

Problemlösungsstrategien in der Mathematik

Workshop TMU Kanti Sursee

Dima Nikolenkov

MINT-Lernzentrum, ETH

13 September 2023

- 1 Systematisches Probieren
- 2 Rückwärtsarbeiten
- 3 Fallunterscheidung
- 4 Spielraum
- 5 Mustererkennung
- 6 Analogiebildung

- Systematisches Probieren
- Rückwärtsarbeiten
- Fallunterscheidungen
- Reduktion des Spielraums und Extremalelemente
- Mustererkennung
- Analogiebildung
- Invarianzprinzip
- Vermutung, Test, Gegenbeispiel, Vermutung, Beweis

$$3x + 2y = 200$$

Teufelsbrücke

$$(n^3 - n)$$

Clueless Sudoku

Summe der ungeraden Zahlen

Hyperwürfel

Chamäleons

Flavius

Was kann man tun?

- Versuche EINFACHERE / KLEINERE Aufgabe zu lösen.
- Finde den KLEINSTEN / GRÖSSTEN Beispiel.
- Zerlege die Aufgabe in einzelne Schritte
- Analysiere Teilergebnisse
- Spezifiziere oder verallgemeinere
- Reduziere eine Aufgabe zu einer, die du schon kennst / gelöst hast.

Überblick

Example

Wie viele Lösungen in $\mathbb{N}$ hat die Gleichung $3x + 2y = 200$?

- Testen, probieren.
- Finde eine oder andere Lösung.
- Was kann über Parität von x behaupten?
- Wie gross kann x werden?
- Für JEDE gerade x , gibt es eine Lösung.
- Es gibt insgesamt 33 Lösungen – $\{(2, 97), (4, 94), \dots, (66, 1)\}$

$$x = 40, y = 40$$

Idee: Symmetrie

x ist gerade

Idee: Mod Rechnung

$$x < 67$$

Idee: Schätzung

$$y = 100 - \frac{3}{2}x$$

Technik

Example

Der Teufel sagte zu einem Mann: "Wenn du über diese Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln, doch musst du jedes Mal, wenn du zurückkommst, 12 Taler ins Wasser werfen." Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er kein Geld mehr. Wie viel hatte er anfangs?

- Wie viel Geld **höchstens** könnte es sein?

$$G < 12$$

Idee: Schätzung

- Wie hat es bei letzten Mal ausgesehen?

$$G = 6$$

- Wie war es bei vorletztem Mal?

$$G = 9$$

- Lösung:

$$G = 10.5$$

$$0 = 12 - 12 \leftarrow \boxed{3} \quad 6 = 18 - 12 \leftarrow \boxed{2} \quad 9 = 21 - 12 \leftarrow \boxed{1} \quad 10.5$$

Überblick

Teilbarkeit vom Term $n^3 - n$

Example

Beweise, dass für jede natürliche Zahl n den Term $n^3 - n$

a) gerade ist

b) durch 3 teilbar ist.

- Teil a): Wie viele Fälle?

2

Idee: Gerade-ungerade $\equiv n \pmod{2} = \{0, 1\}$

- **Fall 1:** n ist gerade $\rightarrow n^3$ ist gerade $\Rightarrow n^3 - n$ ist gerade

- **Fall 2:** n ist ungerade $\rightarrow n^3$ ist ungerade $\Rightarrow n^3 - n$ ist gerade

□

- Teil b): Wie viele Fälle?

3

Idee: $n \pmod{3} = \{0, 1, 2\}$

- **Fall 1:** $n = 0 \pmod{3} \rightarrow n^3 = 0 \pmod{3} \Rightarrow n^3 - n = 0 \pmod{3}$

- **Fall 2:** $n = 1 \pmod{3} \rightarrow n^3 = 1 \pmod{3} \Rightarrow n^3 - n = 0 \pmod{3}$

- **Fall 3:** $n = 2 \pmod{3} \rightarrow n^3 = 2 \pmod{3} \Rightarrow n^3 - n = 0 \pmod{3}$

□

Alternative: $n^3 - n = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ a) und b) folgt automatisch.

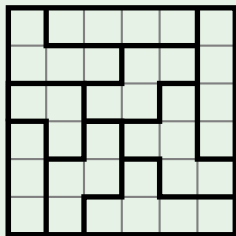
Überblick

Clueless 6×6 Sudoku

Example

Fülle die Tabelle mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so, dass

- Jede Zeile und jede Spalte die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau ein Mal enthalten,
- Die Zahlen in jedem der fett umrandeten Gebiete dieselbe Gesamtsumme aufweisen.



- Wie gross ist die Summe **ALLER** Zahlen? $6 \cdot (1 + \dots + 6) = 126$
Idee: Globale Struktur
- Wie gross ist die Summe der Zahlen in **einem** Gebiet?
 $S = 126 : 9 = 14$
- Mit welchen Gebieten soll man anfangen?
Gebiete mit 3 Zellen
Idee: Suche Extremalelemente

Lösung Clueless 6×6 Sudoku

Extremalelement – 3 Zellen / alle verschieden

Extremalelement – 3 Zellen / 2 dürfen gleich sein

2	1	3	4	6	5
1	5	6	3	4	2
4	6	2	5	3	1
3	4	5	2	1	6
6	2	4	1	5	3
5	3	1	6	2	4

$$14 = 3 + 5 + 6$$

$$14 = 4 + 4 + 6$$

$$14 = 1 + 2 + 5 + 6$$

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$14 = 1 + 2 + 5 + 6 = 1 + 3 + 4 + 6$$

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$14 - 6 = 9 = 1 + 2 + 5$$

Summe der ungeraden Zahlen

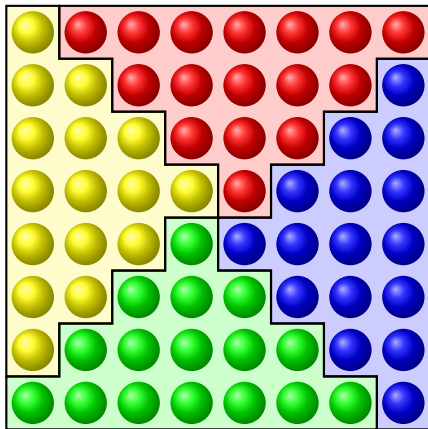
Example

Bestimme die Summe der ersten 100 ungeraden Zahlen.

- $1 = 1^2$
- $1 + 3 = 4 = 2^2$
- $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
- Vermutung / Beweis $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- Lösung: $1 + 3 + 5 + \dots + 2 \cdot 100 - 1 = 100^2 = 10000$
- **Methoden:** Summe einer AF / Geometrie (Ecken) / Induktion

Überblick

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



$$n = 4$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{4} \cdot (2n)^2 = n^2$$

Darstellung $n = x^2 - y^2$

Example

Welche Zahlen können als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden?

z.B. $4 = 2^2 - 0^2$, $11 = 6^2 - 5^2$, bei 2 geht es nicht.

- Testen: $1 = 1^2 - 0^2$, 2 hmm – NO, $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2^2 - 0^2$, $5 = 3^2 - 2^2$
- Muster: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, **Aha!** $7 = 4^2 - 3^2$, etc
- **Vermutung:** bei ungeraden wird es gehen.

Ungerade: $2n - 1$, Differenz zweier Quadratzahlen:

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$



- Wie ist es mit geraden Zahlen?

2 - No, $4 = 2^2 - 0^2$, **6 - No**, $8 = 3^2 - 1^2$, **10 - No**, $12 = 4^2 - 2^2$, **14 - No**

- **Vermutung:** **A.** $4n$ geht, **B.** $4n + 2$ geht nicht.

A.: $4n : n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$



B.: $4n + 2$. Es gilt $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

und x und y müssen **beide gerade oder beide ungerade** sein.

Dann ist die RS durch 4 teilbar, da jede Klammer gerade ist.



Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem 4–dim Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem 4–dim Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem 4–dim Würfel?
- Wie viele **3 – d Würfel** (Dimension **3**) gibt es in einem 4–dim Würfel?
- Wie viele **k–Würfel** (Dimension **k**) $W_{k,n}$ gibt es in einem n –Würfel?
- Wie bekommt man dazugehörigen Formeln?

Example

Auf einer Insel leben 13 **blaue**, 15 weisse und 17 **rote** Chamäleons. Immer wenn sich zwei verschiedenfarbige Tiere treffen, ändern sie ihre Farbe in die dritte. Kann es sein, dass irgendwann alle Chamäleons dieselbe Farbe haben?

Überblick

Alles zusammen – Flavius

n Krieger stehen im Kreis.

Wir töten jeden zweiten von n Kriegeren und gehen davon aus, dass der Egoist Flavius nur den letzten Glücksplatz sucht.

Wir bezeichnen diese Nummer mit $J(n)$.

- 1 Bestimme die Glücksnummer $J(2)$, $J(3)$, $\dots$, $J(12)$ für eine Gruppe mit 2, 3, 4, $\dots$ 12 Kriegeren.
- 2 Stelle eine Vermutung über die Parität der Glücksnummer auf und begründe sie.
- 3 Für welche Zahlen n lässt sich $J(n)$ einfach berechnen?
- 4 Stelle n und $J(n)$ im Binärsystem als Tabelle mit zwei Zeilen dar, und suche den Zusammenhang.
- 5 Berechne $J(100)$ und $J(1000)$.
- 6 Versuche die allgemeine Formel $J(n)$ zu finden.

Flavius – Lösungsprozess

Testphase – n und $J(n)$ systematisch dargestellt

n_2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3
$J(n)_2$	1	1	11	1	11	101	111	1	11	101	111	1001	1011	1101	1111	1	11

EINFACHE $J(n)$? Für WELCHE n ? Warum? 2-er Potenz!

2-er Potenzen $\rightarrow$ Binäre Darstellung von n und $J(n)$

Kann man hier ein Muster erkennen?

Wo wird es 1?

1: 1, 10, 100, .

Wo wird es 3?

3: 11, 101, 1001, .

Wo bleibt es?

=: 1, 11, 111, 1111, .

Rest?

Allgemein?

Überblick

Flavius – Allgemeine Formel und WARUM

n_2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3
$J(n)_2$	1	1	11	1	11	101	111	1	11	101	111	1001	1011	1101	1111	1	11

Muster? 2: $10 \rightarrow 1$, 5: $101 \rightarrow 11$, 7: $111 \rightarrow 111$, 12: $1100 \rightarrow 1001$

Letzte Ziffer? Immer 1

2-er Potenzen: 1, 10, 100, 1000, ... Werden zu 1

1,3,7,15: 1, 11, 111, 1111, ... Bleiben 1, 11, 111, 1111, ...

3,5,9,17: 11, 101, 1001, 10001, ... Werden zu 11

ALLGEMEIN? Nimm 1 von vorne und hänge es hinten an!

WARUM? Kill BIS eine 2-er Potenz bleibt

Führe diese Rechnung in binär System aus, berechne $J(n)_2$