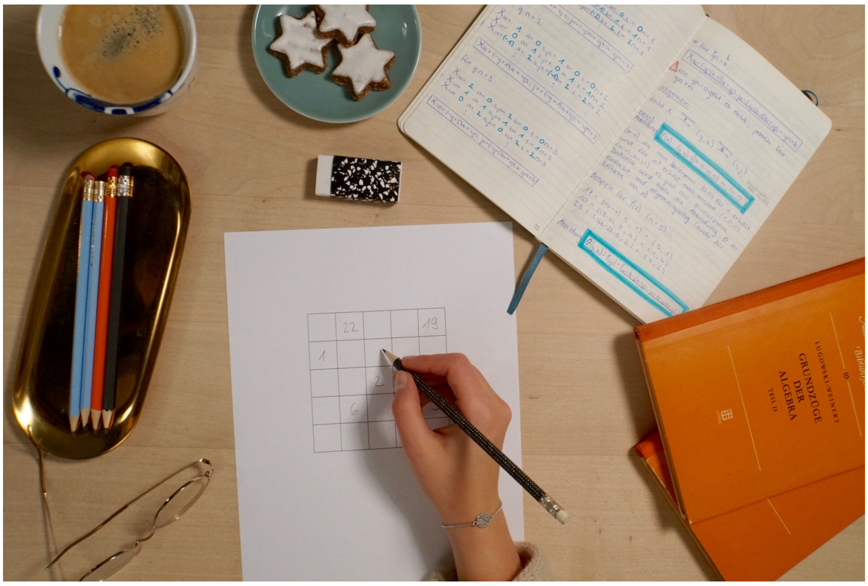
Wettbewerbsarbeit

Algebraische Behandlung von magischen Quadraten



Luciana Marconi

Betreut von Balz Bürgisser - Realgymnasium Rämibühl

März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Meine Maturitätsarbeit im Fach Mathematik zu schreiben, habe ich als gute Gelegenheit gesehen, mich über einen längeren Zeitraum in mein Lieblingsfach vertiefen und dabei meine Kenntnisse erweitern zu können. Dank der Unterstützung von Herrn Bürgisser, meinem Betreuer, habe ich mich schliesslich für das Thema „magische Quadrate“ entschieden. Besonders interessant an dieser Aufgabe finde ich ihre Anschaulichkeit, da man, neben den theoretischen Überlegungen, Herleitungen und Beweisen, die Ergebnisse direkt an Beispielen anwenden und somit auch selber magische Quadrate erstellen kann.

Magische Quadrate faszinieren die Menschheit bereits seit mehreren tausend Jahren. In dieser Arbeit untersuche ich mithilfe der Algebra magische Quadrate und befasse mich mit Bedingungen, unter welchen diese zustande kommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Bürgisser, da er mich nicht nur bei der Themenwahl, sondern auch während des ganzen Arbeitsprozesses sehr unterstützt und sich immer Zeit für meine Fragen genommen hat. Zudem danke ich meiner Familie, dass sie mich immer ermutigt und bestärkt hat.

2 Magische Quadrate

2.1 Definition

Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung ist eine quadratische Zahlenanordnung, in welcher die natürlichen Zahlen von 1 bis n^2 so angeordnet sind, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und den beiden Diagonalen gleich gross ist. Diese konstante Summe heisst magische Zahl.

Beispiel:

					↗ 65
8	22	11	5	19	→ 65
1	20	9	23	12	→ 65
24	13	2	16	10	→ 65
17	6	25	14	3	→ 65
15	4	18	7	21	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

In diesem Beispiel handelt es sich um ein magisches Quadrat 5. Ordnung mit der magischen Zahl 65.

2.2 Berechnung der magischen Zahl

$$\text{magische Zahl} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n^2} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Da das magische Quadrat n Zeilen und n Spalten hat, welche alle dieselbe Summe besitzen, muss die Summe aller Zahlen von 1 bis n^2 durch n geteilt werden.

2.3 Literaturübersicht

Es gibt unzählige Artikel, Bücher und Arbeiten, die sich mit magischen Quadraten auseinandersetzen. In vielen Arbeiten wie zum Beispiel den Artikeln [13] und [6] wird dabei hauptsächlich deren historische Bedeutung thematisiert.

Das sogenannte „Lo Shu"-Quadrat, ein magisches Quadrat 3. Ordnung, war ein wichtiger Bestandteil der alten chinesischen Philosophie und Geographie. Die Zahlen wurden nach dem „yin-yang"-Konzept analysiert und den fünf Elementen, auf denen die Philosophie basierte, zugeordnet. Man glaubte, damit Vorhersagen machen zu können und die Welt zu erklären. Auch im arabischen Raum hatten magische Quadrate einen wichtigen Stellenwert. Dort wurden sie mit verschiedenen Planeten und Metallen in Verbindung gesetzt und waren somit ein wichtiger Bestandteil der dortigen Astrologie.

Nebst den historischen Fakten bin ich bei meiner Recherche auch auf viele Arbeiten gestossen, die die verschiedenen Herstellungsmethoden magischer Quadrate genauer behandelt haben. Im Buch [10] wird unter anderem eine Regel gezeigt, die aus dem alten Indien stammt und besagt, dass für magische Quadrate ungerader Ordnung gilt, dass man die erste Zahl im mittleren Feld der obersten Zeile platziert und dann die Zahlen der Reihe nach diagonal einfüllen kann. Wenn man auf ein bereits besetztes Feld stösst, kann man einfach eine Zeile weiter unten fortfahren. Diese Regel werde ich in meiner Arbeit im Kapitel 14. genauer analysieren. Ausserdem wird im Artikel [9] die sogenannte „Knight's move method" erklärt, die Quadrate ungerader Ordnung magisch werden lässt. Diese Methode werde ich im Abschnitt 15.2 für den Fall $3 \nmid n$ untersuchen und verallgemeinern.

3 Grundlagen

3.1 Bezeichnungen

Folgende Bezeichnungen gelten:
$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen $= \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$ = Menge der natürlichen Zahlen mit der Null $= \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen $= \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Wenn $u \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von $v \in \mathbb{Z}$ ist, wird es folgendermassen geschrieben: $u|v$

n ist eine natürliche Zahl.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ = Menge der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo $n = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, ..., \underline{n-1}\}$

Die Restklasse modulo n der Zahl $r \in \mathbb{Z}$ wird mit $\underline{r}$ bezeichnet und ist eine unendliche Menge von ganzen Zahlen: $\underline{r} = \{r + tn | t \in \mathbb{Z}\}$. Dabei ist $|$ aus der Notation der Mengenlehre.

Als Repräsentant bezeichnet man ein Element einer Restklasse. Dabei sind die Standardrepräsentanten von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0, 1, 2, ..., n-1$.

$\underline{a} = \underline{b}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $n|a-b$

$\mathrm{ggT}(a, n)$ ist der grösste gemeinsame Teiler von $a \in \mathbb{Z}$ und n, wobei das Ergebnis eine natürliche Zahl ist.
Zur Erinnerung: $\mathrm{ggT}(1, n) = 1, \mathrm{ggT}(0, n) = n$

3.2 Algebraische Strukturen [7], [8], [12], [13]

Eine algebraische Struktur besteht aus einer Menge und einer oder mehreren Verknüpfungen auf dieser Menge. Eine solche Struktur wird folgendermassen dargestellt:

$$(\mathrm{M};\circ)$$
$$\nearrow \quad \nwarrow$$
Menge Verknüpfung

Beispiele:

$(\mathbb{N};+)$	$\rightarrow$	Menge = Menge der natürlichen Zahlen, Verknüpfung = Addition
$(\mathbb{Z};\cdot)$	$\rightarrow$	Menge = Menge der ganzen Zahlen, Verknüpfung = Multiplikation

3.2.1 Gruppe

Eine algebraische Struktur (G ; $\circ$) ist eine Gruppe, wenn sie folgende Bedingungen, die Gruppenaxiome, erfüllt:

(Ab)	Abgeschlossenheit:	Die Menge G ist bezüglich $\circ$ abgeschlossen. Für alle $a, b \in$ G gilt: $a \circ b \in$ G
(Ass)	Assoziativität:	Die Operation $\circ$ ist assoziativ. Für alle $a, b, c \in$ G gilt also: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
(Neu)	Neutrales Element:	In G gibt es bezüglich $\circ$ ein neutrales Element. Es existiert also ein $e \in$ G für das gilt: $a \circ e = a = e \circ a$
(Inv)	Inverse:	Jedes Element aus G besitzt ein Inverses. Zu jedem $a \in$ G existiert ein $a^{-1} \in$ G, sodass $a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$ gilt.

Falls für eine Gruppe zusätzlich das Kommutativgesetz (Komm) gilt, nennt man sie eine kommutative oder eine abelsche Gruppe. (Falls für alle $a, b \in$ G gilt $a \circ b = b \circ a$).

Beispiel: Handelt es sich bei der folgenden algebraischen Struktur um eine Gruppe oder sogar um eine abelsche Gruppe?
$(\mathbb{Z};+)$

(Ab)	Bei der Addition von ganzen Zahlen ist das Ergebnis wieder eine ganze Zahl. Beispiele: $3 + (-10) = -7, 17 + 9 + (-6) = 20$
(Ass)	Die Addition ist in Bezug auf $\mathbb{Z}$ assoziativ. Beispiel: $8 + ((-5) + 3) = (8 + (-5)) + 3 = 6$
(Neu)	0 ist das neutrale Element für alle $a \in \mathbb{Z}$, da $a + 0 = a = 0 + a$ gilt. Beispiele: $13 + 0 = 13, 0 + (-5) = -5$
(Inv)	Jedes Element aus $\mathbb{Z}$ besitzt bezüglich der Addition ein Inverses $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $a^{-1} = -a$, da $a + (-a) = 0$ gilt. Beispiele: $4 + (-4) = 0, (-18) + 18 = 0$
(Komm)	Das Kommutativgesetz der Addition gilt bezüglich der Menge $\mathbb{Z}$. Beispiele: $6 + (-4) = (-4) + 6 = 2, 14 + (-9) = (-9) + 14 = 5$.

Die algebraische Struktur $(\mathbb{Z};+)$ erfüllt alle Gruppenaxiome und entspricht zusätzlich dem Kommutativgesetz. Daher handelt es sich um eine abelsche Gruppe.

3.2.2 Halbgruppe

Eine algebraische Struktur (G ; $\circ$) ist eine Halbgruppe, wenn die beiden Gruppenaxiome „Abgeschlossenheit“ und „Assoziativität“ erfüllt sind (siehe Kapitel 3.2.1). Ist zusätzlich ein neutrales Element für alle $a \in$ G vorhanden, heisst die algebraische Struktur Halbgruppe mit neutralem Element. Falls das Kommutativgesetz gilt, nennt man die Halbgruppe ebenfalls abelsch.

Beispiel:
$(\mathbb{Z}; \cdot)$

(Ab)	Bei der Multiplikation von ganzen Zahlen ist das Ergebnis wieder eine ganze Zahl. Beispiele: $5 \cdot 7 = 35, 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$
(Ass)	Die Multiplikation ist in Bezug auf $\mathbb{Z}$ assoziativ. Beispiel: $(3 \cdot 5) \cdot 8 = 3 \cdot (5 \cdot 8) = 120$
(Neu)	1 ist das neutrale Element, da für alle $a \in \mathbb{Z}$ $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ gilt. Beispiele: $25 \cdot 1 = 25, 1 \cdot 17 = 17$
(Inv)	Nicht jedes Element aus $\mathbb{Z}$ besitzt bezüglich der Multiplikation ein Inverses $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Beispielsweise müsste $\dfrac{1}{5}$ das multiplikative Inverse zu 5 sein, jedoch ist $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$.
(Komm)	Das Kommutativgesetz der Multiplikation gilt bezüglich $\mathbb{Z}$. Beispiel: $11 \cdot 6 = 6 \cdot 11 = 66$

Es handelt sich um eine abelsche Halbgruppe mit neutralem Element.

3.2.3 Ring

Eine algebraische Struktur (R;$\circ$; $\diamond$) heisst Ring, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) (R;$\circ$) ist eine abelsche Gruppe.
(2) (R;$\diamond$) ist eine Halbgruppe.
(3) $a \diamond (b \circ c) = a \diamond b \circ a \diamond c$ und $(a \circ b) \diamond c = a \diamond c \circ b \diamond c$ gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Distributivgesetz)

Falls für (R;$\diamond$) das Kommutativgesetz gilt, nennt man die Struktur einen abelschen Ring. Falls (R;$\diamond$) ein neutrales Element besitzt, ist es ein Ring mit neutralem Element.

Beispiel:
$(\mathbb{Z};+;\cdot)$

(1) $(\mathbb{Z};+)$ ist eine abelsche Gruppe (siehe Kapitel 3.2.1).
(2) $(\mathbb{Z};\cdot)$ ist eine abelsche Halbgruppe mit neutralem Element (siehe Kapitel 3.2.2).
(3) In diesem Fall gilt das Distributivgesetz.
Beispiele: $3 \cdot (6+2) = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 24$
$(3+6) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 18$

$(\mathbb{Z};+;\cdot)$ ist also ein abelscher Ring mit neutralem Element.

3.2.4 Körper

Eine algebraische Struktur (K;$\circ$;$\diamond$) ist ein Körper, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(1) (K;$\circ$) ist eine abelsche Gruppe.
(2) $(\mathrm{K}\backslash\{e_{(1)}\};\diamond)$ ist eine abelsche Gruppe. Hier ist die Menge K ohne das neutrale Element aus (1).
(3) $a \diamond (b \circ c) = a \diamond b \circ a \diamond c$ und $(a \circ b) \diamond c = a \diamond c \circ b \diamond c$ gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Distributivgesetz)

3.3 Homomorphismus [1]

Ein Homomorphismus bezeichnet eine Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen. Dabei werden werden die Elemente der einen Menge so in die andere Menge abgebildet, dass sich ihre Bilder strukturell gleich verhalten.

3.3.1 Gruppenhomomorphismus[15]

Es seien zwei Gruppen $(G;\circ)$ und $(H;\diamond)$. Die Abbildung $f: G \to H$ heisst Homomorphismus, wenn für alle $a, b \in G$ gilt:

$f(a \circ b) = f(a) \diamond f(b)$

Ausserdem gilt auch:

(Neu) $f(e_G) = e_H$ neutrales Element wird auf neutrales Element abgebildet.

(Inv) Für alle $a \in G$ gilt $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ Inverses wird auf Inverses abgebildet.

3.3.2 Ringhomomorphismus [16]

Der Ringhomomorphismus ist eine Abbildung, welche sowohl bezüglich der abelschen Gruppen als auch bezüglich der Halbgruppen der beiden Ringe ein Gruppenhomomorphismus ist.

Es seien die Ringe $(R; \circ; \diamond)$ und $(S; \bigotimes; *)$. Wenn $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus ist, gilt für alle $a, b \in R$:

$f(a \cdot b) = f(a) \bigotimes f(b)$ und $f(a \diamond b) = f(a) * f(b)$

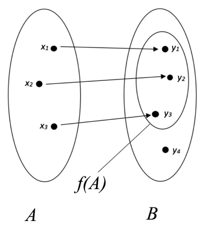
3.4 Bijektivität [5]

Eine Funktion f mit der Definitionsmenge A, dem Wertebereich B und der Wertemenge f(A) ist gegeben.

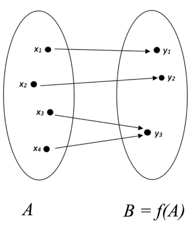
f heisst **injektiv**, wenn jedes $y \in$ B höchstens einmal als Lösung der Gleichung $f(x) = y$ vorkommt. Daher gilt für alle $x, x' \in$ A:

$x \neq x' \longrightarrow f(x) \neq f(x')$

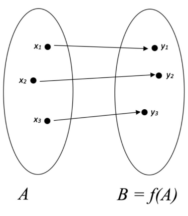
äquivalent dazu gilt auch:
$f(x) = f(x') \longrightarrow x = x'$



f heisst **surjektiv**, wenn jedes $y \in$ B mindesten einmal als Lösung vorkommt. Also ist der Wertebereich gleich wie die Wertemenge.



Schliesslich heisst f **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.



4 Restklassenring

Es sei $n \geq 2$. Ein magisches Quadrat n-ter Ordnung besitzt pro Zeile und pro Spalte n Felder. Da man bei der Berechnung der Felder leicht Ergebnisse erhält, welche grösser als n sind und daher neben dem Zahlenquadrat stehen würden, rechnet man mit Restklassen, wodurch dieses Problem vermieden wird. Man kann alle ganzen Zahlen anhand ihres Restes bei der Division durch n einer Restklasse der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die genau n Restklassen beinhaltet (siehe Kapitel 3.1), zuordnen. Somit hat man den gewünschten Effekt erreicht, mit nur n verschiedenen Elementen zu rechnen.

4.1 Rechengesetze [2]

Die Addition und die Multiplikation sind folgendermassen definiert:

Definition 4.1. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b}$

Überlegung: $\underline{a} = \underline{a'}$ und $\underline{b} = \underline{b'} \to \underline{a+b} = \underline{a'+b'}$

Beweis.

$$\begin{array}{ll} & a - a' = t_1 n \\ + & b - b' = t_2 n \\ \hline & a - a' + b - b' = (t_1 + t_2)n \\ & a - a' + b - b' = (t_1 + t_2)n \quad \mid (t_1 + t_2) \in \mathbb{Z} \\ & \underline{a+b} = \underline{a'+b'} \end{array}$$

□

Daher kann man definieren: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b}$

Definition 4.2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b}$

Überlegung: $\underline{a} = \underline{a'}$ und $\underline{b} = \underline{b'} \to \underline{a \cdot b} = \underline{a' \cdot b'}$

Beweis.

$a = r_1 + t_a n, a' = r_1 + t_{a'} n, b = r_2 + t_b n, b' = r_2 + t_{b'} n$

$a \cdot b = (r_1 + t_a n)(r_2 + t_b n) = r_1 r_2 + r_1 t_b n + r_2 t_a n + t_a t_b n^2$

$a' \cdot b' = (r_1 + t_{a'} n)(r_2 + t_{b'} n) = r_1 r_2 + r_1 t_{b'} n + r_2 t_{a'} n + t_{a'} t_{b'} n^2$

$a \cdot b = r_1 r_2 + n(r_1 t_b + r_2 t_a + t_a t_b n)$

$a' \cdot b' = r_1 r_2 + n(r_1 t_{b'} + r_2 t_{a'} + t_{a'} t_{b'} n)$

$\underline{a \cdot b} = \underline{a' \cdot b'}$

□

Daher kann man definieren: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b}$

4.2 Restklassen und algebraische Strukturen

Ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +)$ eine Gruppe?

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt aufgrund der in Kapitel 4.1 beschriebenen Rechengesetze:

(Ab) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b}$ Die Summe ist wieder eine Restklasse.

(Ass) $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} + \underline{b+c} = \underline{a + (b+c)} = \underline{(a+b)+c} = \underline{a+b} + \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ Somit gilt das Assoziativgesetz.

(Neu) $\underline{0}$ ist das neutrale Element, da für alle $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ folgendes gilt: $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a+0} = \underline{a} = \underline{0+a} = \underline{0} + \underline{a}$

(Inv) $\underline{a} + \underline{n-a} = \underline{a+n-a} = \underline{n} = \underline{0} = \underline{(n-a)+a} = \underline{n-a} + \underline{a}$ Somit existiert für jedes $\underline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Inverses $-\underline{a}$ und es gilt $-\underline{a} = \underline{n-a} = \underline{-a}$

(Komm) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b} = \underline{b+a} = \underline{b} + \underline{a}$ Das Kommutativgesetz gilt für die Addition bezüglich der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Alle Gruppenaxiome und auch das Kommutativgesetz werden eingehalten. Somit handelt es sich bei $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +)$ um eine abelsche Gruppe.

Welcher algebraischen Struktur entspricht $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \cdot)$?

(Ab) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b}$ Die Lösung ist wieder eine Restklasse.

(Ass) $\underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b \cdot c} = \underline{a \cdot (b \cdot c)} = \underline{(a \cdot b) \cdot c} = \underline{a \cdot b} \cdot \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c}$ Somit gilt das Assoziativgesetz.

(Neu) $\underline{1}$ ist das neutrale Element, da für alle $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ folgendes gilt: $\underline{a} \cdot \underline{1} = \underline{a \cdot 1} = \underline{a} = \underline{1 \cdot a} = \underline{1} \cdot \underline{a}$

(Inv) Für $\underline{0} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gibt es kein Inverses, da $\underline{a} \cdot \underline{0} = \underline{a \cdot 0} = \underline{0} \neq \underline{1}$ ergibt. Es gibt also nicht für alle Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Inverses und somit ist diese Bedingung nicht erfüllt.

(Komm) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b} = \underline{b \cdot a} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ Das Kommutativgesetz gilt für die Multiplikation bezüglich der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Da die Struktur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \cdot)$ nicht für jedes Element ein Inverses besitzt, ist sie eine abelsche Halbgruppe mit Neutralelement.

Aus den oberen beiden Erkenntnissen lässt sich fragen, ob $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \cdot)$ den Anforderungen eines Ringes (siehe Kapitel 3.1.4) entspricht.

(1) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};\cdot)$ ist eine abelsche Halbgruppe mit Neutralelement.
(3) $\underline{a}\cdot(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a\cdot(b+c)} = \underline{a\cdot b + a\cdot c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$ und
$(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{(a+b)\cdot c} = \underline{a\cdot c + b\cdot c} = \underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c}$
Das Distributivgesetz gilt.

also ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\cdot)$ ein abelscher Ring mit neutralem Element.

Behauptung: $\underline{a}-\underline{b} = \underline{a-b}$

Beweis.
$\underline{a}-\underline{b} = \underline{a}+(-\underline{b}) = \underline{a}+\underline{-b} = \underline{a+-b} = \underline{a-b}$ □

Um zu subtrahieren, addiert man ein Element mit seinem Inversen bezüglich der Addition. Da die Addition im Restklassenring erlaubt ist (siehe Kapitel 4.1), lässt sich so die Subtraktion definieren.

4.3 Invertierbarkeit [3], [11]

Im Gegensatz zur Addition, Multiplikation und Subtraktion (siehe Kapitel 4.1 und 4.2) ist die Division im Restklassenring nicht immer erlaubt. Stattdessen multipliziert man das Element mit seinem multiplikativen Inversen, was denselben Effekt wie die Division hat. Wann besitzt aber $\underline{a}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses?

Lemma 4.1. *Wenn $\underline{a}$ invertierbar ist, dann ist* $\mathrm{ggT}(a,n)=1$.

Beweis.
$\underline{a}\cdot\underline{x}=\underline{1}$ gilt, wenn $n\mid(a\cdot x-1)$
$t\cdot n = a\cdot x - 1$ | $-tn, +1$
$a\cdot x + n(-t) = 1$ | $\mathrm{ggT}(a,n)$ ausklammern
$\mathrm{ggT}(a,n)(u\cdot x + v\cdot(-t)) = 1$ | wobei $u,v\in\mathbb{Z}$

Daraus folgt: $\mathrm{ggT}(a,n)\mid 1$
Da 1 der einzige Teiler von 1 ist, ist diese Bedingung nur erfüllt, wenn $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ gilt. □

Lemma 4.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ *ist, dann ist $\underline{a}$ invertierbar.*

Beweis.
Man kann den $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ als ganzzahlige Linearkombination darstellen:
$x\cdot a + y\cdot n = 1$ wobei $x,y\in\mathbb{Z}$
$\underline{x}\cdot\underline{a}=\underline{1}$

□

Aus den beiden Lemmata lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 4.1. $\underline{a}$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ *ist.*

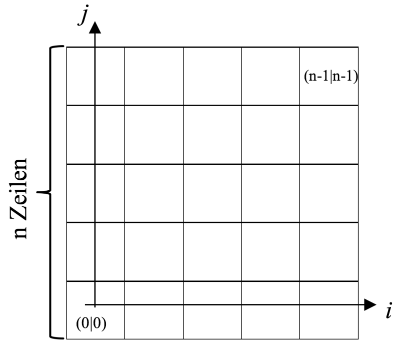
Wenn es sich bei n um eine Primzahl handelt, besitzen alle Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ausser $\underline{0}$ ein Inverses. Daher handelt es sich in diesem Fall um einen Körper (siehe Kapitel 3.2.4).

5 Zuordnung der Zahlen zuden Feldern

Um später die Eigenschaften eines magischen Quadrates untersuchen zu können, wird zunächst eine Formel gesucht, welche die Zuordnung der einzelnen Zahlen in die verschiedenen Felder beschreibt.

5.1 Bezeichnungen

Bei allen berechnungen gelten folgende Bezeichnungen:



$n \in \mathbb{N}$		
i	$=$	horizontale Koordinate, $i \in \mathbb{N}_0$
j	$=$	vertikale Koordinate, $j \in \mathbb{N}_0$
$(i_0 \mid j_0)$	$=$	Anfangsfeld $=$ Feld, in welches die Zahl 1 eingesetzt wird, $0 \leq i_0, j_0 \leq n-1$
$X_{i,j}$	$=$	Zahl, welche ins Feld $(i \mid j)$ eingesetzt wird
a, b	$=$	Schritt ($\rightarrow$ zeigt in welchem Feld die nächste Zahl eingesetzt wird, wobei a zur i Koordinate und b zur j Koordinate addiert wird.), $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, -n < a, b < n$
s, t	$=$	Sprung ($\rightarrow$ zeigt in welchem Feld die nächste Zahl eingesetzt wird, wenn das durch den Schritt definierte Feld bereits besetzt ist. Dabei wird s zur i Koordinate und t zur j Koordinate addiert.), $s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}, -n < s, t < n$

5.2 X im n-er System

Damit man eine allgemeingültige Formel aufstellen kann, welche die Zuordnung einer Zahl X zum passenden Feld beschreibt, wird X vom Dezimalsystem ins n-er System umgeschrieben. Wenn X direkt übersetzt werden würde, gäbe es eine dreistellige Zahl, welche n^2 entspricht. Um dreistellige Darstellungen im n-er System zu vermeiden, zieht man 1 von X ab und übersetzt $X - 1$. Somit bilden sich Zahlenpaare:

$$\varphi: \quad X \quad \to \quad (y,z)$$

$y \; = \;$ n-er Ziffer im n-er System (Ganzzahlquotient bei der Division von $X-1$ durch n.)

$z \; = \;$ Einerziffer im n-er System (Rest bei der Division von $X-1$ durch n.)

$$\varphi: \underbrace{[1,2,...,n^2]}_{\text{Definitionsmenge}} \to \underbrace{[0,1,...,n-1] \times [0,1,...,n-1]}_{\text{Wertebereich}}$$

Die y- und z-Werte gehen aufgrund des n-er Systems von 0 bis $n-1$. Daher ist die kleinste einzusetzende Zahl 1 im n-er System als $(0\ 0)_n$ und die grösste n^2 als $(n-1\ n-1)_n$ dargestellt. Also gilt $X = yn + z + 1$, wobei $0 \leq y, z \leq n-1$. Anhand dieser Formel kann man jedem X genau ein Zahlenpaar (y,z) zuordnen und umgekehrt.

Satz. *Die Abbildung $(y,z) \to X$ ist bijektiv.*

Behauptung: $(y,z) \neq (y',z') \to X \neq X'$

Beweis.
$X = X'$
$yn + z + 1 = y'n + z' + 1 \quad | -1$
$yn + z = y'n + z' \quad | -y'n, -z$
$(y - y')n = z' - z$

Daraus folgt, dass $z' - z$ ein Vielfaches von n ist. Da $0 \leq z, z' \leq n-1$ gilt, ist das einzig mögliche Vielfache von n, welches das Ergebnis von $z' - z$ sein kann, 0.

$z' - z = 0 \quad | +z$
$z' = z$

Daraus folgt:

$y' - y = 0 \quad | +y$
$y' = y$

Aufgrund der Injektivität gibt es für n^2 verschiedene Elemente, welche man für X einsetzt, auch n^2 verschiedene Ergebnisse. Alle n^2 Elemente des Wertebereiches kommen also genau einmal vor, weshalb die Abbildung auch surjektiv ist.

Somit ist gezeigt, dass φ in beide Richtungen eindeutig, also bijektiv, ist, da die Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv ist. □

5.3 Zahl-Feld Zuordnung

Anhand der Übersetzung von $X-1$ ins n-er System lässt sich der Zusammenhang zwischen der einzusetzenden Zahl und dem dazugehörigen Feld leichter beschreiben.

$$X \quad \rightarrow \quad (y, z) \quad \rightarrow \quad (u, v) \text{ wobei } u, v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
1 & \rightarrow & (0,0) & \rightarrow & (\underline{i_0}, \underline{j_0}) \\
2 & \rightarrow & (0,1) & \rightarrow & (\underline{i_0+a}, \underline{j_0+b}) \\
3 & \rightarrow & (0,2) & \rightarrow & (\underline{i_0+2a}, \underline{j_0+2b}) \\
\ldots & & & & \\
n & \rightarrow & (0, n-1) & \rightarrow & (\underline{i_0+(n-1)a}, \underline{j_0+(n-1)b})
\end{array}\right\} n \text{ Zahlen}$$

Wie man sieht, lassen sich die Koordinaten der passenden Felder zu allen Zahlen, deren $y = 0$ und $z =$ beliebig sind, folgendermassen berechnen: $(y, z) \rightarrow (u, v) = (\underline{i_0 + za}, \underline{j_0 + zb})$

Wenn man nun weiter Zahlen einsetzen möchte, muss man, um auf keine bereits besetzten Felder zu stossen, den Sprung berücksichtigen. Wenn man nur mit dem Schritt weiterfahren würde, müsste man $\underline{na}$ zu i_0 beziehungsweise $\underline{nb}$ zu j_0 addieren. Da jedoch $\underline{n}$ im Restklassenring 0 entspricht, würde wieder das Anfangsfeld definiert werden, welches jedoch bereits durch die Zahl 1 besetzt ist.

$$X \quad \rightarrow \quad (y, z) \quad \rightarrow \quad (u, v) \text{ wobei } u, v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
n+1 & \rightarrow & (1,0) & \rightarrow & (\underline{i_0+(n-1)a+s}, \underline{j_0+(n-1)b+t}) \\
n+2 & \rightarrow & (1,1) & \rightarrow & (\underline{i_0+na+s}, \underline{j_0+nb+t}) \\
n+3 & \rightarrow & (1,2) & \rightarrow & (\underline{i_0+(n+1)a+s}, \underline{j_0+(n+1)b+t}) \\
\ldots & & & & \\
2n & \rightarrow & (1, n-1) & \rightarrow & (\underline{i_0+(2n-2)a+s}, \underline{j_0+(2n-2)b+t})
\end{array}\right\} n \text{ Zahlen}$$

Falls $y = 1$ und $z =$ beliebig sind, ermittelt man die dazugehörigen Felder anhand dieser Berechnung: $(y, z) \rightarrow (u, v) = (\underline{i_0 + (z-1)a + s}, \underline{j_0 + (z-1)b + t})$

Auch hier muss wieder nach n Zahlen ein Sprung folgen, da man ansonsten auf ein besetztes Feld stossen würde.

$$X \quad \rightarrow \quad (y,z) \quad \rightarrow \quad (u,v) \text{ wobei } u,v \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
2n+1 & \rightarrow & (2,0) & \rightarrow & (\underline{i_0+(2n-2)a+2s}, \underline{j_0+(2n-2)b+2t}) \\
2n+2 & \rightarrow & (2,1) & \rightarrow & (\underline{i_0+(2n-1)a+2s}, \underline{j_0+(2n-1)b+2t}) \\
2n+3 & \rightarrow & (2,2) & \rightarrow & (\underline{i_0+2na+2s}, \underline{j_0+2nb+2t}) \\
\ldots & & & & \\
3n & \rightarrow & (2,n-1) & \rightarrow & (\underline{i_0+(3n-3)a+2s}, \underline{j_0+(3n-3)b+2t})
\end{array}\right\} n \text{ Zahlen}$$

Die jeweiligen Felder der Zahlen, für welche $y = 2$ und $z =$ beliebig gilt, kann man wie folgt berechnen: $(y,z) \rightarrow (u,v) = (\underline{i_0+(z-2)a+2s}, \underline{j_0+(z-2)b+2t})$

Auf diese Weise kann man fortfahren, bis man zu $X = n^2$ gelangt. Um jedoch Formeln zu vermeiden, welche nur für n Zahlen gültig sind, kann man diese zu einer allgemeinen Formel zusammenfassen, welche für $y =$ beliebig und $z =$ beliebig gilt.

$$\eta: \quad (y,z) \quad \rightarrow \quad (u,v) = (\underline{i_0+(z-y)a+ys}, \underline{j_0+(z-y)b+yt})$$

Um den Restklassen, die durch η entstehen, ein konkretes Feld zuteilen zu können, braucht es eine weitere bijektive Abbildung:

$\theta: \quad (u,v) \quad \rightarrow \quad (i,j)$ =(Standardrepräsentant von u, Standardrepräsentant von v), wobei $0 \leq i,j \leq n-1$

Man betrachtet folgende Verkettung:

$$X \xrightarrow[\text{bijektiv}]{\varphi} (y,z) \xrightarrow{\eta} (u,v) \xrightarrow[\text{bijektiv}]{\theta} (i,j)$$

5.4 Bijektivität von η

Auch für die Abbildung η muss die Bijektivität gelten, da in jedem Feld des magischen Quadrates jeweils nur eine Zahl vorkommen darf und umgekehrt auch jede Zahl nur in einem spezifischen Feld stehen kann.

Lemma 5.1. *Wenn* $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$ *ist, dann gilt:* $y \neq y' \rightarrow (u,v) \neq (u',v')$

Beweis.

$$
\begin{array}{rll}
 & \underline{i_0 + (z-y)a + ys} = \underline{i_0 + (z'-y')a + y's} & | \ \underline{-i_0}, \underline{\cdot(-b)} \\
+ & \underline{j_0 + (z-y)b + yt} = \underline{j_0 + (z'-y')b + y't} & | \ \underline{-j_0}, \underline{\cdot a} \\ \hline
 & \underline{y(at-bs)} = \underline{y'(at-bs)} & | \ \cdot(\underline{at-bs})^{-1} \\
 & \underline{y} = \underline{y'} & \\
 & y = y' &
\end{array}
$$

Wegen $0 \leq y, y' \leq n-1$ folgt aus $\underline{y} = \underline{y'}$ auch $y = y'$. $\square$

Lemma 5.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(at-bs, n) = 1$ *ist, dann gilt:* $z \neq z' \rightarrow (u, v) \neq (u', v')$

Beweis.
Es gilt $y = y'$ (siehe Lemma 1)

$$
\begin{array}{rll}
 & \underline{i_0 + (z-y)a + ys} = \underline{i_0 + (z'-y)a + ys} & | \ \underline{-i_0}, \underline{-ys}, \underline{\cdot t} \\
+ & \underline{j_0 + (z-y)b + yt} = \underline{j_0 + (z'-y)b + yt} & | \ \underline{-j_0}, \underline{-yt}, \underline{\cdot(-s)} \\ \hline
 & \underline{(z-y)(at-bs)} = \underline{(z'-y)(at-bs)} & | \ \cdot(\underline{at-bs})^{-1} \\
 & \underline{z-y} = \underline{z'-y} & | \ \underline{+y} \\
 & \underline{z} = \underline{z'} & \\
 & z = z' &
\end{array}
$$

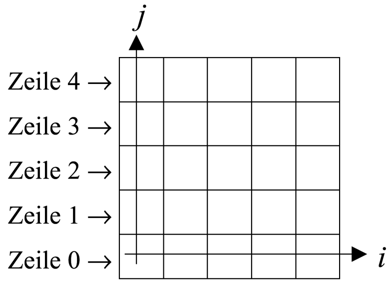
Wegen $0 \leq z, z' \leq n-1$ folgt aus $\underline{z} = \underline{z'}$ auch $z = z'$. $\square$

Aus diesen beiden Lemmata lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz. *Wenn* $\mathrm{ggT}(at.bs, n) = 1$ *ist, ist die Abbildung* η *bijektiv.*

6 Zeilensumme

In einem magischen Quadrat werden alle Zahlen einer beliebigen Zeile addiert, wobei jede Zeilensumme den gleichen Wert besitzen muss.
Wie man in diesem Quadrat erkennen kann, bleibt beim Addieren der Zah-



len einer bestimmten Zeile der $j-$Wert der verschiedenen Felder konstant, während sich i von Summand zu Summand unterscheidet.

6.1 Formel für y in Abhängigkeit von i

Da i veränderlich ist, muss eine Formel für y in Abhängigkeit von i gesucht werden, um das Verhalten von y bei einer Änderung von i untersuchen zu können.

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$, gemäss Kapitel 4.3 folgt daraus, dass $at - bs$ invertierbar ist.

$$
\begin{array}{lll}
 & i = i_0 + (z-y)a + ys & \mid \cdot(-b) \\
+ & j = j_0 + (z-y)b + yt & \mid \cdot a \\
\hline
 & -bi + aj = -bi_0 + aj_0 + y(at - bs) & \mid +bi_0, -aj_0 \\
 & y(at - bs) = a(j - j_0) - b(i - i_0) & \mid \cdot(at - bs)^{-1} \\
 & y = [a(j - j_0) - b(i - i_0)] \cdot (at - bs)^{-1} &
\end{array}
$$

6.2 Formel für z in Abhängigkeit von i

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$$
\begin{array}{lll}
 & i = i_0 + y(s-a) + za & \mid \cdot(t-b) \\
+ & j = j_0 + y(t-b) + zb & \mid \cdot - (s-a) \\
\hline
 & i(t-b) - j(s-a) = i_0(t-b) - j_0(s-a) + z(at - bs) & \mid -i_0(t-b), +j_0(s-a) \\
 & (t-b)(i - i_0) - (s-a)(j - j_0) = z(at - bs) & \mid \cdot(at - bs)^{-1} \\
 & z = [(t-b)(i - i_0) - (s-a)(j - j_0)] \cdot (at - bs)^{-1} &
\end{array}
$$

6.3 Injektivität von y und z

Wie verhalten sich y und z, welche nun beide in Abhängigkeit von i stehen, wenn sich i ändert, was bei der Addition der Zeilenzahlen der Fall ist?

Satz 6.1. *Wenn* $\mathrm{ggT}(b, n) = 1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{y}$ *injektiv.*

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\underline{y} = \underline{y'} & \mid \cdot(\underline{at - bs}) \\
\underline{a(j - j_0) - b(i - i_0)} = \underline{a(j - j_0) - b(i' - i_0)} & \\
\underline{aj - aj_0 - bi + bi_0} = \underline{aj - aj_0 - bi' + bi_0} & \mid \underline{-aj}, \underline{+aj_0}, \underline{-bi_0}, \underline{\cdot(-1)} \\
\underline{bi} = \underline{bi'} & \mid \cdot(\underline{b})^{-1} \text{ (siehe Kapitel 4.3)} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}$$

□

Satz 6.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(b - t, n) = 1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{z}$ *injektiv.*

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\underline{z} = \underline{z'} & \mid \cdot(\underline{at - bs}) \\
\underline{(t - b)(i - i_0) - (s - a)(j - j_0)} = \underline{(t - b)(i' - i_0) - (s - a)(j - j_0)} & \mid \underline{+(s - a)(j - j_0)} \\
\underline{(t - b)(i - i_0} = \underline{(t - b)(i' - i_0)} & \mid \cdot(\underline{t - b})^{-1} \\
\underline{i - i_0} = \underline{i' - i_0} & \mid \underline{+i_0} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}$$

□

6.4 Zeilensumme

Aus dem Satz 6.1 und dem Satz 6.2 folgt, dass bei den Zahlen X, die in den Feldern einer Zeile stehen, alle Zahlen von 0 bis $n - 1$ genau einmal sowohl als $y-$ als auch als $z-$Wert vorkommen. Da eine einzelne Zahl im Zahlenquadrat als $X = yn + z + 1$ definiert ist, lässt sich die Summe aller Zahlen in einer Zeile folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n \\
&= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^3 + n}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2} = \text{magische Zahl}
\end{aligned}$$

6.5 Zusammenfassung

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, entspricht die Summe aller Zahlen einer beliebigen Zeile der magischen Zahl. Dabei kann das Anfangsfeld $(i_0 \mid j_0)$, in das die 1 geschrieben wird, beliebig gewählt werden.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{ggT}(at - bs) = 1 \\ \mathrm{ggT}(b, n) = 1 \\ \mathrm{ggT}(b - t, n) = 1 \end{array}}$$

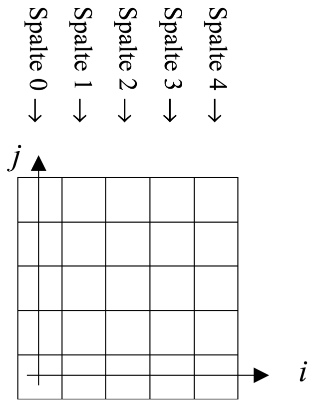
Beispiel:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ a &= 1 \\ b &= 2 \\ s &= 1 \\ t &= 3 \\ (i_0 \mid j_0) &= (1 \mid 1) \end{aligned}$$

5	16	7	23	14	→ 65
25	11	2	18	9	→ 65
20	6	22	13	4	→ 65
15	1	17	8	24	→ 65
10	21	12	3	19	→ 65

7 Spaltensumme

Damit ein Zahlenquadrat als „magisch“ gilt, müssen nicht nur die Summen jeder einzelnen Zeile der magischen Zahl entsprechen, sondern auch die der Spalten.



Anders als bei der Addition der Zeilenzahlen, bleiben die $i-$Werte in diesem Fall konstant, während sich die $j-$Werte in einer beliebigen Spalte von Feld zu Feld unterscheiden.

7.1 Formel für y in Abhängigkeit von j

Eine Definition für y in Abhängigkeit von j wird gesucht, da j nun veränderlich ist.

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$\underline{y} = \underline{[a(j - j_0) - b(i - i_0)]} \cdot (\underline{at - bs})^{-1}$ (siehe Kapitel 6.1)

7.2 Formel für z in Abhängigkeit von j

Auch für z ist eine Beschreibung in Abhängigkeit von j gesucht.

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$\underline{z} = \underline{[(t - b)(i - i_0) - (s - a)(j - j_0)]} \cdot (\underline{at - bs})^{-1}$ (siehe Kapitel 6.2)

7.3 Injektivität von y und z

Für das Berechnen der Summe der Spaltenzahlen stellt sich die Frage, wie sich y und z verändern bei einer Änderung des $j-$Wertes.

Satz 7.1. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{j} \to \underline{y}$ *injektiv.*

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{y} = \underline{y'} & \mid \cdot(\underline{at - bs}) \\
\underline{a(j - j_0) - b(i - i_0)} = \underline{a(j' - j_0) - b(i - i_0)} & \\
\underline{aj - aj_0 - bi + bi_0} = \underline{aj' - aj_0 - bi + bi_0} & \mid \underline{+aj_0}, \underline{+bi}, \underline{-bi_0} \\
\underline{aj} = \underline{aj'} & \mid \cdot(\underline{a})^{-1} \\
\underline{j} = \underline{j'} &
\end{array}
$$

□

Satz 7.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a-s, n) = 1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{j} \to \underline{z}$ *injektiv.*

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{z} = \underline{z'} & \mid \cdot(\underline{at - bs}) \\
\underline{(t - b)(i - i_0) - (s - a)(j - j_0)} = \underline{(t - b)(i - i_0) - (s - a)(j' - j_0)} & \mid \underline{-(t - b)(i - i_0)} \\
\underline{-(s - a)(j - j_0} = \underline{-(s - a)(j' - j_0)} & \mid \underline{\cdot(-1)}, \cdot(\underline{s - a})^{-1} \\
\underline{j - j_0} = \underline{j' - j_0} & \mid \underline{+j_0} \\
\underline{j} = \underline{j'} &
\end{array}
$$

□

7.4 Spaltensumme

Aus dem Satz 7.1 und dem Satz 7.2 folgt, dass bei den Zahlen X, die in den Feldern einer Spalte stehen, alle Zahlen von 0 bis $n - 1$ genau einmal sowohl als $y-$ als auch als $z-$Wert vorkommen. Da eine einzelne Zahl im Zahlenquadrat als $X = yn + z + 1$ definiert ist, lässt sich die Summe aller Zahlen in einer Spalte folgendermassen berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n \\
&= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^3 + n}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2} = \text{magische Zahl}
\end{aligned}
$$

7.5 Zusammenfassung

Wenn folgende Bedingungen eingehalten werden, ergibt die Summe aller Zahlen in einer beliebigen Spalte die magische Zahl. Auch hier kann das Anfangsfeld frei gewählt werden.

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\mathrm{ggT}(at - bs) = 1 \\
\mathrm{ggT}(a, n) = 1 \\
\mathrm{ggT}(a - s, n) = 1
\end{array}
}
$$

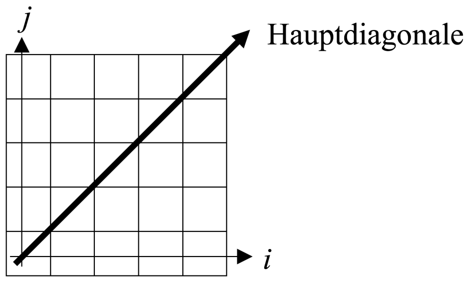
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
n &= 5\\
a &= 1\\
b &= 2\\
s &= 2\\
t &= 3\\
(i_0 \mid j_0) &= (2 \mid 2)
\end{aligned}
$$

25	9	18	2	11
4	13	22	6	20
8	17	1	15	24
12	21	10	19	3
16	5	14	23	7
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65

8 Hauptdiagonalsumme

Die Hauptdiagonale soll dasselbe Phänomen wie die Zeilen und Spalten aufweisen. Alle Zahlen, die sich auf der Hauptdiagonalen befinden, sollen miteinander addiert die magische Zahl ergeben.



Im Gegensatz zur Addition in einer beliebigen Zeile oder Spalte bleibt bei der Hauptdiagonale weder der $i-$ noch der $j-$Wert konstant. Jedoch sind beide stets gleich gross, weshalb man j durch i ersetzen kann. Es gilt: $i = j$

8.1 Formel für y in Abhängigkeit von i

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & i = i_0 + (z-y)a + ys & \cdot(-b) \\
+ & i = j_0 + (z-y)b + yt & \cdot a \\
\hline
 & -bi + ai = -bi_0 + aj_0 + y(at - bs) & +bi_0, -aj_0 \\
 & y(at - bs) = i(a-b) + bi_0 - aj_0 & \cdot(at - bs)^{-1} \\
 & y = [i(a-b) + bi_0 - aj_0] \cdot (at - bs)^{-1} &
\end{array}
$$

8.2 Formel für z in Abhängigkeit von i

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & i = i_0 + y(s-a) + za & \cdot(t-b) \\
+ & i = j_0 + y(t-b) + zb & \cdot -(s-a) \\
\hline
 & i(t-b) - i(s-a) = i_0(t-b) - j_0(s-a) + z(at - bs) & -i_0(t-b), +j_0(s-a) \\
 & z(at - bs) = i(t - b - s + a) - i_0(t-b) + j_0(s-a) & \cdot(at - bs)^{-1} \\
 & z = [i(t - b - s + a) - i_0(t-b) + j_0(s-a)] \cdot (at - bs)^{-1} &
\end{array}
$$

8.3 Injektivität von y und z

Da sowohl y als auch z von i abhängen, wird wieder ihr Verhalten bei der Änderung von i untersucht.

Satz 8.1. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a-b,n)=1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{y}$ *injektiv.*

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{y} = \underline{y'} & |\ \cdot(\underline{at-bs}) \\
\underline{i(a-b)+bi_0-aj_0} = \underline{i'(a-b)+bi_0-aj_0} & |\ \underline{-bi_0}, \underline{+aj_0} \\
\underline{i(a-b)} = \underline{i'(a-b)} & |\ \cdot(\underline{a-b})^{-1} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}
$$

$\square$

Satz 8.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a-s+t-b,n)=1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{z}$ *injektiv.*

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{z} = \underline{z'} & |\ \cdot(\underline{at-bs}), \underline{+i_0(t-b)} \\
\underline{i(t-b-s+a)+j_0(s-a)} = \underline{i'(t-b-s+a)+j_0(s-a)} & |\ \underline{-j_0(s-a)} \\
\underline{i(t-b-s+a)} = \underline{i'(t-b-s+a)} & |\ \cdot(\underline{t-b-s+a})^{-1} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}
$$

$\square$

8.4 Hauptdiagonalsumme

Aus den beiden Sätzen aus Kapitel 8.3 folgt, dass bei den Zahlen X, die in den Feldern der Hauptdiagonalen stehen, alle Zahlen von 0 bis $n-1$ genau einmal sowohl als $y-$ als auch als $z-$Wert vorkommen. Da eine einzelne Zahl im Zahlenquadrat als $X = yn+z+1$ definiert ist, lässt sich die Summe aller Zahlen in einer Zeile folgendermassen berechnen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n \\
&= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^3+n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \text{magische Zahl}
\end{aligned}
$$

8.5 Zusammenfassung

Wenn folgende Bedingungen eingehalten sind, ergibt die Summe aller Zahlen in der Hauptdiagonalen die magische Zahl. Dabei kann das Anfangsfeld beliebig gewählt werden.

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\mathrm{ggT}(at-bs)=1 \\
\mathrm{ggT}(a-b,n)=1 \\
\mathrm{ggT}(a-s+t-b,n)=1
\end{array}}
$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ a &= 2 \\ b &= 1 \\ s &= 3 \\ t &= 3 \\ (i_0 \mid j_0) &= (1 \mid 1) \end{aligned}$$

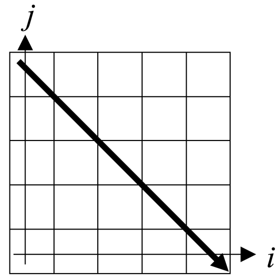
↗ 65

21	15	4	18	7
3	17	6	25	14
10	24	13	2	16
12	1	20	9	23
19	8	22	11	5

Bemerkung: Da die anderen Bedingungen auch erfüllt sind, liegt ein magisches Quadrat vor.

9 Nebendiagonalsumme

Nebst den Zahlen der Zeilen, Spalten und der Hauptdiagonalen müssen als letztes auch noch die der Nebendiagonalen miteinander addiert die magische Zahl ergeben.



Nebendiagonale

Weder der $i-$ noch der $j-$Wert sind in der Nebendiagonalen konstant. Jedoch kann man j folgendermassen durch i ausdrücken: $j = (-1)\cdot i + (n-1) \rightarrow j = -i - 1 + n \rightarrow \underline{j} = \underline{-i-1}$

9.1 Formel für y in Abhängigkeit von i

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$$\begin{array}{lll}
 & i = i_0 + (z-y)a + ys & \mid \cdot(-b) \\
+ & -i-1 = j_0 + (z-y)b + yt & \mid \cdot a \\
\hline
 & -bi - ai - a = -bi_0 + aj_0 + y(at-bs) & \mid +bi_0, -aj_0 \\
 & y(at-bs) = bi_0 - aj_0 - i(a+b) - a & \mid \cdot(at-bs)^{-1} \\
 & y = [bi_0 - aj_0 - i(a+b) - a]\cdot(at-bs)^{-1} &
\end{array}$$

9.2 Formel für z in Abhängigkeit von i

Voraussetzung: $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

$$\begin{array}{lll}
 & i = i_0 + y(s-a) + za & \mid \cdot(t-b) \\
+ & -i-1 = j_0 + y(t-b) + zb & \mid \cdot -(s-a) \\
\hline
 & i(t-b) + (i+1)(s-a) = i_0(t-b) - j_0(s-a) + z(at-bs) & \mid -i_0(t-b) \\
 & i(t-b) + (i+1)(s-a) - i_0(t-b) = -j_0(s-a) + z(at-bs) & \mid +j_0(s-a) \\
 & z(at-bs) = i(t-b+s-a) - i_0(t-b) + j_0(s-a) + s - a & \mid \cdot(at-bs)^{-1} \\
 & z = [i(t-b+s-a) - i_0(t-b) + j_0(s-a) + s - a]\cdot(at-bs)^{-1} &
\end{array}$$

9.3 Injektivität von y und z

Auch beim Addieren aller Zahlen der Nebendiagonalen weisen y und z ein gewisses Verhaltensmuster auf.

Satz 9.1. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a+b,n)=1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{y}$ *injektiv.*

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\underline{y} = \underline{y'} & \mid \cdot(\underline{at-bs}) \\
\underline{bi_0 - aj_0 - i(a+b) - a} = \underline{bi_0 - aj_0 - i'(a+b) - a} & \mid \underline{-bi_0}, \underline{+aj_0}, \underline{+a} \\
\underline{-i(a+b)} = \underline{-i'(a+b)} & \mid \underline{\cdot(-1)}, \cdot(\underline{a-b})^{-1} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}$$

□

Satz 9.2. *Wenn* $\mathrm{ggT}(a-s+b-t,n)=1$ *ist, dann ist die Abbildung* $\underline{i} \to \underline{z}$ *injektiv.*

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\underline{z} = \underline{z'} & \mid \cdot(\underline{at-bs}), \underline{-s}, \underline{+a}, \underline{+i_0(t-b)} \\
\underline{i(t-b+s-a)+j_0(s-a)} = \underline{i'(t-b+s-a)+j_0(s-a)} & \mid \underline{-j_0(s-a)} \\
\underline{i(t-b+s-a)} = \underline{i'(t-b+s-a)} & \mid \cdot(\underline{t-b+s-a})^{-1} \\
\underline{i} = \underline{i'} &
\end{array}$$

□

9.4 Nebendiagonalsumme

Aus dem Satz 9.1 und dem Satz 9.2 folgt, dass bei den Zahlen X, die in den Feldern der Nebendiagonalen stehen, alle Zahlen von 0 bis $n-1$ genau einmal sowohl als $y-$ als auch als $z-$Wert vorkommen. Da eine einzelne Zahl im Zahlenquadrat als $X = yn+z+1$ definiert ist, lässt sich die Summe aller Zahlen der Nebendiagonalen folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n \\
&= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n \\
&= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2} \\
&= \frac{n^3+n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \text{magische Zahl}
\end{aligned}$$

9.5 Zusammenfassung

Wenn folgende Bedingungen eingehalten sind, ergibt die Summe aller Zahlen in der Nebendiagonalen die magische Zahl. Hier ist das Anfangsfeld wieder beliebig zu wählen.

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ggT}(at - bs) = 1 \\ \operatorname{ggT}(a + b, n) = 1 \\ \operatorname{ggT}(a - s + b - t, n) = 1 \end{array}}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ a &= 1 \\ b &= 1 \\ s &= 3 \\ t &= 2 \\ (i_0 \mid j_0) &= (1 \mid 3) \end{aligned}$$

19	23	2	6	15
22	1	10	14	18
5	9	13	17	21
8	12	14	25	4
11	20	24	3	7

$\searrow 65$

10 Parität von n

Aus den Bedingungen in Kapitel 6.5 und 7.5 lässt sich herausfinden, ob n gerade sein kann.

Falls n gerade ist:

$\mathrm{ggT}(b, n) = 1$	$\rightarrow$	b muss ungerade sein, da ansonsten der grösste gemeinsame Teiler mindestens 2 ist.
$\mathrm{ggT}(a, n) = 1$	$\rightarrow$	a muss aus demselben Grund ebenfalls ungerade sein.
$\mathrm{ggT}(b - t, n) = 1$	$\rightarrow$	Da b bereits ungerade ist, muss t gerade sein für eine ungerade Differenz von b und t.
$\mathrm{ggT}(a - s, n) = 1$	$\rightarrow$	Da a bereits ungerade ist, muss s gerade sein für eine ungerade Differenz von a und s.
$\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$	$\rightarrow$	Sowohl at als auch bs sind aufgrund der oberen vier Feststellungen gerade. Daher ist auch ihre Differenz gerade und somit kann diese Bedingung nicht erfüllt sein.

Daher muss n ungerade sein.

11 Spezialfälle der Hauptdiagonalen

Im ganzen Kapitel wird vorausgesetzt: $n \in \mathbb{N}, n > 2, n$ ist ungerade und $\text{ggT}(at - bs, n) = 1$

Die Bedingungen $\text{ggT}(a - b, n) = 1$ und $\text{ggT}(a - s + t - b, n) = 1$, welche beide im Kapitel 8 vorausgesetzt werden, damit die Summe aller Zahlen in den Feldern der Hauptdiagonalen die magische Zahl ergibt, sind stark einschränkend. Einige Methoden, um ein magisches Quadrat herzustellen, zum Beispiel der Diagonalalgorithmus ($a = b = 1$), fallen aufgrund dieser Voraussetzungen weg. Gibt es also zu diesen Bedingungen Alternativen, sodass das Zahlenquadrat trotzdem „magisch" wird?

11.1 Umformulierung der Bedingungen

$\text{ggT}(a - b, n) \neq 1$, wenn die 6. Bedingung (siehe Kapitel 13) nicht erfüllt ist.
In diesem Fall gilt: $\text{ggT}(a - b, n) = g_6$
g_6 ist somit ein Teiler von $a - b$ und von n. Deshalb gilt:
$n = g_6 \cdot n_6$
$a - b = g_6 \cdot h_6$
Dabei sind $g_6, n_6, h_6 \in \mathbb{N}$ und es gilt: $\text{ggT}(n_6, h_6) = 1$

Analog wird auch die 7. Bedingung dargestellt, wenn sie nicht erfüllt ist.
$\text{ggT}(a - s + t - b, n) = g_7$
$n = g_7 \cdot n_7$
$a - s + t - b = g_7 \cdot h_7$
Auch hier sind $g_7, n_7, h_7 \in \mathbb{N}$ und es gilt: $\text{ggT}(n_7, h_7) = 1$

11.2 Verhalten von y

Da wir Spezialfälle der Hauptdiagonalen betrachten, kann man jene Formel als Grundlage benutzen, welche zur Beschreibung von y in der Hauptdiagonalen dient (siehe Kapitel 8.1). Nun kann man das Verhalten von y untersuchen, wenn die 6. und 7. Bedingung nicht erfüllt sind.

Lemma 11.1. *Es seien $i, i' \in [0, ..., n_6 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \to y \neq y'$*

Beweis.

$\underline{y} = \underline{y'}$	$\mid \cdot\underline{(at - bs)}$
$\underline{i(a - b) + bi_0 - aj_0} = \underline{i'(a - b) + bi_0 - aj_0}$	$\mid \underline{-bi_0}, \underline{+aj_0}$
$\underline{i(a - b)} = \underline{i'(a - b)}$	$\mid$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$ig_6h_6 = i'g_6h_6 + \lambda n$	$\mid \lambda \in \mathbb{Z}, -i'g_6h_6$
$(i - i')g_6h_6 = \lambda g_6n_6$	$\mid : g_6$
$(i - i')h_6 = \lambda n_6$	

n_6 teilt also $(i - i')h_6$. Da n_6 und h_6 jedoch teilerfremd sind (siehe Kapitel 11.1), muss n_6 ein Teiler von $i - i'$ sein. Es gilt: $-(n_6 - 1) \leq i - i' \leq n_6 - 1$. Daher muss $i - i' = 0$ beziehungsweise $i = i'$ gelten. Das bedeutet, dass n_6 verschiedene $y-$Werte auftreten.

$\square$

Da $a - b$ auch als $g_6 \cdot h_6$ dargestellt werden kann, gilt in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$: $\underline{a - b} = \underline{0}$. Also ist y in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$ konstant:

$$\underline{y} = \underline{[bi_0 - aj_0]} \cdot (\underline{at - bs})^{-1} = \underline{[i_0 - j_0]} \cdot (\underline{t - s})^{-1}$$

Hinweis: Die „Übersetzung“ von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$ ist ein Ringhomomorphismus (siehe Kapitel 3.3.2)

Das heisst: $y = y_1, y_1 + g_6, y_1 + 2g_6, ..., y_1 + (n_6 - 1)g_6$

Dabei ist y_1 ist der kleinste $y-$Wert. Da $0 \leq y \leq n-1$ gilt, gibt es höchstens n_6 unterschiedliche $y-$Werte.

Diese Erkenntnisse lassen sich durch folgenden Satz verallgemeinern:

Satz 11.1. *Es sei $\beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \beta \leq g_6$, es seien $i, i' \in [(\beta - 1)n_6, ..., \beta n_6 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \rightarrow y \neq y'$.*

Insgesamt durchläuft i folgende g_6 Intervalle:
$[0, ..., n_6 - 1], [n_6, ..., 2n_6 - 1], [2n_6, ..., 3n_6 - 1], ..., [(g_6 - 1)n_6, ..., g_6 n_6 - 1]$

In all diesen Intervallen, treten die gleichen $y-$Werte auf: $y_1, y_1 + g_6, y_1 + 2g_6, ..., y_1 + (n_6 - 1)g_6$

11.3 $y-$Summenteil

Der Summenteil, der von den $y-$Werten herkommt, beträgt also:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y \cdot n = n[g_6(y_1 + y_1 + g_6 + y_1 + 2g_6 + ... + y_1 + (n_6 - 1)g_6)]$$
$$= n\left[g_6\left(n_6 \cdot y_1 + \sum_{k=1}^{n_6-1} k \cdot g_6\right)\right] = n \cdot g_6 \left(n_6 \cdot y_1 + \frac{n_6(n_6 - 1)}{2} \cdot g_6\right)$$
$$= n^2\left(y_1 + \frac{n - g_6}{2}\right)$$

Im Idealfall sollte die Summe $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$ entsprechen. Also gilt:

$$
\begin{array}{ll}
n^2\left(y_1+\dfrac{n-g_6}{2}\right)=\dfrac{n^2(n-1)}{2} & |: n^2 \\
y_1+\dfrac{n-g_6}{2}=\dfrac{n-1}{2} & \Big| -\dfrac{n-g_6}{2} \\
y_1=\dfrac{g_6-1}{2} &
\end{array}
$$

Ausserdem gilt in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$: $\underline{y_1}=\underline{[i_0-j_0]}\cdot\underline{(t-s)}^{-1}$. Also gilt in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{[i_0-j_0]}\cdot\underline{(t-s)}^{-1}=\underline{(-1)}\cdot\underline{2}^{-1} & |\cdot\underline{(t-s)}, \underline{+j_0} \\
\underline{i_0}=\underline{j_0}+\underline{(s-t)}\cdot\underline{2}^{-1} &
\end{array}
$$

Hier sieht man, dass es im Fall $\mathrm{ggT}(a-b,n)\neq 1$ von der Wahl des Anfangsfeldes $(i_0|j_0)$ abhängt, ob das Zahlenquadrat „magisch“ wird oder nicht.

11.4 Verhalten von z

Analog zu y kann nun auch das Verhalten von z analysiert werden. Auch für die Variabel z kann man von deren Definition für die Hauptdiagonale ausgehen (siehe Kapitel 8.2).

Lemma 11.2. *Es seien $i,i'\in[0,...,n_7-1]$, dann gilt: $i\neq i'\rightarrow z\neq z'$*

Beweis.

$$
\begin{array}{ll}
\underline{z}=\underline{z'} & |\cdot\underline{(at-bs)}, \underline{+i_0(t-b)}, \underline{-j_0(s-a)} \\
\underline{i(a-s+t-b)}=\underline{i'(a-s+t-b)} & |\text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
ig_7h_7=i'g_7h_7+\lambda n & |\ \lambda\in\mathbb{Z}, -i'g_7h_7 \\
(i-i')g_7h_7=\lambda g_7n_7 & |: g_7 \\
(i-i')h_7=\lambda n_7 &
\end{array}
$$

n_7 teilt also $(i-i')h_7$. Da n_7 und h_7 jedoch teilerfremd sind (siehe Kapitel 11.1), muss n_7 ein Teiler von $i-i'$ sein. Es gilt: $-(n_7-1)\leq i-i'\leq n_7-1$. Daher muss $i-i'=0$ beziehungsweise $i=i'$ gelten. Das bedeutet, dass n_7 verschiedene $z-$Werte auftreten.

□

Da $a-s+t-b$ auch als $g_7\cdot h_7$ dargestellt werden kann, gilt in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$:

$$
\begin{array}{l}
\underline{a-s+t-b}=\underline{0} \\
\underline{t-b}=\underline{s-a} \\
\underline{a-b}=\underline{s-t} \\
\underline{at-bs}=\underline{a(b+s-a)-bs}=\underline{ab+as-a^2-bs}=\underline{(s-a)(a-b)}
\end{array}
$$

Das bedeutet, dass z in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$ konstant ist:

$$
\begin{array}{l}
\underline{z}=\underline{[j_0(s-a)-i_0(t-b)]}\cdot\underline{(at-bs)}^{-1} \\
=\underline{(j_0-i_0)}\cdot\underline{(s-a)}\cdot\underline{(s-a)}^{-1}\cdot\underline{(a-b)}^{-1} \\
=\underline{(j_0-i_0)}\cdot\underline{(a-b)}^{-1}=\underline{(j_0-i_0)}\cdot\underline{(s-t)}^{-1}
\end{array}
$$

Hinweis: Auch hier ist die Abbildung der Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus (siehe Kapitel 3.3.2)

Das heisst: $z = z_1, z_1 + g_7, z_1 + 2g_7, ..., z_1 + (n_7 - 1)g_7$

Der kleinste $z-$Wert wird als z_1 bezeichnet. Insgesamt gibt es höchstens n_7 verschiedene $z-$Werte, da $0 \leq z \leq n - 1$ gilt.

Diese Erkenntnisse lassen sich durch folgenden Satz verallgemeinern:

Satz 11.2. *Es sei $\beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \beta \leq g_7$, es seien $i, i' \in [(\beta - 1)n_7, ..., \beta n_7 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \to z \neq z'$.*

i durchläuft insgesamt folgende g_7 Intervalle:
$[0, ..., n_7 - 1], [n_7, ..., 2n_7 - 1], [2n_7, ..., 3n_7 - 1], ..., [(g_7 - 1)n_7, ..., g_7 n_7 - 1]$

In jedem Intervall treten die $z-$Werte $z_1, z_1 + g_7, z_1 + 2g_7, ..., z_1 + (n_7 - 1)g_7$ auf.

11.5 $z-$Summenteil

Die Summe der $z-$Werte muss also lauten:

$$\sum_{i=0}^{n-1} z = g_7(z_1 + z_1 + g_7 + z_1 + 2g_7 + ... + z_1 + (n_7 - 1)g_7)$$
$$= g_7 \left(n_7 \cdot z_1 + \sum_{k=1}^{n_7-1} k \cdot g_7 \right) = g_7 \left(n_7 \cdot z_1 + \frac{n_7(n_7 - 1)}{2} \cdot g_7 \right)$$
$$= n \left(z_1 + \frac{n - g_7}{2} \right)$$

Im Idealfall sollte die Summe $\frac{n(n-1)}{2}$ entsprechen. Also gilt:

$$n \left(z_1 + \frac{n - g_7}{2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \qquad |: n$$
$$z_1 + \frac{n - g_7}{2} = \frac{n-1}{2} \qquad | -\frac{n - g_7}{2}$$
$$z_1 = \frac{g_7 - 1}{2}$$

Ausserdem gilt in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$: $\underline{z_1} = \underline{(j_0 - i_0)} \cdot \underline{(s - t)}^{-1}$. Also gilt in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$:

$$\underline{(j_0 - i_0)} \cdot \underline{(s - t)}^{-1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{2}^{-1} \qquad | \cdot \underline{(s - t)}, \cdot \underline{(-1)}$$
$$\underline{i_0 - j_0} = \underline{(s - t)} \cdot \underline{2}^{-1} \qquad | \underline{+j_0} \ \underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s - t)} \cdot \underline{2}^{-1}$$

Hier sieht man, dass es im Fall $\mathrm{ggT}(a - s + t - b, n) \neq 1$ ebenfalls von der Wahl des Anfangsfeldes $(i_0 \mid j_0)$ abhängt, ob das Zahlenquadrat „magisch“ wird oder nicht.

11.6 Verifikation Hauptdiagonalsumme

Nun muss man überprüfen, ob unter den neuen Bedingungen die Summe aller Zahlen in der Hauptdiagonalen der magischen Zahl entspricht.

$$\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n$$
$$= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n$$
$$= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2}$$
$$= \frac{n^3 + n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \text{magische Zahl}$$

Diese Summe erhält man, wenn man folgenderweise das Anfangsfeld wählt:

$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/g_6$ffl$Z$
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/g_7\mathbb{Z}$

Man kann diese beiden Bedingungen zu einer zusammenfassen:

Satz 11.3. *Die Hauptdiagonalsumme stimmt mit der magischen Zahl überein, wenn im Fall* $\mathrm{ggT}(a-b, n) \neq 1$ *oder* $\mathrm{ggT}(a-s+t-b, n) \neq 1$ *das Anfangsfeld dieser Formel entspricht:* $\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ *in* $\mathbb{Z}/g_A\mathbb{Z}$*, wobei* $g_A = \mathrm{kgV}(g_6, g_7) = g_6 \cdot g_7$

Es gilt nämlich:

Satz 11.4. $\mathrm{ggT}(g_6, g_7) = 1$

Beweis.
$\mathrm{ggT}(g_6, g_7) = g > 1$
Dann gilt in $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$: $\underline{a} - \underline{b} = \underline{0}$
$\underline{a} - \underline{s} + \underline{t} - \underline{b} = \underline{0}$
Daraus folgt:
$\underline{a} = \underline{b}$
$\underline{t} - \underline{s} = \underline{0}$
Andererseits ist $\underline{at-bs}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ invertierbar. Daher muss es auch in $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ invertierbar sein. In $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ gilt:
$\underline{at-bs} = \underline{a(t-s}$
Da $\underline{t-s} = \underline{0}$ ist, ist es nicht invertierbar. Somit ist es ein Widerspruch und der ggT von g_6 und g_7 kann nicht grösser als 1 sein. □

Daraus folgt:

Korollar 11.1. $\mathrm{kgV}(g_6, g_7) = g_6 \cdot g_7$

Beweis.
$\mathrm{kgV}(g_6, g_7) \cdot \mathrm{ggT}(g_6, g_7) = g_6 \cdot g_7$
$\mathrm{kgV}(g_6, g_7) \cdot 1 = g_6 \cdot g_7$ □

Korollar 11.2. *Wenn $g_6 = n$ ist, ist $g_7 = 1$*

Beweis.
$\mathrm{ggT}(g_6, g_7) = 1 = \mathrm{ggT}(n, g_7) = g_7 = 1$ □

Wenn $g_A = n$ ist, gibt es genau n Anfangsfelder, die den Bedingungen entsprechen, sodass die Hauptdiagonalsumme magisch wird.

Wenn $g_A < n$ ist, hat jeder j_0-Wert, $0 \leq j_0 \leq n-1$, $\dfrac{n}{g}$ passende i_0-Werte, sodass das Anfangsfeld zu einem magischen Quadrat führt. Daher gibt es in diesem Fall $\dfrac{n^2}{g}$ Anfangsfelder, die in Frage kommen.

11.7 Der Fall $\mathrm{ggT}(a-b, n) = n$

Der Diagonalalgorithmus ($\underline{a} = \underline{b} = \underline{1}$), eine klassische Methode, um ein magisches Quadrat herzustellen, kann man anhand der hergeleiteten Bedingung aus Kapitel 11.6 nun nachvollziehen.

Beispiel:

$n = 5$
$a = 1, b = 1$
$s = 2, t = 3$

Nun überprüft man, welche Bedingungen erfüllt werden:

$at - bs = 1$
$b = 1$
$b - t = -2$
$a = 1$
$a - s = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a-b=0} \\ \boldsymbol{a-s+t-b=1} \end{array}\right\} g_6 = n \text{ und } g_7 = 1, \text{ die 6. Bedingung ist nicht erfüllt.}$$

$a + b = 2$
$a - s + b - t = -3$

Mit der Formel $\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\underline{Z}$ sucht man jetzt die passenden Anfangsfelder, da gilt: $g_A = g_6 \cdot g_7 = n \cdot 1 = n$

mögliche Anfangsfelder
(blau markiert)
$(i_0 \mid j_0)$
$(2 \mid 0)$
$(3 \mid 1)$
$(4 \mid 2)$
$(0 \mid 3)$
$(1 \mid 4)$
$\uparrow$
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(-1)} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{j_0 + 2}$

					$\nearrow$ 65
7	4	21	18	15	$\rightarrow$ 65
3	25	17	14	6	$\rightarrow$ 65
24	16	13	10	2	$\rightarrow$ 65
20	12	9	1	23	$\rightarrow$ 65
11	8	5	22	19	$\rightarrow$ 65
$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\searrow$ 65

Bemerkung: Die Bedingungen für die Zeilen (Kapitel 6.5), Spalten (Kapitel 7.5) und die für die Nebendiagonale (Kapitel 9.5) sind erfüllt. Daher entsteht tatsächlich ein magisches Quadrat.

11.8 Der Fall $\mathrm{ggT}(a - s + t - b, n) = n$

Auch in diesem Fall zeigt die „Anfangsfeldformel“ aus Kapitel 11.6, in welchen Feldern man beginnen muss, um ein magisches Quadrat zu erhalten.
Beispiel:

$n = 5$
$a = 2, b = 1$
$s = 1, t = 0$

Nun überprüft man, welche Bedingungen erfüllt werden:

$at - bs = -1$
$b = 1$
$b - t = 1$
$a = 2$
$a - s = 1$
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a - b = 1} \\ \boldsymbol{a - s + t - b = 0} \end{array}\right\} g_6 = 1 \text{ und } g_7 = n, \text{ die 7. Bedingung ist nicht erfüllt.}$$
$a + b = 3$
$a - s + b - t = 2$

Mit der Formel $\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s - t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\underline{Z}$ sucht man jetzt die passenden Anfangsfelder, da gilt: $g_A = g_6 \cdot g_7 = 1 \cdot n = n$

mögliche Anfangsfelder
(blau markiert)
$(i_0 \mid j_0)$
$(3 \mid 0)$
$(4 \mid 1)$
$(0 \mid 2)$
$(1 \mid 3)$
$(2 \mid 4)$
$\uparrow$
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{1} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{j_0 + 3}$

					↗ 65
14	20	21	2	8	→ 65
25	1	7	13	19	→ 65
6	12	18	24	5	→ 65
17	23	4	10	11	→ 65
3	9	15	16	22	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Bemerkung: Die Bedingungen für die Zeilen (Kapitel 6.5), Spalten (Kapitel 7.5) und die für die Nebendiagonale (Kapitel 9.5) sind erfüllt. Daher entsteht tatsächlich ein magisches Quadrat.

12 Spezialfälle der Nebendiagonalen

Im ganzen Kapitel wird vorausgesetzt: $n \in \mathbb{N}, n > 2, n$ ist ungerade und $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1$

Nicht nur die 6. und die 7. Bedingung, sondern auch die Bedingungen $\mathrm{ggT}(a+b, n) = 1$ und $\mathrm{ggT}(a-s+b-t, n) = 1$, welche beide im Kapitel 9 vorausgesetzt werden, damit die Summe aller Zahlen in den Feldern der Nebendiagonalen die magische Zahl ergibt, sind stark einschränkend. Gibt es auch zu diesen Bedingungen Alternativen, sodass das Zahlenquadrat trotzdem „magisch" wird?

12.1 Umformulierung der Bedingungen

$\mathrm{ggT}(a + b, n) \neq 1$, wenn die 8. Bedingung (siehe Kapitel 13) nicht erfüllt ist.
In diesem Fall gilt: $\mathrm{ggT}(a + b, n) = g_8$
g_8 ist somit ein Teiler von $a + b$ und von n. Deshalb gilt:
$n = g_8 \cdot n_8$
$a - b = g_8 \cdot h_8$
Dabei sind $g_8, n_8, h_8 \in \mathbb{N}$ und es gilt: $\mathrm{ggT}(n_8, h_8) = 1$

Auch die 9. Bedingung (siehe Kapitel 13) kann so dargestellt werden.
$\mathrm{ggT}(a - s + b - t, n) = g_9$
$n = g_9 \cdot n_9$
$a - s + b - t = g_9 \cdot h_9$
Auch hier sind $g_9, n_9, h_9 \in \mathbb{N}$ und es gilt: $\mathrm{ggT}(n_9, h_9) = 1$

12.2 Verhalten von y

Da wir nun Spezialfälle der Nebendiagonalen betrachten, kann man jene Formel als Grundlage benutzen, welche zur Beschreibung von y in der Hauptdiagonalen dient (siehe Kapitel 9.1). Nun kann man das Verhalten von y untersuchen, wenn die 8. und 9. Bedingung nicht erfüllt sind.

Lemma 12.1. *Es seien $i, i' \in [0, ..., n_8 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \rightarrow y \neq y'$*

Beweis.

$$\begin{array}{ll}
\underline{y} = \underline{y'} & \mid \cdot\underline{(at - bs)} \\
\underline{bi_0 - aj_0 - i(a + b) - a} = \underline{bi_0 - aj_0 - i'(a + b) - a} & \mid \underline{-bi_0}, \underline{+aj_0}, \underline{+a}, \cdot\underline{(-1)} \\
\underline{i(a + b)} = \underline{i'(a + b)} & \mid \text{in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\
ig_8h_8 = i'g_8h_8 + \lambda n & \mid \lambda \in \mathbb{Z}, -i'g_8h_8 \\
(i - i')g_8h_8 = \lambda g_8 n_8 & \mid : g_8 \\
(i - i')h_8 = \lambda n_8 &
\end{array}$$

n_8 teilt also $(i - i')h_8$. Da n_8 und h_8 jedoch teilerfremd sind (siehe Kapitel 12.1), muss n_8 ein Teiler von $i - i'$ sein. Es gilt: $-(n_8 - 1) \leq i - i' \leq n_8 - 1$. Daher muss $i - i' = 0$ beziehungsweise $i = i'$ gelten. Das bedeutet, dass n_8 verschiedene $y-$Werte auftreten.

$\square$

Da $a + b$ auch als $g_8 \cdot h_8$ dargestellt werden kann, gilt in $\mathbb{Z}/g_8\mathbb{Z}$: $\underline{a + b} = \underline{0}$. Also ist y in $\mathbb{Z}/g_8\mathbb{Z}$ konstant:

$$\underline{y} = \underline{[bi_0 - aj_0 - a]} \cdot (\underline{at - bs})^{-1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{[i_0 + j_0 + 1]} \cdot (\underline{t + s})^{-1}$$

Hinweis: Auch hier ist die Abbildung der Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/g_6\mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus (siehe Kapitel 3.3.2)

Das heisst: $y = y_1, y_1 + g_8, y_1 + 2g_8, ..., y_1 + (n_8 - 1)g_8$

Dabei ist y_1 ist der kleinste $y-$Wert. Da $0 \leq y \leq n-1$ gilt, gibt es höchstens n_8 unterschiedliche $y-$Werte.

Diese Erkenntnisse lassen sich ebenfalls verallgemeinern:

Satz 12.1. *Es sei $\beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \beta \leq g_8$, es seien $i, i' \in [(\beta - 1)n_8, ..., \beta n_8 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \rightarrow y \neq y'$.*

Insgesamt durchläuft i folgende g_8 Intervalle:
$[0, ..., n_8 - 1], [n_8, ..., 2n_8 - 1], [2n_8, ..., 3n_8 - 1], ..., [(g_8 - 1)n_8, ..., g_8n_8 - 1]$

In all diesen Intervallen, treten die gleichen $y-$Werte auf: $y_1, y_1 + g_8, y_1 + 2g_8, ..., y_1 + (n_8 - 1)g_8$

12.3 $y-$Summenteil

Der Summenteil, der von den $y-$Werten herkommt, beträgt also:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y \cdot n = n[g_8(y_1 + y_1 + g_8 + y_1 + 2g_8 + ... + y_1 + (n_8 - 1)g_8)]$$
$$= n\left[g_8\left(n_8 \cdot y_1 + \sum_{k=1}^{n_8-1} k \cdot g_8\right)\right] = n \cdot g_8 \left(n_8 \cdot y_1 + \frac{n_8(n_8 - 1)}{2} \cdot g_8\right)$$
$$= n^2\left(y_1 + \frac{n - g_8}{2}\right)$$

Im Idealfall sollte die Summe $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$ entsprechen. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
n^2\left(y_1+\frac{n-g_8}{2}\right) &= \frac{n^2(n-1)}{2} && |: n^2\\
y_1+\frac{n-g_8}{2} &= \frac{n-1}{2} && \Big|-\frac{n-g_8}{2}\\
y_1 &= \frac{g_8-1}{2}
\end{aligned}
$$

Ausserdem gilt in $\mathbb{Z}/g_8\mathbb{Z}$: $\underline{y_1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{[i_0+j_0+1]} \cdot (\underline{t+s})^{-1}$. Also gilt in $\mathbb{Z}/g_8\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
&\underline{(-1)} \cdot \underline{[i_0+j_0+1]} \cdot (\underline{t+s})^{-1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{2}^{-1} && | \cdot\underline{(-1)}, \cdot(\underline{t+s}), \underline{-j_0}, \underline{-1}\\
&\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}
\end{aligned}
$$

Hier sieht man, dass es im Fall $\mathrm{ggT}(a+b,n) \neq 1$ auch von der Wahl des Anfangsfeldes $(i_0|j_0)$ abhängt, ob das Zahlenquadrat „magisch“ wird oder nicht.

12.4 Verhalten von z

Analog zu y kann nun auch das Verhalten von z analysiert werden. Auch für die Variabel z kann man von deren Definition für die Nebendiagonale ausgehen (siehe Kapitel 9.2).

Lemma 12.2. *Es seien $i, i' \in [0, ..., n_9-1]$, dann gilt: $i \neq i' \to z \neq z'$*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&\underline{z} = \underline{z'} && | \cdot(\underline{at-bs}), \underline{+i_0(t-b)}, \underline{-j_0(s-a)}\\
&\underline{i(t-b+s-a)+s-a} = \underline{i'(t-b+s-a)+s-a} && | \underline{-s}, \underline{+a}\\
&\underline{i(t-b+s-a)} = \underline{i'(t-b+s-a)} && | \text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\
&ig_9h_9 = i'g_9h_9+\lambda n && | \lambda \in \mathbb{Z}, -i'g_9h_7\\
&(i-i')g_9h_9 = \lambda g_9 n_9 && |: g_9\\
&(i-i')h_9 = \lambda n_9
\end{aligned}
$$

n_9 teilt also $(i-i')h_9$. Da n_9 und h_9 jedoch teilerfremd sind (siehe Kapitel 12.1), muss n_9 ein Teiler von $i-i'$ sein. Es gilt: $-(n_9-1) \leq i-i' \leq n_9-1$. Daher muss $i-i'=0$ beziehungsweise $i=i'$ gelten. Das bedeutet, dass n_9 verschiedene $z-$Werte auftreten.

□

Da $a-s+b-t$ auch als $g_9 \cdot h_9$ dargestellt werden kann, gilt in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
&\underline{a-s+b-t} = \underline{0}\\
&\underline{a-s} = \underline{t-b}\\
&\underline{a+b} = \underline{t+s}\\
&\underline{at-bs} = \underline{a(a-s+b)-bs} = \underline{a^2-as+ab-bs} = \underline{(a-s)(a+b)}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, dass z in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$ konstant ist:

$\underline{z} = \underline{[-i_0(t-b)-j_0(s-a)+s-a]} \cdot (\underline{at-bs})^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{(-i_0 - j_0 - 1)} \cdot \underline{(a-s)} \cdot \underline{(a-s)}^{-1} \cdot \underline{(a+b)}^{-1} \\
&= \underline{(-i_0 - j_0 - 1)} \cdot \underline{(a+b)}^{-1} = \underline{(-i_0 - j_0 - 1)} \cdot \underline{(t+s)}^{-1}
\end{aligned}
$$

Hinweis: Auch hier ist die Abbildung der Elemente aus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus (siehe Kapitel 3.3.2)

Das heisst: $z = z_1, z_1 + g_9, z_1 + 2g_9, ..., z_1 + (n_9 - 1)g_9$

Der kleinste $z-$Wert wird als z_1 bezeichnet. Insgesamt gibt es höchstens n_9 verschiedene $z-$Werte, da $0 \leq z \leq n-1$ gilt.

Diese Erkenntnisse lassen sich wieder durch einen Satz verallgemeinern:

Satz 12.2. *Es sei $\beta \in \mathbb{N}$, $1 \leq \beta \leq g_9$, es seien $i, i' \in [(\beta-1)n_9, ..., \beta n_9 - 1]$, dann gilt: $i \neq i' \to z \neq z'$.*

i durchläuft insgesamt folgende g_9 Intervalle:
$[0, ..., n_9 - 1], [n_9, ..., 2n_9 - 1], [2n_9, ..., 3n_9 - 1], ..., [(g_9 - 1)n_9, ..., g_9 n_9 - 1]$

In jedem dieser Intervalle treten die $z-$Werte $z_1, z_1 + g_9, z_1 + 2g_9, ..., z_1 + (n_9 - 1)g_9$ auf.

12.5 $z-$Summenteil

Die Summe der $z-$Werte muss also lauten:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} z = g_9(z_1 + z_1 + g_9 + z_1 + 2g_9 + ... + z_1 + (n_9 - 1)g_9) \\
&= g_9 \left(n_9 \cdot z_1 + \sum_{k=1}^{n_9 - 1} k \cdot g_9 \right) = g_9 \left(n_9 \cdot z_1 + \frac{n_9(n_9 - 1)}{2} \cdot g_9 \right) \\
&= n \left(z_1 + \frac{n - g_9}{2} \right)
\end{aligned}
$$

Im Idealfall sollte die Summe $\frac{n(n-1)}{2}$ entsprechen. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
n \left(z_1 + \frac{n - g_9}{2} \right) &= \frac{n(n-1)}{2} && |: n \\
z_1 + \frac{n - g_9}{2} &= \frac{n-1}{2} && | - \frac{n - g_9}{2} \\
z_1 &= \frac{g_9 - 1}{2}
\end{aligned}
$$

Ausserdem gilt in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$: $\underline{z_1} = \underline{(-i_0 - j_0 - 1)} \cdot \underline{(t+s)}^{-1}$. Also gilt in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
&\underline{(-i_0 - j_0 - 1)} \cdot \underline{(t+s)}^{-1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{2}^{-1} && | \cdot \underline{(t+s)} \\
&\underline{-i_0 - j_0 - 1} = \underline{(-1)} \cdot \underline{(t+)} \cdot \underline{2}^{-1} && | \underline{+j_0}, \underline{+1}, \cdot \underline{(-1)} \\
&\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}
\end{aligned}
$$

Hier sieht man, dass es im Fall $\text{ggT}(a - s + b - t, n) \neq 1$ ebenfalls von der Wahl des Anfangsfeldes $(i_0 \mid j_0)$ abhängt, ob das Zahlenquadrat „magisch" wird oder nicht.

12.6 Verifikation Hauptdiagonalsumme

Nun muss man überprüfen, ob unter den neuen Bedingungen (Kapitel 12.3 und 12.5) die Summe aller Zahlen in der Nebendiagonalen der magischen Zahl entspricht.

$$\sum_{y=0}^{n-1} y \cdot n + \sum_{z=0}^{n-1} z + n = n \cdot \sum_{y=0}^{n-1} y + \sum_{z=0}^{n-1} z + n$$
$$= n \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + n$$
$$= \frac{n^3 - n^2 + n^2 - n + 2n}{2}$$
$$= \frac{n^3 + n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \text{magische Zahl}$$

Diese Summe erhält man, wenn man folgenderweise das Anfangsfeld wählt:

$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/g_8\mathbb{Z}$
$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/g_9\mathbb{Z}$

Man kann diese beiden Bedingungen ebenfalls wieder zu einer zusammenfassen:

Satz 12.3. *Die Nebendiagonalsumme stimmt mit der magischen Zahl überein, wenn im Fall* $\text{ggT}(a + b, n) \neq 1$ *oder* $\text{ggT}(a - s + b - t, n) \neq 1$ *das Anfangsfeld dieser Formel entspricht:* $\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ *in* $\mathbb{Z}/g_B\mathbb{Z}$*, wobei* $g_B = \text{kgV}(g_8, g_9) = g_8 \cdot g_9$

Es gilt nämlich:

Satz 12.4. $\text{ggT}(g_8, g_9) = 1$

Beweis.
$\text{ggT}(g_8, g_9) = g > 1$
Dann gilt in $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$
$\underline{a} - \underline{s} + \underline{b} - \underline{t} = \underline{0}$
Daraus folgt:
$\underline{a} = \underline{-b}$
$\underline{t} + \underline{s} = \underline{0}$
Andererseits ist $\underline{at - bs}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ invertierbar. Daher muss es auch in $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ invertierbar sein. In $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ gilt:

$\underline{at - bs} = \overline{a(t + s}$
Da $\underline{t + s} = \underline{0}$ ist, ist es nicht invertierbar. Somit ist es ein Widerspruch und der ggT von g_8 und g_9 kann nicht grösser als 1 sein. $\square$

Daraus folgt:

Korollar 12.1. $\mathrm{kgV}(g_8, g_9) = g_8 \cdot g_9$

Beweis.
$\mathrm{kgV}(g_8, g_9) \cdot \mathrm{ggT}(g_8, g_9) = g_8 \cdot g_9$
$\mathrm{kgV}(g_8, g_9) \cdot 1 = g_8 \cdot g_9$ $\square$

Korollar 12.2. *Wenn $g_8 = n$ ist, ist $g_9 = 1$*

Beweis.
$\mathrm{ggT}(g_8, g_9) = 1 = \mathrm{ggT}(n, g_9) = g_9 = 1$ $\square$

Wenn $g_B = n$ ist, gibt es genau n Anfangsfelder, die den Bedingungen entsprechen, sodass die Nebendiagonalsumme magisch wird.

Wenn $g_B < n$ ist, hat jeder j_0-Wert, $0 \leq j_0 \leq n - 1$, $\frac{n}{g}$ passende i_0-Werte, sodass das Anfangsfeld zu einem magischen Quadrat führt. Daher gibt es in diesem Fall $\frac{n^2}{g}$ Anfangsfelder, die in Frage kommen.

12.7 Der Fall $\mathrm{ggT}(a + b, n) = n$

Für den Fall $\underline{a} = \overline{-b}$ bietet nun die in Kapitel 12.6 hergeleitete Formel die Möglichkeit, trotzdem ein magisches Quadrat herzustellen.

Beispiel:

$n = 5$
$a = 1, b = -1$
$s = 2, t = 1$

Nun überprüft man, welche Bedingungen erfüllt werden:

$at - bs = 3$
$b = -1$
$b - t = -2$
$a = 1$
$a - s = -2$
$a - b = -2$
$a - s + t - b = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{a + b = 0}\\ \boldsymbol{a - s + b - t = -1}\end{array}\right\} g_8 = n \text{ und } g_9 = 1, \text{ die 8. Bedingung ist nicht erfüllt.}$$

Mit der Formel $\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sucht man jetzt die passenden Anfangsfelder, da gilt: $g_B = g_8 \cdot g_9 = n \cdot 1 = n$

mögliche Anfangsfelder
(blau markiert)
$(i_0 \mid j_0)$
$(3 \mid 0)$
$(2 \mid 1)$
$(1 \mid 2)$
$(0 \mid 3)$
$(4 \mid 4)$
$\uparrow$
$\underline{i_0} = \underline{3} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1} = \underline{3 - j_0}$

					$\nearrow$ 65
13	22	6	20	4	$\rightarrow$ 65
5	14	23	7	16	$\rightarrow$ 65
17	1	15	24	8	$\rightarrow$ 65
9	18	2	11	25	$\rightarrow$ 65
21	10	19	3	12	$\rightarrow$ 65
$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\downarrow$ 65	$\searrow$ 65

Bemerkung: Die Bedingungen für die Zeilen (Kapitel 6.5), Spalten (Kapitel 7.5) und die für die Hauptdiagonale (Kapitel 8.5) sind erfüllt. Daher entsteht tatsächlich ein magisches Quadrat.

12.8 Der Fall $\mathrm{ggT}(a - s + b - t, n) = n$

Auch in diesem Fall zeigt die „Anfangsfeldformel" aus Kapitel 12.6, in welchen Feldern man beginnen muss, um ein magisches Quadrat zu erhalten.
Beispiel:

$n = 5$
$a = 1, b = 2$
$s = 0, t = 3$

Nun überprüft man, welche Bedingungen erfüllt werden:

$at - bs = 3$
$b = 2$
$b - t = -1$
$a = 1$
$a - s = 1$
$a - b = -1$
$a - s + t - b = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a+b=3} \\ \boldsymbol{a-s+b-t=0} \end{array}\right\} g_8 = 1 \text{ und } g_9 = n, \text{ die 9. Bedingung ist nicht erfüllt.}$$

Mit der Formel $\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sucht man jetzt die passenden Anfangsfelder, da gilt: $g_B = g_8 \cdot g_9 = 1 \cdot n = n$

mögliche Anfangsfelder
(blau markiert)

$(i_0 \mid j_0)$
$(3 \mid 0)$
$(2 \mid 1)$
$(1 \mid 2)$
$(0 \mid 3)$
$(4 \mid 4)$
$\uparrow$

$$\underline{i_0} = \underline{3} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1} = \underline{3 - j_0}$$

					↗ 65
8	15	17	24	1	→ 65
21	3	10	12	19	→ 65
14	16	23	5	7	→ 65
2	9	11	18	25	→ 65
20	22	4	6	13	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Bemerkung: Die Bedingungen für die Zeilen (Kapitel 6.5), Spalten (Kapitel 7.5) und die für die Hauptdiagonale (Kapitel 8.5) sind erfüllt. Daher entsteht tatsächlich ein magisches Quadrat.

13 Zusammenfassung

Hier werden alle Bedingungen der Kapitel 6 bis 12 zusammengefasst.

$$
\begin{array}{ll}
1) & \mathrm{ggT}(at-bs,n)=1 \\
2) & \mathrm{ggT}(b,n)=1 \\
3) & \mathrm{ggT}(b-t,n)=1 \\
4) & \mathrm{ggT}(a,n)=1 \\
5) & \mathrm{ggT}(a-s,n)=1 \\
\left.\begin{array}{ll} 6) & \mathrm{ggT}(a-b,n)=1 \\ 7) & \mathrm{ggT}(a-s+t-b,n)=1 \end{array}\right\} & \text{ersetzbar durch: } \underline{i_0}=\underline{j_0}+\underline{(s-t)}\cdot\underline{2}^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}/g_A\mathbb{Z} \\
\left.\begin{array}{ll} 8) & \mathrm{ggT}(a+b,n)=1 \\ 9) & \mathrm{ggT}(a-s+b-t,n)=1 \end{array}\right\} & \text{ersetzbar durch: } \underline{i_0}=\underline{(t+s)}\cdot\underline{2}^{-1}-\underline{j_0}-\underline{1} \text{ in } \mathbb{Z}/g_B\mathbb{Z}
\end{array}
$$

Wenn alle die Bedingungen 1 bis 9 oder die jeweiligen Alternativen erfüllt sind, kann man ein magisches Quadrat herstellen.

Da nun so viele Bedingungen zusammengekommen sind, kann man sich die Frage stellen, ob zum Beispiel die Bedingungen 7 und 9 unabhängig von den anderen sind oder, ob sie aus den bereits gestellten Forderungen gefolgert werden können.

Beipiele:
1) Für $n=5$

$a=2, b=1, s=-2, t=2$

$$
\left.\begin{array}{l}
at-bs=6 \\
b=1 \\
b-t=-1 \\
a=2 \\
a-s=4 \\
a-b=1 \\
\boldsymbol{a-s+t-b=5} \\
a+b=3 \\
a-s+b-t=3
\end{array}\right\}
$$

Alle ausser der 7. Bedingung werden eingehalten, somit ist sie unabhängig von den anderen.

2) Für $n=5$

$a=1, b=2, s=0, t=-2$

$$\left.\begin{array}{l} at - bs = -2 \\ b = 2 \\ b - t = 4 \\ a = 1 \\ a - s = 1 \\ a - b = -1 \\ a - s + t - b = -3 \\ a + b = 3 \\ \boldsymbol{a - s + b - t = 5} \end{array}\right\}$$

Alle ausser der 9. Bedingung werden eingehalten, somit ist auch sie unabhängig von den anderen.

14 Die indische Regel

Eine sehr alte und klassische Methode zur Erstellung eines magischen Quadrates, die indische Regel, kann anhand der Bedingungen aus den vorhergehenden Kapiteln verifiziert werden.

Die Anleitung der indischen Regel lautet [4]:

1. Im Feld unterhalb des Mittelfeldes liegt die 1.
2. Die nächste Zahl kommt in das angrenzende Feld diagonal rechts unten.
3. Falls das nächste Feld besetzt ist, schreibt man die nächste Zahl ins Feld, das zwei unter dem zuletzt ausgefüllten Feld liegt.

Das heisst: $(i_0 \mid j_0) = (\frac{n-1}{2} \mid \frac{n-3}{2}), a = 1, b = -1, s = 0, t = -2$

$$\left.\begin{array}{l} at - bs = -2 \\ b = -1 \\ b - t = 1 \\ a = 1 \\ a - s = 1 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 1 bis 5 werden erfüllt.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a - s + t - b = 0 \\ a + b = 0 \\ a - s + b - t = 2 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 7 und 8 werden nicht erfüllt.}$$

Anfangsfeld wählen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Variablen einsetzen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{1}$
$\underline{i_0} = -\underline{j_0} - \underline{2}$
Somit ist ein lineares Gleichungssystem entstanden, welches zu lösen ist.
$\underline{j_0} + \underline{1} = -\underline{j_0} - \underline{2} \quad \mid \underline{+j_0}, \underline{-1}$
$\underline{2 \cdot j_0} = \underline{-3} \quad \mid \cdot \underline{2}^{-1}$
$\underline{j_0} = \underline{-3} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{3} \cdot (\underline{-2}^{-1}) = \underline{3 \cdot \frac{n-1}{2}} = \underline{\frac{3n-3}{2}} = \underline{\frac{n-3}{2}}$
$j_0 = \frac{n-3}{2}$
In die obere Gleichung kann nun j_0 eingesetzt werden.
$\underline{i_0} = \underline{\frac{n-3}{2}} + \underline{1} = \underline{\frac{n-1}{2}}$
$i_0 = \frac{n-1}{2}$

Somit klappt die indische Regel und $(\frac{n-1}{2} \mid \frac{n-3}{2})$ ist das einzige Anfangsfeld, das man für alle n benutzen kann, um mit den angegebenen Schritt- und

Sprungvorgaben ein magisches Quadrat zu erstellen.

Für $n = 5$

					↗ 65
11	24	7	20	3	→ 65
4	12	25	8	16	→ 65
17	5	13	21	9	→ 65
10	18	1	14	22	→ 65
23	6	19	2	15	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Für $n = 7$

							↗ 175
22	47	16	41	10	35	4	→ 175
5	23	48	17	42	11	29	→ 175
30	6	24	49	18	36	12	→ 175
13	31	7	25	43	19	37	→ 175
38	14	32	1	26	44	20	→ 175
21	39	8	33	2	27	45	→ 175
46	15	40	9	34	3	28	→ 175
↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↘ 175

Wenn man diese magischen Quadrate an ihrer mittleren Zeile spiegelt, sollte wieder ein magisches Quadrat entstehen, da einfach die Hauptdiagonale zur Nebendiagonalen wird und umgekehrt die Nebendiagonale zur Hauptdiagonalen wird.

Dabei sind die Vorgaben: $(i_0 \mid j_0) = (\frac{n-1}{2} \mid \frac{n+1}{2}), a = 1, b = 1, s = 0, t = 2$

$$\left.\begin{array}{l} at - bs = 2 \\ b = 1 \\ b - t = -1 \\ a = 1 \\ a - s = 1 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 1 bis 5 werden erfüllt.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 0 \\ a - s + t - b = 2 \\ a + b = 2 \\ a - s + b - t = 0 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 6 und 9 werden nicht erfüllt.}$$

Anfangsfeld wählen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Variablen einsetzen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} - \underline{1}$
$\underline{i_0} = -\underline{j_0}$
Somit ist ein lineares Gleichungssystem entstanden, das gelöst werden muss.
$\underline{j_0} - \underline{1} = -\underline{j_0} \quad | \underline{+j_0}, \underline{+1}$
$\underline{2 \cdot j_0} = \underline{1} \quad | \cdot\underline{2}^{-1}$

$\underline{j_0} = \underline{1} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{1 \cdot \tfrac{n+1}{2}} = \underline{\tfrac{n+1}{2}}$
$j_0 = \frac{n+1}{2}$
In die obere Gleichung kann nun j_0 eingesetzt werden.
$\underline{i_0} = \underline{\tfrac{n+1}{2}} - \underline{1} = \underline{\tfrac{n-1}{2}}$
$i_0 = \frac{n-1}{2}$

Also klappt auch diese Methode und das Anfangsfeld, welches für alle n funktioniert, liegt wie vermutet ein Feld oberhalb des Mittelfeldes, hat also die Koordinaten $(\frac{n-1}{2} \mid \frac{n+1}{2})$.

Für $n = 5$

					↗ 65
23	6	19	2	15	→ 65
10	18	1	14	22	→ 65
17	5	13	21	9	→ 65
4	12	25	8	16	→ 65
11	24	7	20	3	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Für $n = 7$

							↗ 175
46	15	40	9	34	3	28	→ 175
21	39	8	33	2	27	45	→ 175
38	14	32	1	26	44	20	→ 175
13	31	7	25	43	19	37	→ 175
30	6	24	49	18	36	12	→ 175
5	23	48	17	42	11	29	→ 175
22	47	16	41	10	35	4	→ 175
↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↓ 175	↘ 175

Es gibt noch eine weitere Methode, die diagonal nach rechts oben die Zahlen einfüllt und für alle $n =$ ungerade geeignet ist.

Anleitung [14]:

1. Im mittleren Feld der obersten Zeile liegt die 1.
2. Die nächste Zahl kommt in das angrenzende Feld diagonal rechts oben.
3. Falls das nächste Feld besetzt ist, schreibt man die nächste Zahl ins Feld, das eins unter dem zuletzt ausgefüllten Feld liegt.

Das heisst: $(i_0 \mid j_0) = (\frac{n-1}{2} \mid n-1), a = 1, b = 1, s = 0, t = -1$

$$\left.\begin{array}{l} at-bs=-1\\ b=1\\ b-t=2\\ a=1\\ a-s=1 \end{array}\right\}\text{Die Bedingungen 1 bis 5 werden erfüllt.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a-b=0\\ a-s+t-b=-1\\ a+b=2\\ a-s+b-t=3 \end{array}\right\}\text{Die Bedingungen 6 und 9 sind nicht erfüllt, wenn } 3 \mid n.$$

Da man ein Anfangsfeld für alle ungeraden n sucht, wird dieses folgendermassen ermittelt:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Variablen einsetzen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{2}^{-1}$
$\underline{i_0} = -\underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$
Somit ist wieder ein lineares Gleichungssystem entstanden, das gelöst werden muss.
$\underline{j_0} + \underline{2}^{-1} = -\underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1} \quad \mid \underline{+j_0}, \underline{+2}^{-1}$
$\underline{2 \cdot j_0} + \underline{1} = \underline{-1} \quad \mid \underline{-1}$
$\underline{2 \cdot j_0} = \underline{-2} \quad \mid \cdot\underline{2}^{-1}$
$\underline{j_0} = \underline{(-1)} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{-1} = \underline{n-1}$
$j_0 = n-1$
In die obere Gleichung kann nun j_0 eingesetzt werden.
$\underline{i_0} = \underline{n-1} + \underline{2}^{-1} = \underline{n-1+\frac{n+1}{2}} = \underline{\frac{3n-1}{2}} = underline\frac{n-1}{2}$
$i_0 = \frac{n-1}{2}$

Somit funktioniert auch diese Regel und $(\frac{n-1}{2} \mid n-1)$ ist das einzige Anfangsfeld, das man für alle ungeraden n benutzen kann, um mit den angegebenen Schritt- und Sprungvorgaben ein magisches Quadrat zu erstellen.

Für $n = 5$

Für $n = 9$

					↗ 65
17	24	1	8	15	→ 65
23	5	7	14	16	→ 65
4	6	13	20	22	→ 65
10	12	19	21	3	→ 65
11	18	25	2	9	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

									↗ 369
47	58	69	80	1	12	23	34	45	→ 369
57	68	79	9	11	22	33	44	46	→ 369
67	78	8	10	21	32	43	54	56	→ 369
77	7	18	20	31	42	53	55	66	→ 369
6	17	19	30	41	52	63	65	76	→ 369
16	27	29	40	51	62	64	75	5	→ 369
26	28	39	50	61	72	74	4	15	→ 369
36	38	49	60	71	73	3	14	25	→ 369
37	48	59	70	81	2	13	24	35	→ 369
↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↘ 369

Auch diese Quadrate kann man an ihrer mittleren Zeile spiegeln und erhält ebenfalls ein magisches Quadrat, da wieder die Haupt- und Nebendiagonale durch die Spiegelung vertauscht werden.

Dabei lauten die Angaben: $(i_0 \mid j_0) = (\frac{n-1}{2} \mid 0), a = 1, b = -1, s = 0, t = 1$

$$\left.\begin{array}{l} at - bs = 1 \\ b = -1 \\ b - t = -2 \\ a = 1 \\ a - s = 1 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 1 bis 5 werden erfüllt.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a - s + t - b = 3 \\ a + b = 0 \\ a - s + b - t = -1 \end{array}\right\} \text{Die Bedingungen 7 und 8 sind nicht erfüllt, wenn } 3 \mid n.$$

Da man wieder ein Anfangsfeld für alle ungeraden n sucht, wird dieses folgendermassen ermittelt:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} + \underline{(s-t)} \cdot \underline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\underline{i_0} = \underline{(t+s)} \cdot \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Variablen einsetzen:
$\underline{i_0} = \underline{j_0} - \underline{2}^{-1}$
$\underline{i_0} = \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1}$
Somit ist wieder ein lineares Gleichungssystem entstanden, welches gelöst wird.
$\underline{j_0} - \underline{2}^{-1} = \underline{2}^{-1} - \underline{j_0} - \underline{1} \quad \mid \underline{+j_0}, \underline{+2}^{-1}$
$\underline{2 \cdot j_0} = \underline{0} \quad \mid \cdot\underline{2}^{-1}$

$\underline{j_0} = \underline{0} \cdot \underline{2}^{-1} = \underline{0}$
$j_0 = 0$
In die obere Gleichung kann nun j_0 eingesetzt werden.
$\underline{i_0} = \underline{0} - \underline{2}^{-1} = -\underline{2}^{-1} = \underline{\frac{n-1}{2}} =$
$i_0 = \frac{n-1}{2}$

Somit funktioniert auch diese Regel und $(\frac{n-1}{2} \mid 0)$ ist das einzige Anfangsfeld, das man für alle n benutzen kann, um mit den angegebenen Schritt- und Sprungvorgaben ein magisches Quadrat zu erstellen.

Für $n = 5$

					↗ 65
11	18	25	2	9	→ 65
10	12	19	21	3	→ 65
4	6	13	20	22	→ 65
23	5	7	14	16	→ 65
17	24	1	8	15	→ 65
↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↓ 65	↘ 65

Für $n = 9$

									↗ 369
37	48	59	70	81	2	13	24	35	→ 369
36	38	49	60	71	73	3	14	25	→ 369
26	28	39	50	61	72	74	4	15	→ 369
16	27	29	40	51	62	64	75	5	→ 369
6	17	19	30	41	52	63	65	76	→ 369
77	7	18	20	31	42	53	55	66	→ 369
67	78	8	10	21	32	43	54	56	→ 369
57	68	79	9	11	22	33	44	46	→ 369
47	58	69	80	1	12	23	34	45	→ 369
↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↓ 369	↘ 369

15 Rösslisprung

Anstatt die Zahlen in deiner diagonalen Linie einzufüllen (siehe Kapitel 14), kann man auch den „Rösslisprung“ brauchen, welcher an den Zug des Springers im Schach erinnert. Dabei bewegt man sich zuerst zwei Schritte in horizontaler Richtung und dann einen in vertikaler Richtung oder umgekehrt.

15.1 Der Fall $3 \mid n$

Satz 15.1. *Wenn n ein ungerades Vielfaches von 3 ist, können höchstens 7 der 9 Bedingungen erfüllt werden.*

Beweis. Alle unterstrichenen Zahlen sind Elemente von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

2) $\mathrm{ggT}(b, n) = 1$
4) $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$
6) $\mathrm{ggT}(a - b, n) = 1$
8) $\mathrm{ggT}(a + b, n) = 1$

Es können nicht alle 4 Bedingungen erfüllt werden.
$\mathrm{ggT}(b, n) = 1 \to \underline{b} \neq \underline{0} \to \underline{b} = \underline{1}$ oder $\underline{b} = \underline{2}$
$\mathrm{ggT}(a, n) = 1 \to \underline{a} \neq \underline{0} \to \underline{a} = \underline{1}$ oder $\underline{a} = \underline{2}$
wenn $\underline{a} = \underline{b}$, dann ist $\underline{a - b} = \underline{0}$
wenn $\underline{a} \neq \underline{b}$, dann ist $\underline{a + b} = \underline{3} = \underline{0}$

3) $\mathrm{ggT}(b - t, n) = 1$
5) $\mathrm{ggT}(a - s, n) = 1$
7) $\mathrm{ggT}(a - s + t - b, n) = 1$
9) $\mathrm{ggT}(a - s + b - t, n) = 1$

Auch diese 4 Bedingungen können nicht alle erfüllt werden.
$\mathrm{ggT}(b - t, n) = 1 \to \underline{b - t} \neq \underline{0} \to \underline{b - t} = \underline{1}$ oder $\underline{b - t} = \underline{2}$
$\mathrm{ggT}(a - s, n) = 1 \to \underline{a - s} \neq \underline{0} \to \underline{a - s} = \underline{1}$ oder $\underline{a - s} = \underline{2}$
wenn $\underline{a - s} = \underline{b - t}$, dann ist $(\underline{a - s}) - (\underline{b - t}) = \underline{0}$
wenn $\underline{a} \neq \underline{b}$, dann ist $(\underline{a - s}) - (\underline{b - t}) = \underline{3} = \underline{0}$

Das heisst, dass mindestens 2 der 9 Bedingungen nicht erfüllt werden können, falls gilt: $3 \mid n$. □

15.2 Der Fall $3 \nmid n$

Für alle n, die ein Vielfaches von 3 sind, können nicht alle 9 Bedingungen erfüllt sein. Gibt es aber eine Möglichkeit, s und t so zu wählen, dass ein Zahlenquadrat $n-$ter Ordnung mit dem „Rösslisprung“ magisch erstellt wird und zwar für alle ungeraden n, die kein Vielfaches von 3 sind?

15.2.1 Methode 1

Für $n =$ ungerade und $3 \nmid n$

$a = 2, b = 1, s = 0, t = 2$

$$\left.\begin{array}{l} at - bs = 4 \\ b = 1 \\ b - t = -1 \\ a = 2 \\ a - s = 2 \\ a - b = 1 \\ a - s + t - b = 3 \\ a + b = 3 \\ a - s + b - t = 1 \end{array}\right\}$$

Da gilt: $3 \nmid n$ und $2 \nmid n$, sind alle Bedingungen für ein beliebiges n erfüllt, das den Voraussetzungen entspricht.

Bei dieser Methode kann man, anders als bei der indischen Regel (siehe Kapitel 14) bei einem beliebigen Anfangsfeld $(i_0 \mid j_0)$ beginnen. Natürlich kann man die Quadrate, welche mit dieser Methode entstehen auch spiegeln und drehen, wobei sie immer noch magisch bleiben. Daher sind unter anderem auch folgende Methoden möglich:

$a = 2, b = -1, s = 0, t = -2$ (an der mittleren Zeile gespiegelt)
$a = -2, b = 1, s = 0, t = 2$ (an der mittleren Spalte gespiegelt)
$a = 1, b = 2, s = 2, t = 0$ (an der Hauptdiagonalen gespiegelt)

Es gibt noch viele weitere, die sich davon ableiten lassen.

15.2.2 Methode 2

Eine weitere Möglichkeit mit dem „Rösslisprung“ magische Quadrate zu erstellen, bietet folgende Methode:

Für $n =$ ungerade und $3 \nmid n$

$a = 1, b = 2, s = 0, t = -1$

$$\left.\begin{array}{l}
at-bs=-1\\
b=2\\
b-t=3\\
a=1\\
a-s=1\\
a-b=-1\\
a-s+t-b=-2\\
a+b=3\\
a-s+b-t=4
\end{array}\right\}$$

Da auch hier gilt: $3 \nmid n$ und $2 \nmid n$, sind alle Bedingungen für ein beliebiges n erfüllt, das den Voraussetzungen entspricht.

Auch bei dieser Methode kann man in jedem Feld beginnen und erhält ein magisches Quadrat.

16 Konstruktion

Um selber magische Quadrate einfach herstellen zu können, kann man die 9 Bedingungen (siehe Kapitel 13) weiterentwickeln. Durch die Substitutionen $e = a - s$ und $f = b - t$ werden folgende Bedingungen übersichtlicher:

3)	$\mathrm{ggT}(b - t, n) = 1$	$\rightarrow$	$\mathrm{ggT}(f, n) = 1$
5)	$\mathrm{ggT}(a - s, n) = 1$	$\rightarrow$	$\mathrm{ggT}(e, n) = 1$
7)	$\mathrm{ggT}(a - s + t - b, n) = 1$	$\rightarrow$	$\mathrm{ggT}(e - f, n) = 1$
9)	$\mathrm{ggT}(a - s + b - t, n) = 1$	$\rightarrow$	$\mathrm{ggT}(e + f, n) = 1$

Auch die 1. Bedingung lässt sich durch die Substitution einfach formulieren:

1) $\mathrm{ggT}(at - bs, n) = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{ggT}(af - be, n) = 1$

Beweis. $af - be = a(b - t) - b(a - s) = ab - at - ab + bs = -(at - bs)$ □

Also kann man die 9 Bedingungen so formulieren:

1)	$\mathrm{ggT}(af - be, n) = 1$		
2)	$\mathrm{ggT}(b, n) = 1$	3)	$\mathrm{ggT}(f, n) = 1$
4)	$\mathrm{ggT}(a, n) = 1$	5)	$\mathrm{ggT}(e, n) = 1$
6)	$\mathrm{ggT}(a - b, n) = 1$	7)	$\mathrm{ggT}(e - f, n) = 1$
8)	$\mathrm{ggT}(a + b, n) = 1$	9)	$\mathrm{ggT}(e + f, n) = 1$

Es werden also zwei Zahlenpaare (a, b) und (e, f) gesucht, welche die gleichen Bedingungen erfüllen.

Beispiel: Man wählt ein Zahlenpaar (a, b), welches die Bedingungen 2, 4, 6 und 8 erfüllt. Man setzt $a = f$ und $b = e$, dann sind die Bedingungen 3, 5, 7 und 9 automatisch auch erfüllt. In diesem Fall ist auch die 1. Bedingung erfüllt, da gilt:
$af - be = a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$
Da sowohl $(a+b)$ als auch $(a-b)$ teilerfremd zu n sind, muss $\mathrm{ggT}(af-be, n) = 1$ gelten.

17 Schlusswort

Das Ziel dieser Arbeit war, magische Quadrate algebraisch zu behandeln, sowie Bedingungen für deren Erstellung zu formulieren. Durch die Theorie der modernen Algebra habe ich neun solche Forderungen aufstellen können (siehe Kapitel 13), sowie zwei Spezialfälle und bereits bestehende Methoden geprüft.

Während des Arbeitsprozesses ist mir das Ausmass dieses Themas klargeworden. In der mir zur Verfügung gestandenen Zeit habe ich einige Bedingungen herausgefunden, jedoch gäbe es noch weitere Spezialfälle, die zu untersuchen sind.

Literatur

[1] Uni Kaiserslautern Andreas Gathmann. Algebraische strukturen. https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/ags-2017/ags-2017.pdf#page=30&zoom=auto,-26,139. Eingesehen am 30. September 2019.

[2] Uni Bremen. Kongruenz und modulorechnung. http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/ArithmAP0809/Material/SkriptWiSe4_KongMod.pdf. Eingesehen am 15. Oktober 2018.

[3] Balz Bürgisser. *Lineare diophantische Gleichungen.*

[4] Balz Bürgisser. Magische quadrate (unveröffentlicht).

[5] Uni Hamburg. Surjektive, injektive und bijektive funktionen. https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0607/vorl03_ana.pdf. Eingesehen am 27. Dezember 2018.

[6] Vladimir Karpenko. Between magic and science: Numerical magic squares. *Ambix*, 1993.

[7] Lugowski-Wienert. *Grundzüge der Algebra Teil 1.* B.G. Teubner.

[8] Lugowski-Wienert. *Grundzüge der Algebra Teil 2.* B.G. Teubner.

[9] Jaques Sesiano. Construction of magic squares using the knight's move in islamic mathematics. *Archive for History of Exact Science*, 2003.

[10] Jaques Sesiano. *Magic Squares.* Springer, 2019.

[11] Christian Spannagel. Restklassen und körper. https://www.youtube.com/watch?v=P1LTElH7Kjw&list=PL6_AeYXBHF0Pw7eYyYbrHIuqxiFkAONUO&index=7. Eingesehen am 16. September 2018.

[12] Christian Spannnagel. Restklassen und algebraische strukturen. https://www.youtube.com/watch?v=91bTabKYDrE&list=PL6_AeYXBHF0Pw7eYyYbrHIuqxiFkAONUO. Eingesehen am 25. August 2018.

[13] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra Gruppen-Ringe-Körper*, volume 4. Springer.

[14] Warblow. Die indische methode. http://www.warblow.de/DeSpAdditional-IV-dot-Die-indische-Methode-article-45-sop-fpdfpage.html. Eingesehen am 26. November 2018.

[15] Wikipedia. Homomorphismus. https://de.wikipedia.org/wiki/Homomorphismus#Homomor%20phismen_algebraischer_Strukturen. Eingesehen am 30. September 2019.

[16] Wikipedia. Ringhomomorphismus. https://de.wikipedia.org/wiki/Ringhomomorphismus. Eingesehen am 30. September 2019.