich die Schreibweise mit den Fakultäten, so wird ersichtlich, dass $(2n+1)!$ alle gesuchten Primzahlen enthält. Der Zähler jedoch besitzt keiner all jener Primzahlen als Faktor, da er nur aus Zahlen $\leqslant n+1$ besteht, daher muss er das gesuchte Primzahlenprodukt enthalten. Der Binomialkoeffizient $\binom{2n+1}{n+1}$ kann deshalb als obere Abschätzung des bisher unbekannten Produkts verwendet werden.

Unter Beachtung dieser Ergebnisse und (2) ergibt sich der Einzeiler

$$\prod_{p \leqslant 2n+1} p = \prod_{p \leqslant n+1} p \cdot \prod_{n+1 < p \leqslant 2n+1} p < 4^n \cdot \binom{2n+1}{n+1} \leqslant 4^n 4^n = 4^{2n}.$$

Somit ist die Induktion vollständig.

2.5 Primfaktorzerlegung von $\binom{2n}{n}$

Da $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}$ folgt aus dem Satz von Legendre, dass ein Primfktor p

$$\sum_{k=1}^{p^k \leqslant 2n} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Mal in $\binom{2n}{n}$ vorkommt. Das man das Doppelte der Primfaktoren von $n!$ subtrahiert liegt am Quadrat von $n!$ im Binomialkoeffizienten und der Division, denn eine Division bewirkt das genaue Gegenteil einer Multiplikation bezüglich Primfaktoren, die Wegkürzung von Primfaktoren. Formt man diesen Term mit den Ungleichungen (4) um, so folgt

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor &< \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2 \\
\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor &> \left(\frac{2n}{p^k} - 1\right) - \frac{2n}{p^k} = -1.
\end{aligned}$$

Jeder der Summanden ist also entweder 0 oder 1, da eine natürliche Zahl γ, welche $-1 < \gamma < 2$ erfüllt, 0 oder 1 sein muss.

Diese Primzahlen, welche sicher nur einmal als Summand vorkommen werden, also jene für welche $p > \sqrt{2n}$ gilt, werden deshalb nur einmal Primfaktor des Binomialkoeffizienten sein können.

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass der Binomialkoeffizient keine p teilt, für welche $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ gilt. Formt man die Ungleichung um, so sieht man, dass $3p > 2n$. Weiter ist $\frac{4}{3}n < 2p \leqslant 2n$ und $p < n$. p wird also je zwei mal im Zähler und im Nenner des Binomialkoeffizienten auftauchen und sich somit wegkürzen.

Nun stellt sich die Frage, wie oft ein Primfaktor $p \leqslant \sqrt{2n}$ im Binomialkoeffizienten vorkommt. Der Primfaktor wird so oft gezählt, wie das maximale k, welches die Gleichung $p^k \leqslant 2n$ erfüllt. Denn sollte $p^k > 2n$ zutreffen, so ist $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Jeder Summand ist maximal 1, also wird die maximale Potenz von p das maximale k sein, für welches $p^k = 2n$ gilt.

2.6 Abschluss des Beweises

Nun kann man all diese Erkentnisse zusammenfassen zu:

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n \prod_{\sqrt{2n} \leqslant p \leqslant \frac{2}{3}n} p \prod_{n \leqslant p < 2n} p$$

Die untere Abschätzung ist (3) und benötigt keine weitere Erklärung. Die obere Abschätzung jedoch ist spannend, da sie verschiedene Aspekte vereint. Im ersten Produkt wird die Anzahl Summanden des Satzes von Legendre ausgenutzt. Die Potenz von p im Binomialkoeffizienten ist aufgrund jenes Satzes nämlich maximal so gross, dass $p^k = 2n$. Also wird jede Primzahl als Faktor nicht mehr als $2n$ beitragen. Weiter haben wir gezeigt, dass jede Primzahl $p > \sqrt{2n}$ nur einmal als Primfaktor vorkommen kann, woraus folgt, dass das Produkt aller Primzahlen bis $\frac{2}{3}n$ verwendet werden kann.

Im nächsten Schritt folgt der indirekte Beweis. Nehmen wir an es gäbe keine Primzahlen zwischen n und $2n$, so folgt unter Verwendung von (5)

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}.$$

Untersucht man diese Ungleichung jedoch, so fällt auf, dass diese für alle $n > 467$ gar nicht stimmt[3]. Die Annahme, dass es zwischen n und $2n$ keine Primzahlen gibt, ist also für alle $n > 467$ falsch.

Nun kann man mit einer kleinen Liste von Primzahlen die Lücke von 2 bis 467 auffüllen und der Satz von Bertrand ist bewiesen. Bei der Liste wird der sogenannte Landau-Trick verwendet. Man verwendet eine Reihe von Primzahlen $h_k, h_k \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$, für welche $h_{k+1} \leqslant 2h_k$ gilt. Unter Beachtung dieser Reihe gilt das Bertrandsche Postulat für jedes n welches kleiner ist als das grösste h_k der Liste. Unter Beachtung der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631 gilt das Bertrandsche Postulat also für alle $n > 1$. □

2.7 Ramanujan-Primzahlen

Ramanujan zeigte mit seinem Beweis zum Bertrandschen Postulat weit mehr als nur das fortwährende Vorhandensein mindestens einer Primzahl zwischen n und $2n$. Er bewies die Existenz sogenannter Ramanujan-Primzahlen[2], wobei man die n-te Ramanujan Primzahl mit R_n bezeichnet. Für jedes $\gamma \geqslant R_n$ gilt, dass zwischen γ und $\frac{\gamma}{2}$ immer mindestens n Primzahlen liegen[4]. Man nehme als Beispiel die zweite Ramanujan-Primzahl 11. Nun kann man mit Bestimmtheit sagen, dass es zwischen 15 und 7.5 mindestens 2 Primzahlen gibt, da 15 grösser ist als 11, der zweiten Ramanujan-Primzahl.

3 Legendres Vermutung

Die Legendresche Vermutung[3] wurde von Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) aufgestellt und besagt, dass zwischen 2 Quadratzahlen immer mindestens eine Primzahl liegt. Es gibt also für jedes n mindestens ein p sodass $n^2 < p < (n+1)^2$ gilt. Obwohl die Vermutung bereits seit vielen Jahren besteht ist sie immer noch unbewiesen. Aufgrund numerischer Berechnungen[4] weiss man jedoch, dass die Vermutung für alle $n < 10^9$ wahr ist. Man weiss auch, dass im Intervall $[n^2, (n+1)^2]$ immer eine Primzahl oder eine Semiprimzahl liegt. Eine Semiprimzahl ist eine Zahl der Form $p_1 \cdot p_2$, also eine Zahl mit nur 2 Primfaktoren.

Die Legendresche Vermutung ist eines der vier Landau-Probleme[5]. Diese wurden 1912 in Cambridge von Landau als "unangreifbare" Probleme ausgerufen und handeln allesamt von Primzahlen. Sie sind jedoch nach wie vor ungelöst. Dafür ist jedoch nicht das fehlende Interesse verantwortlich sondern die unglaubliche Hartnäckigkeit mit welcher sich diese Probleme

[3] Siehe 10.2.1 für Beweis dieser Aussage.

[4] Ramanujan verwendete das Intervall $]n, n/2[$.

jedem Lösungsversuch widersetzen.[5]

3.1 Beweisidee

Die basale Beweisidee baut auf der Beweisidee des Bertrandschen Postulats auf. Doch werden wir in diesem Versuch keine Binomialkoeffizienten verwenden, denn betrachtet man die Primfaktorzerlegung des Binomialkoeffizienten $\binom{(n+1)^2}{n^2}$, so ergeben sich keine bemerkenswerte Regelmässigkeiten. Die Primfaktorzerlegung wäre viel zu komplex.

Stattdessen wird eine Optimierungsüberlegung fokussiert. Dafür wird ein Ausdruck benötigt, welcher ohne Primzahlen zwischen n^2 und $(n+1)^2$ um einiges zu klein wäre, damit eine Beweisskizze auch nur ansatzweise funktionieren kann. Dies gestaltet sich bedeutend schwieriger als erwartet, denn oftmals geschieht es, dass die Primzahlen im gewünschten Intervall zwar an Bedeutung gewinnen, jedoch geschieht dies mit vielen anderen Primzahlen ebenfalls, sodass die gewünschten Primzahlen in der Masse untergehen.

Die zweite Optimierungsüberlegung stellt sich aufgrund der Abschätzungen, welche wir verwenden werden. Die Primfaktorzerlegung darf nicht zu komplex sein, denn durch Verwenden von mehreren Abschätzungen[6], welche essentiell sind für die Beweisidee[7], vervielfacht sich der Fehler, den diese mit sich tragen. Die Abschätzungen werden im nächsten Kapitel diskutiert.

Schliesslich ist der optimale Term

$$\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}.$$

Dieser enthält alle Primzahlen zwischen n^2 und $(n+1)^2$ einmal und ist mithilfe der Stirlingformel, welche im Verlauf der Arbeit eingeführt wird, für grosse n fast fehlerlos abschätzbar.

3.2 Primfaktorzerlegung

3.2.1 Allgemeine Überlegung und Abschätzung

Wichtig für die folgenden Überlegungen ist, dass wir den Term $\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}$ gegen oben abschätzen wollen, da wir am Ende dieser Beweisskizze die Primzahlen zwischen $(n+1)^2$ und n^2 abziehen wollen um einen zu kleinen Term zu erhalten. Würden wir den Term gegen unten abschätzen, so ist die Abschätzung schon vor Abzug jener Primzahlen zu klein.

Betrachten wir den Term $\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}$, so muss nach dem Satz von Legendre ein Primfaktor

[5] Man betrachte hier die numerischen Berechnungen, welche zu diesen Problemen erbracht wurden

[6] Um komplexe Primfaktorzerlegungen abzuschätzen, benötigt man extrem viele Abschätzungsterme wie später noch ersichtlich wird

[7] Man betrachte hierzu die Abschätzungen des Primzahlprodukts

p

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{p^k} \right\rfloor$$

Mal vorkommen. Schätzen wir einen Summanden mithilfe von (4) gegen oben ab, so erhalten wir

$$\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{p^k} \right\rfloor < \frac{(n+1)^2}{p^k} + 1 - \frac{n^2}{p^k} = \underbrace{\frac{2n+1}{p^k} + 1}_{\text{Obere Abschätzung}}.$$

3.2.2 Anwendung der Abschätzung

Nun soll dieser Term abgeschätzt werden. Dazu stellt man zuerst die Ungleichung

$$\gamma \leqslant \frac{2n+1}{p^k} + 1 < \gamma + 1.$$

auf. Alle p^k die diese Ungleichung erfüllen, können nicht mehr als γ mal vorkommen. Dies liegt daran, dass die Abschätzung eine Obere ist und vor dem Abschätzen eine natürliche Zahl war. Die Abschätzung wird auf eine Genauigkeit von 1 eingeschränkt und da der Term bestimmt grösser ist als das tatsächliche Resultat kann man für eine obere Abschätzung annehmen, dass sie γ ist. Umformen der Ungleichung ergibt

$$\sqrt[k]{\frac{2n+1}{\gamma-1}} \geqslant p > \sqrt[k]{\frac{2n+1}{\gamma}}.$$

Wir haben also Intervalle für Primzahlen geschaffen, welche etwas über die Häufigkeit der Primzahlen im Ausdruck $\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}$ aussagen.

Es gibt jedoch den Spezialfall $\gamma = 1$. Wir wissen, dass nur Primzahlen $p^k \leqslant (n+1)^2$ vorkommen können. Also verwenden wir $p \leqslant \sqrt[k]{(n+1)^2}$ als obere Grenze und für die untere Grenze verwenden wir die in der Abschätzung verwendete Grenze für $\gamma = 1$, also $\sqrt[k]{\frac{2n+1}{2}}$.

Es stellt sich nur noch die Frage, welche k und γ betrachtet werden müssen. k fängt bei 1 an und hört bei ∞ auf, da für genügend grosse k keine Primzahlen mehr in den Intervallen sind. Ähnlich gehen wir bei γ vor, aber wir müssen den Spezialfall $\gamma = 1$ ausschreiben.

Fasst man all dies zusammen, erhält man

$$\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!} < \prod_{k=1}^{\infty} \overbrace{\left(\underbrace{\prod_{(n+1)^{2/k} \geqslant p > \sqrt[k]{2n+1}} p}_{\text{Spezialfall } \gamma = 1} \cdot \underbrace{\prod_{\gamma=2}^{\infty} \left(\prod_{\sqrt[k]{\frac{2n+1}{\gamma-1}} \geqslant p > \sqrt[k]{\frac{2n+1}{\gamma}}} p^{\gamma} \right)}_{\text{Allgemeiner Fall für } \gamma \geqslant 2} \right)}^{\text{Wird für jedes mögliche } k \text{ durchlaufen}}. \tag{6}$$

4 Abschätzungen und Primzahlfunktionen

In diesem Kapitel sollen die benötigten Mittel vorgestellt werden, um (6) abzuschätzen. Dabei wird vor allem auf die Herkunft von Abschätzungen eingegangen.

4.1 Summen von Primzahlfunktionen

Aus [6] haben wir

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \backsim \int_2^x \frac{f(x)}{\ln(x)} dx. \tag{7}$$

Dabei ist $\backsim$ ein Symbol aus der Analysis. Es meint, dass das Verhältnis zwischen der rechten und der linken Seite gegen 1 konvergiert.

Als Beispiel dazu nehme man[8] $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $g(x) = \frac{e^x}{2}$. Nun weiss man, dass $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} = 1 - e^{-2x}$. Da e^{-2x} zu 0 konvergiert weiss man also, dass das Verhältnis der Funktionen gegen 1 konvergiert, also kann man $f(x) \backsim g(x)$ schreiben oder auch

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}e^x - e^{-x}}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Da das Verhältnis gegen 1 konvergiert, kann man das Integral als Abschätzung für Primzahlfunktionen verwendet werden. Zu beachten ist jedoch, dass noch ein Fehlerterm, für welchen es Tabellen gibt, angehängt werden muss, da der Satz nur eine Ahnung davon gibt, wie sich Primzahlfunktionen verhalten. Das Herausfinden dieser Fehlerterme ist sehr anspruchsvoll und führt im Endeffekt zur Riemannschen Vermutung, welche das grösste Problem der Zahlentheorie darstellt. So war es nicht einmal Ramanujan, dem wohl grössten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, möglich, die Riemannsche Vermutung zu lösen.

4.1.1 Divergenz der Summe aller Primzahlinversen

Nun wollen wir diesen Satz anwenden. Die Summe aller Primzahlinversen meint

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \right).$$

Setzen wir $f(x) = \frac{1}{x}$ so erhalten wir mit (7) und Integration durch Substitution

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \backsim \int_2^x \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln|\ln(x)| - \ln\ln 2.$$

Wir wissen also, dass wenn x gegen $+\infty$ strebt, dass dann $\ln|\ln(x) - \ln\ln 2$ zur Summe aller Primzahlinversen ein Verhältnis von 1 hat. Es ist also nicht möglich, dass eine der

[8] $f(x) = \sinh(x)$

Terme divergiert ohne dass der andere auch divergiert, da das Verhältnis sonst nicht 1 sein könnte. Wir wissen also, dass $\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}$ und $\ln|\ln(x)| - \ln\ln 2$ das gleiche Grenzwertverhalten besitzen. Um die Divergenz der Summe zu beweisen, müssen wir also nur noch zeigen, dass $\ln|\ln(x)| - \ln\ln 2$ divergiert. Dabei substituiere man mit $x = e^{e^k}$ und man erhält

$$\lim_{k\to+\infty}(\ln|\ln(e^{e^k})| - \ln\ln 2) = \lim_{k\to+\infty}(k - \ln\ln 2) \to +\infty.$$

□

Hier noch eine Anmerkung zu diesem Satz. Man weiss, dass die Summe aller Quadratinversen nicht divergiert, also einen Grenzwert besitzt[9], während die Summe der Primzahlinversen keinen besitzt. Es scheint also mehr Primzahlen als Quadratzahlen zu geben. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Legendre Vermutung wahr ist.

Weiter ist nach [6] bekannt, dass

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p\leqslant n} 1/p - \ln(\ln(n))\right)$$

konvergiert.

4.2 Primzahlfunktionen

Um sich das Leben zu vereinfachen, definierten Zahlentheoretiker mehrere Funktionen[8]. Die für diese Arbeit 3 wichtigen Primzahlfunktionen sind

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1$$
$$\vartheta(x) = \sum_{p\leqslant x} \ln(p)$$
$$\psi(x) = \sum_{p^k\leqslant x} \ln(p^k).$$

$\pi(x)$ meint die Funktion, welche die Anzahl Primzahlen $\leqslant x$ zurückgibt.

$\vartheta(x)$ ist die erste sogenannte Tschebyschow-Funktion und meint die Summe der logarithmierten Primzahlen. Wichtig ist, dass $e^{\vartheta(x)}$ dem Produkt aller Primzahlen $\leqslant x$ entspricht.

Die zweite Tschebyschow-Funktion ist $\psi(x)$, welche die höchste logarithmierte Potenz aller p, welche kleiner als x sind, aufsummiert. Dabei wird bei jeder Primzahl kleiner als x die grösstmögliche Potenz genommen. So ist zum Beispiel $\psi(9) = \ln(2^3) + \ln(3^2) + \ln(5) + \ln(7) \approx 7.832$.

[9] Dieser ist $\frac{\pi^2}{6}(= \zeta(2))$

4.2.1 Eigenschaften der Primzahlfunktionen

Hier sollen einige für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften der Primzahlfunktionen vorgestellt werden.

Oftmals will man nicht alle Primzahlen $\leqslant x$ betrachten, sondern zum Beispiel alle Primzahlen in einem Intervall. Will man zum Beispiel die Anzahl der Primzahlen im Intervall von $2x$ bis x wissen, so muss man $\pi(2x) - \pi(x)$ verwenden. Dies ist möglich, da alle Primzahlen $\leqslant 2x$ ohne die Primzahlen $\leqslant x$ den Primzahlen zwischen $2x$ und x entsprechen. Als Beispiel setze man $x = 5$. Primzahlen $\leqslant 2 \cdot 5 = 2, 3, 5, 7$, während die Primzahlen $\leqslant 5 = 2, 3, 5$. Die Anzahl Elemente in der Menge der Primzahlen, welche nur in $2x$ aber nicht in x vorkommen, entspricht also $1 = \pi(10) - \pi(5)$. Dasselbe Prinzip kann man auf $\vartheta(x)$ anwenden, bei $\psi(x)$ wird dieses Prinzip jedoch (fast) nicht verwendet[10].

Im Folgenden soll eine Gleichung zwischen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ hergeleitet werden. Dabei ist wichtig, dass jede Primzahl p so oft vorkommt wie möglich. Ist eine Primzahl also kleiner als $\sqrt{x}$, so muss sie mindestens 2 mal vorkommen, da dann p^2 kleiner als x ist. Allgemeiner formuliert kann man sagen, dass jede Primzahl $\leqslant \sqrt[k]{x}, k \in \mathbb{N}, k$ mal vorkommen muss, da unter dieser Ungleichung $p^k \leqslant x$ gilt. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(\sqrt[k]{x}). \tag{8}$$

Nun überlege man sich was beim Bilden der Summe passiert. Im ersten Schritt wird jede Primzahl $\leqslant x$ dazugenommen, da diese bestimmt Teil von $\psi(x)$ sind. Im zweiten Schritt wird jede Primahl $\leqslant \sqrt{x}$ noch einmal hinzugefügt, da sie bestimmt zweimal vorkommen kann. Wir führen das Verfahren weiter, bis man alle möglichen $\vartheta(x)$ aufsummiert hat. Nimmt man zum Beispiel $x = 9$ so ergibt sich [11]

$$\psi(9) = \underbrace{\ln(2) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7)}_{=\vartheta(9)} + \overbrace{\ln(3) + \ln(2)}^{=\vartheta(3)} + \underbrace{\ln(2)}_{=\vartheta(\sqrt[3]{9})} \approx 7.832.$$

4.2.2 Abschätzung von $\pi(x)$

Mithilfe von (7) lässt sich eine erste Abschätzung machen. Diese ist

$$\pi(x) \backsim \int_2^x \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Das Problem dieser Abschätzung ist die Schwierigkeit das Integral, welches $\mathrm{Li}(x)$ genannt wird, zu berechnen. Dennoch sei angemerkt, dass diese Abschätzung extrem gut ist und für

[10] Der Leser kann sich jedoch immernoch überlegen, was gezählt wird wenn man $\psi(2x) - \psi(x)$ berechnet

[11] $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$

grosse x $\pi(x)$ fast fehlerlos abschätzt. Deshalb wird oft eine andere Abschätzung verwendet, welche besser ist für kleine x, für grosse x jedoch lange nicht so gut ist wie $\mathrm{Li}(x)$. Diese andere Abschätzung ist

$$\frac{x}{\ln(x)} \backsim \pi(x).$$

Diesen Zusammenhang nennt man den Primzahlsatz, welcher zuerst von Gauss vermutet wurde.

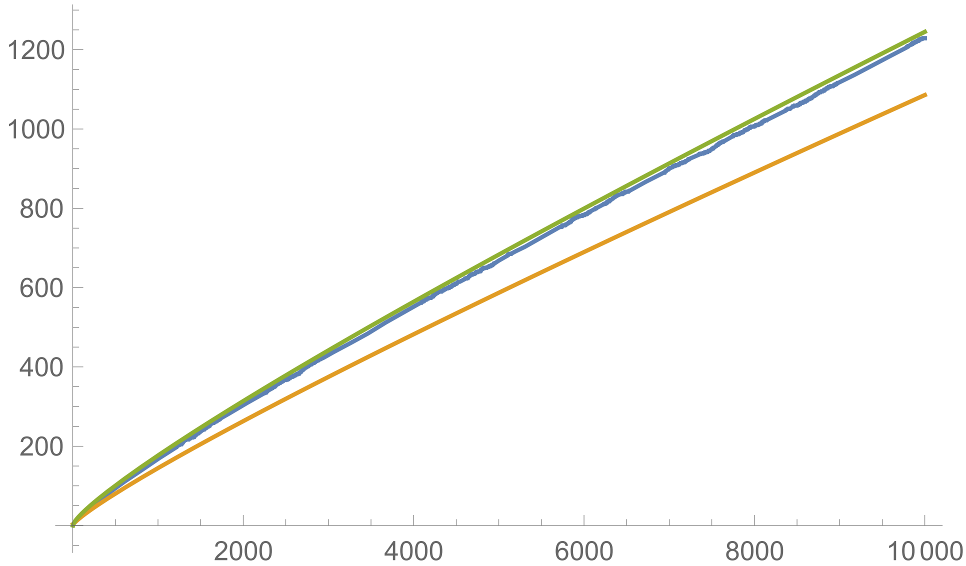

Abbildung 1: Blau: $\pi(x)$, Grün: $\mathrm{Li}(x)$, Orange: $\frac{x}{\ln(x)}$

4.2.3 Beweis des Primzahlsatzes

Zuerst wollen wir zeigen, dass $\backsim$ eine transitive Relation[12] ist. Gilt also $f(x) \backsim g(x)$ und $g(x) \backsim h(x)$ so wollen wir zeigen, dass dann $f(x) \backsim h(x)$ folgt. Nach den Grenzwertsätzen gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)g(x)}{g(x)h(x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

Somit muss $\backsim$ transitiv sein. Folglich reicht es aus zu zeigen, dass

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(x)} dx \backsim \frac{x}{\ln(x)}$$

[12] Es sei angemerkt, dass die Relation sogar eine Äquivalenzrelation ist.

gilt. Die Regel von L'Hospital besagt, dass

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wir wissen also, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_2^x\frac{1}{\ln(x)}dx}{\frac{x}{\ln(x)}}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln^2(x)}}.\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{\ln(x)}}\\&=\frac{1}{1-0}=1.\end{aligned}$$

□

4.2.4 Abschätzung von $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

$\vartheta(x)$ ist mithilfe von (7) sehr einfach abzuschätzen

$$\vartheta(x)\backsim\int_2^x\frac{\ln(x)}{\ln(x)}dx=x-2.$$

Die 2 wird jedoch weggelassen, da sie für grosse x den Einfluss verliert.

Eine andere interessante Eigenschaft wird ersichtlich, wenn man $\vartheta(x)$ durch $\ln(x)$ dividiert. Man erhält

$$\frac{\vartheta(x)}{\ln(x)}=\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln(p)}{\ln(x)}\leqslant\sum_{p\leqslant x}1=\pi(x).$$

Der Ausdruch $\vartheta(x)/\ln(x)$ ist also ungefähr $\pi(x)$. Dies ist interessant, weil dieser Ausdruck asymptotisch gleich ist zur Abschätzung aus dem Primzahlsatz. Wir werden uns diese Eigenschaft im Beweis zu den Ramanujan Primzahlen zunutze machen.

$\psi(x)$ ist wesentlich schwerer abzuschätzen. Geht man mit Gleichung (8) und der Abschätzung von ϑ vor[13] , erhält man

$$\psi(x)\backsim\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}.$$

Das Problem dieser Abschätzung ist die schiere Anzahl Summanden bei grossen x. Deshalb verwendet man als Abschätzung x. Das Verhältnis zwischen der ersten Abschätzung von $\psi(x)$ und x, der zweiten Abschätzung, ist

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1-k}{k}}.$$

Alle Summanden mit $k>1$ werden gegen 0 streben und der erste Summand ist 1. Also kann

[13] Ein genauer Beweis kann in 10.2.2 nachgelesen werden

man

$$\psi(x) \backsim x$$

schreiben. Der Graph verdeutlicht diese Relation sehr eindrücklich[14]

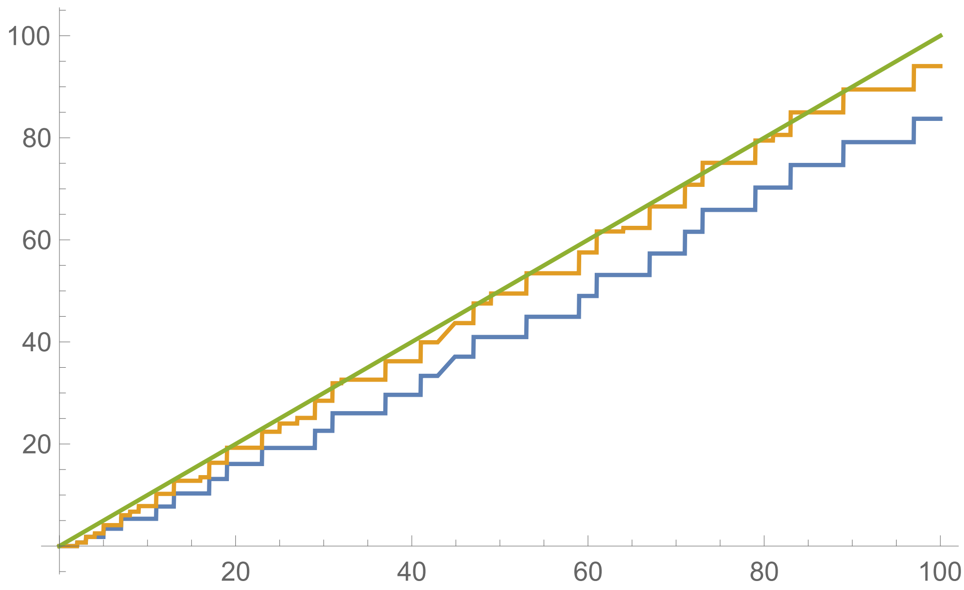

Abbildung 2: Blau: $\vartheta(x)$, Orange: $\psi(x)$, Grün: x

4.3 Die Stirling-Formel

Um $\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}$ gegen unten abzuschätzen verwenden wir die Stirling-Formel. Nach [7] haben wir für $n > 0$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Mit dieser Formel ist es Einfaches $\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!}$ gegen unten abzuschätzen. Man erhält

$$\frac{((n+1)^2)!}{(n^2)!} \geqslant \frac{(n+1)\left(\frac{(n+1)^2}{e}\right)^{(n+1)^2}}{n\left(\frac{n^2}{e}\right)^{n^2} e^{\frac{1}{12n^2}}}.$$

Durch Logarithmieren der rechten Seite erhält man [15]

$$\underbrace{\ln(n+1) + (n+1)^2(2\ln(n+1) - 1)}_{\text{Zähler}} - \overbrace{(\ln(n) + n^2(2\ln(n) - 1) + \frac{1}{12n^2})}^{\text{Nenner}}. \tag{9}$$

[14] Es war mir leider nicht möglich den Graph für grössere x als 100 zu zeichnen, da alles zu einer Linie wurde.
[15] Es wird später noch ersichtlich, wieso dass logarithmiert wird.

5 Abschluss der Beweisidee

Das Letzte das wir nun erledigen müssen um die Beweisidee abzuschliessen ist, die rechte Seite von (6) abzuschätzen.

5.1 Umschreiben von (6)

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass es sinnvoll ist, logarithmierte Summen von Primzahlen zu betrachten anstatt von Primzahlprodukten. Also müssen wir (6) logarithmieren. Wichtig ist, dass aufgrund der Definition von $\vartheta(x)$

$$\ln\left(\prod_{x_1\leqslant p<x_2} p^k\right) \leqslant \ln\left(\prod_{x_1\leqslant p\leqslant x_2} p^k\right) = k(\vartheta(x_2)-\vartheta(x_1))$$

gilt. Aufgrund dessen erhalten wir durch Logarithmieren und oberes Abschätzen von (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\vartheta((n+1)^{2/k})-\vartheta(\sqrt[k]{2n+1})}_{\text{Spezialfall}}+\overbrace{\sum_{h=2}^{\infty}h\left(\vartheta\left(\sqrt[h]{\frac{2n+1}{h-1}}\right)-\vartheta\left(\sqrt[h]{\frac{2n+1}{h}}\right)\right)}^{\text{Normalfall}}\right).$$

Nun ergibt sich ein anschaulicher Zusammenhang. Setzen wir $k=1$ und $n=3$ so erhalten wir für die Summe des Normalfalls[16]

$$\begin{aligned}\sum_{h=2}^{\infty}h\vartheta\left(\frac{7}{h-1}\right)-h\vartheta\left(\frac{7}{h}\right)&=2(\vartheta(7)-\vartheta(7/2))+3(\vartheta(7/2)-\vartheta(7/3))+4(\vartheta(7/3)-\vartheta(7/4))\\&=2\vartheta(7)+\vartheta(7/2)+\vartheta(7/3).\end{aligned}$$

Wollen wir nun den ganzen Summanden für $k=1$ berechnen, so ergibt sich

$$\vartheta(3^2)-\vartheta(7)+2\vartheta(7)+\vartheta(7/2)+\vartheta(7/3)=\vartheta(3^2)+\vartheta(7)+\vartheta(7/2)+\vartheta(7/3).$$

Diese Umformungen sind für alle k möglich. Wir können die Abschätzung also wie folgt schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta(\sqrt[k]{(n+1)^2})+\sum_{h=1}^{\infty}\vartheta\left(\sqrt[k]{\frac{2n+1}{h}}\right)\right).$$

Nun sieht der Term bereits viel ordentlicher aus. Wir können ihn jedoch noch weiter vereinfachen, was auch nötig ist, um möglichst wenige Abschätzungen verwenden zu müssen. Betrachten wir die Summe aller $\vartheta(\sqrt[k]{(n+1)^2})$ für $n=3$ so erhalten wir nach (8)

$$\vartheta(16)+\vartheta(\sqrt{16})+\vartheta(\sqrt[3]{16})+\vartheta(\sqrt[4]{16})=\psi(16).$$

[16] $\vartheta(7/4)=0$

Dies ist eine starke Verbesserung des Resultats, da wir anstatt von (in diesem Fall 4) vielen Abschätzungen von $\vartheta(x)$ einfach eine Abschätzung für $\psi(x)$ verwenden können. Nun nehmen wir ein beliebiges h und betrachten die Summe aller möglichen Normalfälle für $n = 5$. Wir erhalten nach (8)

$$\vartheta\left(\frac{11}{h}\right) + \vartheta\left(\sqrt{\frac{11}{h}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[3]{\frac{11}{h}}\right) + \vartheta\left(\sqrt[4]{\frac{11}{h}}\right) + \cdots = \psi(\frac{11}{h}).$$

Für jedes mögliche h können wir also anstatt einer grossen Anzahl von $\vartheta(x)$ ein $\psi(x)$ verwenden. Wir erhalten für die obere Abschätzung

$$\psi((n+1)^2) + \sum_{h=1}^{\infty} \psi\left(\frac{2n+1}{h}\right) = \psi((n+1)^2) + \sum_{h=1}^{n} \psi\left(\frac{2n+1}{h}\right). \tag{10}$$

Auf der rechten Seite wurde eine obere Grenze hinzugefügt, damit der Term im nächsten Schritt besser abschätzbar ist. Da die Summe bis 2 gebildet werden muss, muss die obere Grenze die grösste Zahl sein, welche $\frac{2n+1}{h} \geqslant 2$ erfüllt, was von n erfüllt wird.

5.2 Obere Schranke für Abschätzung

In diesem Kapitel wollen wir die obere Abschätzung final abschätzen. Wir haben nach [8] für $x > 0$ die folgenden Abschätzungen[17]

$$\begin{aligned} \psi(x) - \vartheta(x) &< 1.00007\sqrt{x} + 1.78\sqrt[3]{x} = f(x) \\ \psi(x) &< 1.000081x + 1.00007\sqrt{x} + 1.78\sqrt[3]{x} = g(x). \end{aligned}$$

Nun beachten wir, dass wir beim Spezialfall $\vartheta((n+1)^2) - \vartheta(n^2)$ subtrahieren werden um einen indirekten Beweis zu erlauben. Wir können folglich $\psi((n+1)^2)$ durch $(\psi((n+1)^2) - \vartheta((n+1)^2)) + \vartheta(n^2)$ ersetzen um die Primzahlen zwischen $(n+1)^2$ und n^2 zu entfernen. Dies ermöglicht eine Nutzung der Abschätzung $f(x)$ jedoch besitzten wir noch keine Abschätzung um $\vartheta(n^2)$ abzuschätzen. Aufgrund des Satzes über Primzahlen im letzten Kapitel wissen wir, dass Abschätzungen für grosse x immer wie besser werden, weshalb wir eine Abschätzung verwenden wollen, welche erst für $x^2 > 10^{18}$ gültig ist, da wir wissen, dass die Legendre Vermutung für alle $x < 10^9$ wahr ist. Für $x > 7.8 \cdot 10^9$ haben wir aus [8]

$$\vartheta(x) \leqslant x + 0.01\frac{x}{\ln^2(x)} = h(x).$$

[17] Die Abschätzung für $\psi(x)$ steht nicht direkt im Paper. Im Beweis zu Lemma 3.3 wird jedoch eine Abschätzung von $\vartheta(x)$ erwähnt, welche für die Abschätzung von $\psi(x)$ verwendet wurde.

Mithilfe dieser Abschätzungen ist (10) immer kleiner als

$$f((n+1)^2) + \sum_{h=1}^{n} g\left(\frac{2n+1}{h}\right) + h(n^2). \tag{11}$$

Hier stehen wir vor dem Problem, eine diskrete Summe abzuschätzen. Da $g(\frac{2n+1}{h})$ bei steigendem h monoton sinkt gilt für[18] $h \in \mathbb{N}, h > 1$,

$$g\left(\frac{2n+1}{h}\right) < \int_{h-1}^{h} g\left(\frac{2n+1}{k}\right) dk.$$

Die Summe kann also mit

$$\sum_{h=1}^{n} g\left(\frac{2n+1}{h}\right) < g(2n+1) + \int_{1}^{n} g\left(\frac{2n+1}{h}\right) dh$$

abgeschätzt werden. Dabei muss der erste Summand spezifisch angegeben werden, da das Integral sonst divergiert (da man eine reziproke Funktion von 0 bis 1 integrieren würde).

5.3 Vergleich der Abschätzungen

Nun können wir die beiden Abschätzungen (9) und (11) vergleichen. Berechnen wir die Differenz der beiden Abschätzungen für $n = 10^9$ so erhält man $\approx 10^{18}$. Die Abschätzung mithilfe von Primzahlfunktionen ist also immer noch grösser als die Abschätzung durch die Stirling-Formel und zwar signifikant.

Nun stellt sich die Frage, ob der Fehler durch die Abschätzungen selbst oder die Art des Abschätzens verursacht wurde. Ich kann hier keine detaillierte mathematische Begründung geben, es erscheint mir jedoch vernünftig zu vermuten, dass der Fehler durch die Art des Abschätzens verursacht wurde und nicht durch die Abschätzungen aus [8]. Könnte man zeigen, dass der Fehler $> \vartheta(n^2)$, dann würde der Beweis funktionieren. Weiter ist es so, dass die Ungleichung vom Anfang davon ausgeht, dass jede Primzahl mindestens einmal vorkommt. Dies ist jedoch nicht wahr, wie man zeigen kann[19].

6 Beweis der Ramanujan-Primzahlen

6.1 Existenzbeweis

Zuerst muss die Existenz bewiesen werden. Es sei R_n die n-te Ramanujan-Primzahl. Für jede Zahl $\gamma \geqslant R_n$ gilt

$$\pi(\gamma) - \pi(\gamma/2) \geqslant n.$$

[18] Für $h = 1$ konvergiert das Integral nicht.

[19] So können zum Beispiel keine Primzahlen vom Intervall $[n^2, (n+1)^2/2]$ vorkommen

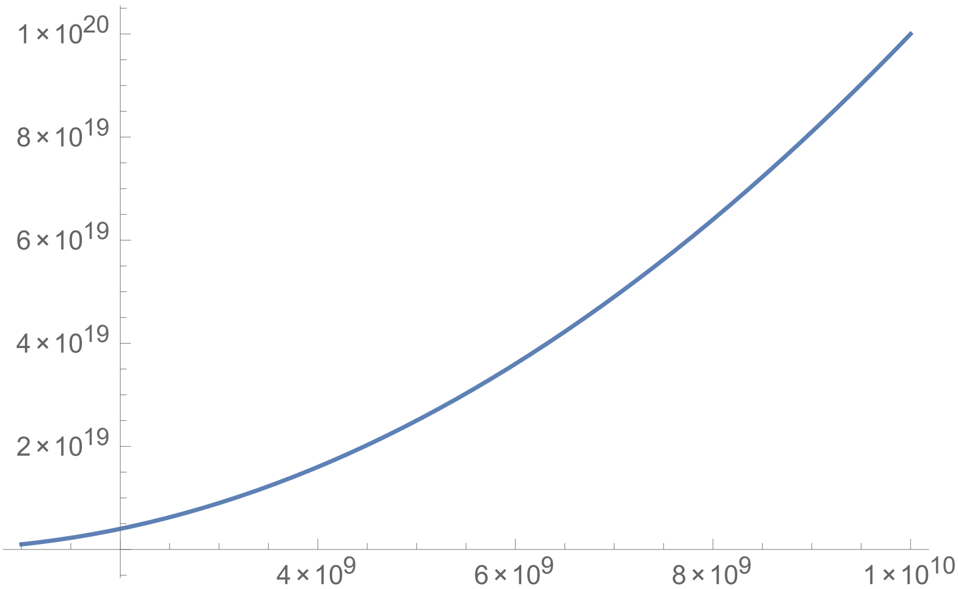

Abbildung 3: Fehler der Abschätzung

Wir müssen also beweisen, dass es Zahlen gibt, die diese Eigenschaft erfüllen. Wir nehmen an es gibt ein $f(x)$, sodass $f(x) > \pi(x) - \pi(x/2)$ und $f'(x) > 0$. Wir wissen dann, dass für jedes $x \geqslant x_0$

$$\pi(x) - \pi(x/2) \geqslant f(x) \Rightarrow \pi(x) - \pi(x/2) \geqslant f(x_0)$$

gilt. Dies folgt aus der Bedingung, dass $f'(x) > 0$. Die Funktion kann nur steigen, also müssen alle Intervalle mit $x \geqslant x_0$ die obige Bedingung erfüllen. Weiter muss $f(x) > 0$ gelten, da es sonst keine Primzahlen gibt. Divergiert $f(x)$ im Unendlichen, so gibt es unendlich viele x_0, denn es gibt unendlich viele (natürliche) x_0 welche wir als untere Grenze verwenden können. Existiert also ein solches $f(x)$, dann existieren auch Ramanujan-Primzahlen.

Es ist noch anzumerken, dass im Folgenden das Intervall $[n, 2n]$ betrachtet wird. Ein Beweis der Ramanujan-Primzahlen für diese Intervalle ist dassselbe wie ein Beweis der "echten" Ramanujan-Primzahlen, da die selben Intervalle betrachtet werden, nur anders notiert.

Aus dem Beweis von Erdos weiss man, dass

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n} \cdot \prod_{n<p\leqslant 2n} p$$

gilt. Im Beweis wurden nur das Produkt der Primzahlen weggelassen und so ein Widerspruch hervorgerufen. Beachtet man jedoch das Produkt der Primzahlen, so ergibt die Ungleichung sehr wohl Sinn. Durch umformen und logarithmieren erhalten wir (man ersetze n durch x

damit es differenzierbar wird)

$$\frac{x}{3}\ln(4) - \ln(2x)\cdot(1+\sqrt{2x}) \leqslant \overbrace{\sum_{x<p\leqslant 2x}\ln(p)}^{\vartheta(2x)-\vartheta(x)}.$$

Wir können also wie bereits in 4.2.4 erwähnt durch $\ln(2x)$ divideren um eine Absachätzung der Primzahlanzahl zu erhalten. Man erhält

$$\frac{\frac{x}{3}\ln(4) - \ln(2x)\cdot(1+\sqrt{2x})}{\ln(2x)} \leqslant \sum_{x<p\leqslant 2x}\frac{\ln(p)}{\ln(2x)} < \pi(2x) - \pi(x).$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die linke Seite immer steigt und > 0 ist. Berechnungen zeigen, dass dies erfüllt ist, wenn $x > 500$. Weitere Berechnungen zeigen, dass die linke Seite divergiert[20]. Wir haben also auch gezeigt, dass es unendlich viele Ramanujan-Primzahlen gibt.

6.2 Minimalitätsprinzip

Nun haben wir gezeigt, dass Zahlen existieren, sodass die Bedingung der Ramanujan-Primzahlen erfüllt ist. Wir haben aber noch nicht gezeigt, dass es immer Primzahlen sein müssen.[21] Im folgenden nehme man an γ sei eine Ramanujan-Zahl aus der Abschätzung und p sei die grösste Primzahl, welche $p \leqslant \gamma$ erfüllt. Zwischen p und γ gibt es also keine Primzahl, deshalb gilt

$$\pi(\gamma) - \pi(\gamma/2) = \pi(p) - \pi(\gamma/2) \leqslant \pi(p) - \pi(p/2).$$

Alle Intervalle zwischen γ und p besitzen also mehr oder gleich viele Primzahlen wie das Intervall von γ, also muss p die erste Zahl sein mit der Anzahl Primzahlen wie in γ. Ramanujan-Primzahlen müssen also Primzahlen sein. □

7 Fazit

Es war mir, wie erwartet, nicht möglich die Legendresche Vermutung zu lösen. Dafür gibt es meiner Meinung nach mehrere Gründe. Die im Text verwendeten Abschätzungen aus [8] werden mithilfe der nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion hergeleitet. Diese Nullstellen sind durch komplexe Analysis nützlich geworden, man sieht sie zum Beispiel in expliziten Formeln für Primzahlfunktionen, welchen kein Fehlerterm mehr angehängt ist. In der Zeit, in der ich mich mit der Thematik der Primzahlen und der Beweisidee zur Legendreschen Vermutung auseinandergesetzt habe, war es mir nicht möglich, komplexe Analysis

[20] Siehe für diese 2 Behauptungen 10.2.3.
[21] Wir wechseln wieder auf das Intervall $[n, n/2]$

zu lernen, dies war auch nicht Ziel der Arbeit. Vielmehr war das Ziel, eine Beweisidee zu erreichen, welche verständlich und trotzdem gut ist. Ich denke, dass ich diese Ziele erreicht habe und sehr viel beim Schreiben der Arbeit erlernt habe.

8 Danksagungen

Ich will Herrn Marco Manni für seine unglaubliche Unterstützung und sein grosses Engagement danken. Nur dank ihm war es mir möglich diese Arbeit auf ebenjene Art und Weise zu vollenden.

Weiter möchte ich Carina Morstein für ihre Motivation danken, wenn meine am Ende war.

Abschliessend will ich allen danken, welche sich meine langen Vorträge über Mathematik anhörten und mich ebenfalls unterstützten auf meinem Weg bis zur Matur hin.

9 Quellen

[1]: Aigner Martin, Ziegler Günter; Das Buch der Beweise; Springer, Berlin, 2002; S. 7 - 12

[2]: OEIS; Ramanujan primes; http://oeis.org/wiki/Ramanujan_primes; Letzter Besuch: 3. 1. 2016

[3]: Christian Luca; Legendre's Conjecture; http://blogs.ams.org/mathgradblog/2013/09/29/legendres-conjecture/#sthash.vvpoc8fl.dpbs, Letzter Besuch: 3. 1. 2016

[4]: Germ´an Andr´es Paz; On Legendre's, Brocard's, Andrica's and Oppermann's Conjectures; http://arxiv.org/abs/1310.1323; S. 4; Letzter Besuch: 3. 1. 2016

[5]: WolframMathWorld; Landau's Problems; http://mathworld.wolfram.com/LandausProble ms.html; Letzter Besuch: 3. 1. 2016

[6]: J. Barkeley Rosser, Lowell Schoenfeld; Approximate formulas for some functions of prime numbers; http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1255631807; S. 65, 67; Letzter Besuch: 4. 1. 2016

[7]: aus: "James Stirling, Methodus Differentialis, 1730"; http://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/Kryptologie07/Klassisch/1_Monoalph/Stirling.pdf; Letzter Besuch: 5. 1. 2016

[8]: Pierre Dusart; Estimates of some functions without RH; http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1002/1002.0442v1.pdf; S. 1, 2, 4; Letzter Besuch: 6. 1. 2015

Alle Abbildungen und Berechnungen wurden von mir selbst in Wolfram Mathemathica 10.2 erstellt und ausgefüht.

10 Anhang

10.1 Begriffserklärungen

Hier sollten die wichtigsten Begriffe, welche nicht im normalen Schulunterricht behandelt werden, erklärt werden. In diesen Kapiteln wurde auch sehr auf Verständlichkeit und Einfachheit geachtet.

10.1.1 Induktion

Induktion ist ein oft verwendetes Beweisverfahren in der Mathematik. Das Vorgehen bei einer Induktion ist relativ simpel.

Als Beispiehl nehmen wir die Gaus'sche Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Die Induktion besteht dabei aus zwei Schritten. Man muss zeigen, dass wenn etwas für n wahr ist, dann ist es auch für $n + 1$ wahr. Aus dieser Logik heraus folgt, dass dies auch für $n + 2$ wahr sein muss, da es für $n + 1$ wahr ist. Also ist es dann auch für $n + 3$ wahr und so weiter.

Nun wenden wir dieses Prinzip auf die Gaus'sche Summenformel an. Dabei nehmen wir an, dass die Summenformel für n richtig ist, also

$$\underbrace{\overbrace{\frac{n^2 + n}{2}}^{\text{Summenformel für n}} + n + 1}_{\text{Summenformel, welche bestimmt richtig ist}} = \overbrace{\frac{(n+1)^2 + n + 1}{2}}^{\text{Summenformel für n+1}}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist bestimmt richtig, da wir annehmen, dass die Summenformel für n richtig ist und wir nur noch $n + 1$ dazuaddieren müssen, um die nächste Summe zu erhalten. Die rechte Seite ist das was zu zeigen ist, nämlich die Summenformel für $n + 1$. Die Frage die sich nun stellt ist, was die Folge wäre, wenn die obige Gleichung wahr ist. Da wir annehmen, dass die Summenformel für n gilt, können wir dann sagen: gilt die Summenformel für n, dann gilt sie auch für $n + 1$. Gilt sie dann für $n + 1$ so gilt sie auch für $n + 2$ und so weiter. Also gilt die Formel für alle Zahlen.[22]

Nun muss nur noch der zweite Schritt erledigt werden, nämlich der Induktionsanfang. Nun ist es wichtig, dass wir die Formel für das erste Element der Menge beweisen, denn sonst kann das Prinzip nicht weitergeführt werden. Deshalb muss man auch immer zeigen, dass die Annahme für das erste Element, ab welcher sie gilt, wahr ist.

[22] Die Umformung der Induktionsgleichung wird dem Leser überlassen.

Für unsere Summenformel bedeutet dies

$$1 = \frac{1^2 + 1}{2} = 1.$$

Daraus folgt nun direkt, dass die Gaus'sche Summenformel stimmen muss, da das obige Prinzip angewendet werden kann. $\square$

Anmerkung: Das Viereck meint, dass ein Beweis abgeschlossen ist (es wird auch q.e.d. verwendet).

10.1.2 Indirekter Beweis

Wiederum ein wichtiges Beweisverfahren der Mathematik. Dabei nimmt man an, eine Aussage A ist richtig.[23] Aus der Richtigkeit von A schliesst man dann auf eine andere Aussage B, welche jedoch falsch ist. Also kann A nicht richtig sein, denn wir haben etwas Falsches aus A gefolgert.

Als Beispiel nehme man hier den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Zur Erinnerung: eine Zahl ist genau dann irrational, wenn man sie nicht als fertig gekürzten Bruch $\frac{h}{q}$ mit $h, q \in \mathbb{N}$ schreiben kann.

Im ersten Schritt nimmt man nun an, dass $\sqrt{2}$ rational ist, also als Bruch geschrieben werden kann, also

$$\sqrt{2} = \frac{h}{q}.$$

Quadriert man beide Seiten erhählt man

$$2 = \frac{h^2}{q^2}.$$

Dies kann jedoch nicht stimmen, da jede Quadratzahl nur eine gerade Anzahl Primfaktoren haben kann. Als Beispiel nehme man $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Betrachtet man nun $360^2 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, so fällt auf, dass alle Primpotenzen mit 2 multipliziert wurden, also gerade sind. Dies gilt für jede Zahl also auch für h^2 und q^2. Dividiert man zwei Zahlen, so werden die Primpotenzen immer subtrahiert. Gerade minus Gerade gibt jedoch wieder Gerade, also müsste $\frac{h^2}{q^2}$ auch eine Quadratzahl sein. 2 ist jedoch keine Quadratzahl. Unsere Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, muss deshalb falsch sein, also muss $\sqrt{2}$ irrational sein. $\square$

10.1.3 Umgang mit Ungleichungen

Dieses Kapitel ist an und für sich nicht nötig, jedoch ist es eine Hilfe im Bezug auf die vielen Ungleichungen welche im Text vorkommen.

[23] Man kann in der Logik Aussagen mit Buchstaben symbolisieren

Erstens soll auf den Unterschied zwischen $<, >$ und $\leqslant, \geqslant$ eingegangen werden im Kontext von natürlichen Zahlen. Man nehme an man hat eine natürliche Zahl n. Gilt für diese Zahl $n < 5$. Aus dieser Ungleichung folgt $n \leqslant 4$, da n natürlich sein muss. Ein sehr wichtiges Konzept, welches für das Abschätzen der Primfaktorzerlegung des Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ verwendet wird.

Als nächstes soll auf Termumformungen eingegangen werden. Einige Termumformungen bewirken die Umkehrung des Ungleichheitszeichens, so zum Beispiel die Multiplikation mit -1. Formt man die Ungleichung 5 > 3 so um, erhält man $-5 < -3$, was offensichtlicherweise korrekt ist (man beachte hierbei den Zahlenstrahl und wo sich die zwei Zahlen befinden). Eine andere solche Termumformung ist $^{-1}$ rechnen. Wir nehmen wieder dasselbe Beispiel und erhalten 1/5 < 1/3 oder 0.2 < 0.333... Wiederum zeigt sich, dass dies wahr ist.

Zu diesen speziellen Termumformungen noch ein Kommentar. Jede Termumformung kann man als eine Funktion auffassen, man nenne sie $f(x)$. Ist zum Beispiel die Multiplikation mit -1 die Termumformung dann ist $f(x) = -x$. Will man nun diese Termumformung anwenden so gilt $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2); x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dies ist eine Folge davon, dass $f'(x) < 0$. Jede Termumformung, welche $f'(x) < 0$ erfüllt, wird eine Umkehrung des Ungleichheitszeichens hervorrufen. Der Beweis dazu wird dem Leser überlassen, ist jedoch mit einfacher Analysis durchführbar. Weiter wird dem Leser auch angeraten, sich Gedanken darüber zu machen, welche $f(x)$ als Termumformung in einer Ungleichung Sinn machen.

10.1.4 Abschätzungen

Abschätzungen spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik um schwierige Formeln um ein Vielfaches zu vereinfachen und somit zum Beispiel Analysis auf ein Problem anwenden zu können. Wichtig für Abschätzungen ist es oftmals, dass der Fehler, den sie besitzen, zum Term welchen sie abschätzen, möglichst klein ist. Diese Abschätzungen sind deshalb oftmals nicht einfach zu erhalten.

Eine obere Abschätzung ist eine Abschätzung, welche grösser ist als der zu abschätzende Term. Möchte man also ein $f(x)$ abschätzen, so muss für eine obere Abschätzung $g(x)$

$$g(x) \geqslant f(x)$$

gelten. Untere Abschätzungen sind dasselbe, nur dass sie kleiner sind als der zu abschätzende Term.

10.1.5 Abschätzungen durch Integrale

Oftmals will man Summen abschätzen ohne dass man eine Summenformel besitzt. Ein Weg dies zu tun ist durch Integration der Summanden.

Dies ist am besten erklärbar durch ein Beispiel. Wir möchten die harmonische Reihe gegen oben abschätzen. Das n-te Element der harmonischen Reihe ist

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

In einem ersten Schritt wollen wir einen Summanden durch einen Integralausdruck ersetzen. Dabei müssen wir aufpassen, was abgeschätzt wird. In diesem Fall wissen wir, dass

$$\frac{1}{k} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dk$$

gilt. Man beachte den Wechsel der Integrationsgrenzen und des Differentials (dx wird zu dk). Die untere Grenze ist $k-1$, da die Funktion monoton sinkt. Wir bilden mit dem Integral, welches zur Abschätzung dient, die Summe von $\frac{1}{k-1}$ bis $\frac{1}{k}$ und da $\frac{1}{k-1} > \frac{1}{k}$ gilt, muss das Integral eine obere Abschätzung sein. Wir können die harmonische Reihe nun abschätzen mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(n).$$

10.2 Erläuterungen

10.2.1 Zum Beweis von Erdős

Es reicht aus zu zeigen, dass für $n > 467$

$$\frac{4^n}{2n} \geqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}$$

gilt. Diese Ungleichung, erweitert auf $\mathbb{R}$, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{4^{\frac{1}{3}x}}{(2x)^{\sqrt{2x}+1}} &\geqslant 1 \\ e^{\frac{\ln 4}{3}x - \ln(2x)(\sqrt{2x}+1)} &\geqslant 1 \\ \frac{\ln 4}{3}x - \ln(2x)(\sqrt{2x}+1) &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Für $x = 468$ ergibt die linke Seite ≈ 0.1071 erfüllt also die Gleichung. Folglich ist es ausreichend zu zeigen, dass die Ableitung der linken Seite für $x \geqslant 468$ positiv ist. Die Gleichung formt sich um zu

$$\frac{\ln 4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(2x)}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

Wiederum berechnen wir die linke Seite für $x = 468$ und erhalten ≈ 0.1710. Wir können nun durch Ableiten eine neue äquivalente Ungleichung erhalten, nämlich

$$\frac{\sqrt{2x}\ln(2x)+4}{4x^2} \geqslant 0.$$

Somit ist die Aussage bewiesen, da diese Ungleichung für alle x offensichtlich wahr ist. $\square$

10.2.2 Zur Abschätzung von $\psi(x)$

Es soll noch gezeigt werden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(x^{\frac{1}{k}}) \backsim \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}$$

gilt. Wir werden dazu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}}\right)$$

gegen oben und unten abschätzen.

Wir wissen, dass

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}}\right) \leqslant \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{x}\right)$$

gilt, da $x < \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}$. Es sei bemerkt, dass $\vartheta(x) \backsim x$ gilt weshalb der Grenzwert $\lim_{x\to+\infty}\frac{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{x}$ für $k \geqslant 1$ existieren muss. Mithilfe des Grenzwertsätze erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{x}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{x}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}}{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})x^{\frac{1}{k}}}{x\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1-k}{k}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Für die untere Abschätzung verwenden wir

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}}\right) \geqslant \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x)}{\sum_{k=1}^{\infty}x^{\frac{1}{k}}}\right).$$

Diese Ungleichung gilt, da für $\sum_{k=2}^{\infty} \vartheta(x^{\frac{1}{k}}) \geqslant 0$. Es sei angemerkt, dass man die Grenzwertsätze anwenden kann, da die obere Abschätzung besagt, dass dieser Grenzwert bestimmt existiert. Mithilfe der Grenzwerte erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}}\right) \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\vartheta(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\vartheta(x)x}{\vartheta(x)\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1-k}{k}}}\right) \\
&= \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1-k}{k}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$1 \leqslant \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}}\right) \leqslant 1.$$

Dies ist äquivalent zu $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{\sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}}\right) = 1$ oder

$$\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta(x^{\frac{1}{k}}) \backsim \sum_{k=1}^{\infty} x^{\frac{1}{k}}.$$

□

10.2.3 Zum Beweis der Ramanujan-Primzahlen

Zuerst soll die Divergenz von

$$\frac{x\ln(4)}{3\ln(2x)} - 1 - \sqrt{2x}$$

bewiesen werden. Dazu soll zuerst gezeigt werden, dass

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \geqslant 3\cdot\ln(2x)$$

gilt. Dies ist wahr wenn

$$\frac{\sqrt{x}}{2} - 3\cdot\ln(2x) \geqslant 0.$$

Für $x = 2'700$ ist die linke Seite ≈ 0.1983. Somit können wir durch Ableiten eine neue Ungleichung erhalten, nämlich

$$\frac{1}{12\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \geqslant 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant 0.$$

Die Ableitung ist für $x \geqslant 12^2$ folglich positiv, woraus die ursprüngliche Ungleichung Für $x \geqslant 2'700$ folgt. Aufgrund dieser wissen wir nun, dass für $x \geqslant 2'700$

$$\frac{x\ln(4)}{3\ln(2x)} - 1 - \sqrt{2x} \geqslant \frac{x\ln(4)}{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 1 - \sqrt{2x}$$

gilt. Umformen der rechten Seite ergibt

$$(2\ln(4) - \sqrt{2})\sqrt{x} - 1.$$

Da $2\ln(4) - \sqrt{2} \approx 1.3584$ gilt, muss der Term divergieren. Somit muss auch der Term $\frac{x\ln(4)}{3\ln(2x)} - 1 - \sqrt{2x}$ divergieren womit die erste zu beweisende Aussage bewiesen ist.

Es ist noch zu beweisen, dass die erste Ableitung > 0 erfüllt für $x > 500$. Es muss also gezeigt werden, dass

$$\frac{\ln(4)}{3\ln(2x)} - \frac{\ln(4)}{3\ln^2(2x)} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \geqslant 0$$

gilt. Setzt man $k = \ln(2x)$ so wird die Ungleichung zu

$$\frac{\ln(4)}{3k} - \frac{\ln(4)}{3k^2} - e^{-0.5k} \geqslant 0.$$

Kann man zeigen, dass die Ungleichung für $k > 6.9078 \approx \ln(2 \cdot 500)$ wahr ist, so ist sie die Ungleichung für $x > 500$ wahr. Formt man die rechte Seite um erhält man

$$\frac{\ln(4)}{3k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) - e^{-0.5k} = \frac{\ln(4)}{3k}\left(\frac{k-1}{k}\right) - e^{-0.5k}.$$

Folglich ist

$$\frac{\ln(4)}{3k}\frac{5}{k} - e^{-0.5k}$$

für $k > 6$ bestimmt kleiner als die erste Ableitung. Für $k = 6.90$ ergibt diese Abschätzung ≈ 0.01678 ist also positiv. Da der Summand quadratisch und der Minuend exponentiell wächst, wird dieser Term positiv bleiben. Somit ist das Problem gelöst.