

Hyperwürfel im Gymnasialunterricht

TMU Kanti Sursee

Dima Nikolenkov
ETH Zürich

13 September 2023

Überblick

- Konstruktion – Geometrie

Konstruktion

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra

Konstruktion

Binomische Formel

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- **Beschreibung im KS – Lineare Funktionen**

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- **Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation**
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

Untermengen

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre
- Anzahl k -Würfel in einem n -Würfel – Kombinatorik

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

Pascal'sche Dreieck

Untermengen

Kombinatorik

Überblick

- Konstruktion – Geometrie
- Binomische Formel – Algebra
- Beschreibung im KS – Lineare Funktionen
- Pascal'sche Matrix und Hyperwürfel – Matrizen Multiplikation
Wie sieht man Matrizen Multiplikation?
- Anzahl Untermengen – Mengenlehre
- Anzahl k -Würfel in einem n -Würfel – Kombinatorik
- Fragen

Konstruktion

Binomische Formel

Hyperwürfel im KS

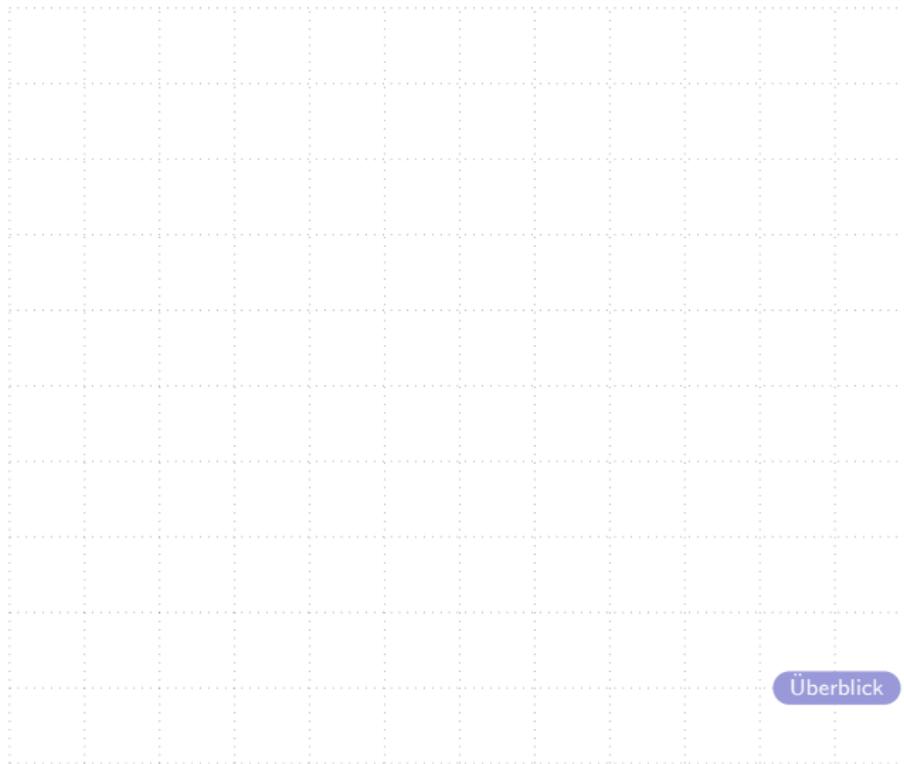
Pascal'sche Dreieck

Untermengen

Kombinatorik

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim
 $n = 0$

•
(0)

Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim
 $n = 0$



Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

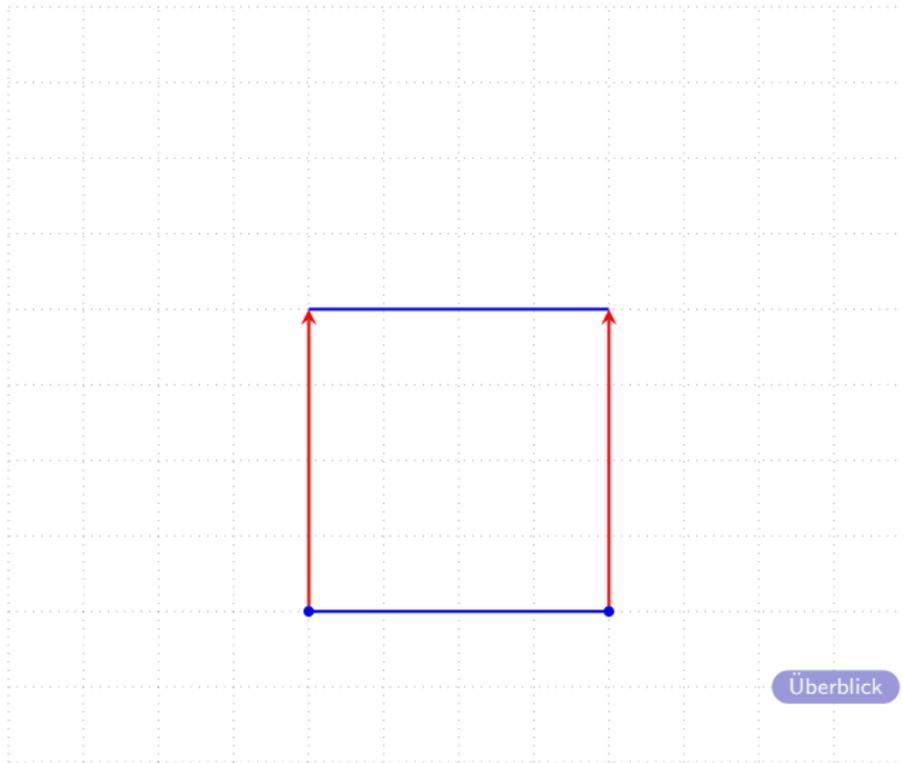
Dim
 $n = 1$



Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

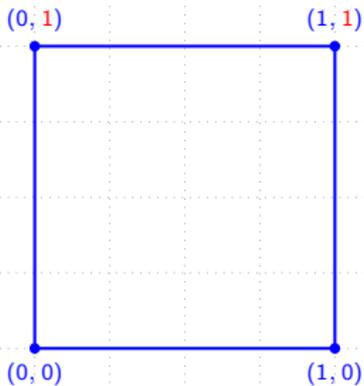


Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim
 $n = 2$

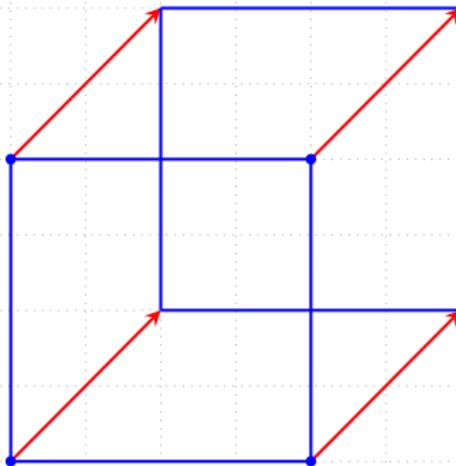


Überblick

Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

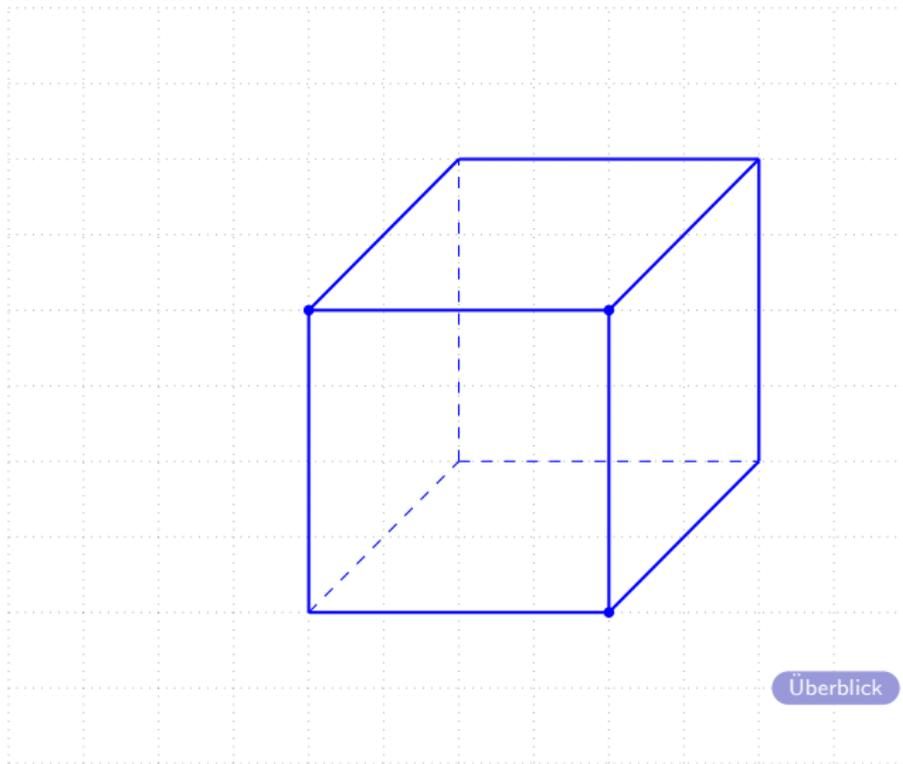
Dim
 $n = 3$



Überblick

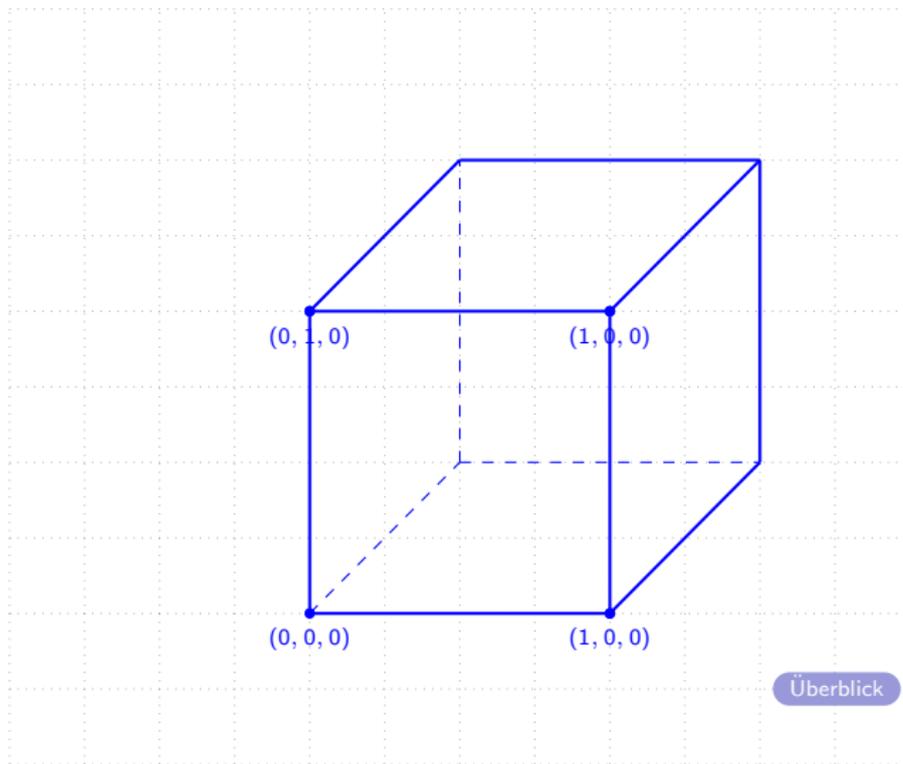
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



Konstruktion eines 4-d Würfels

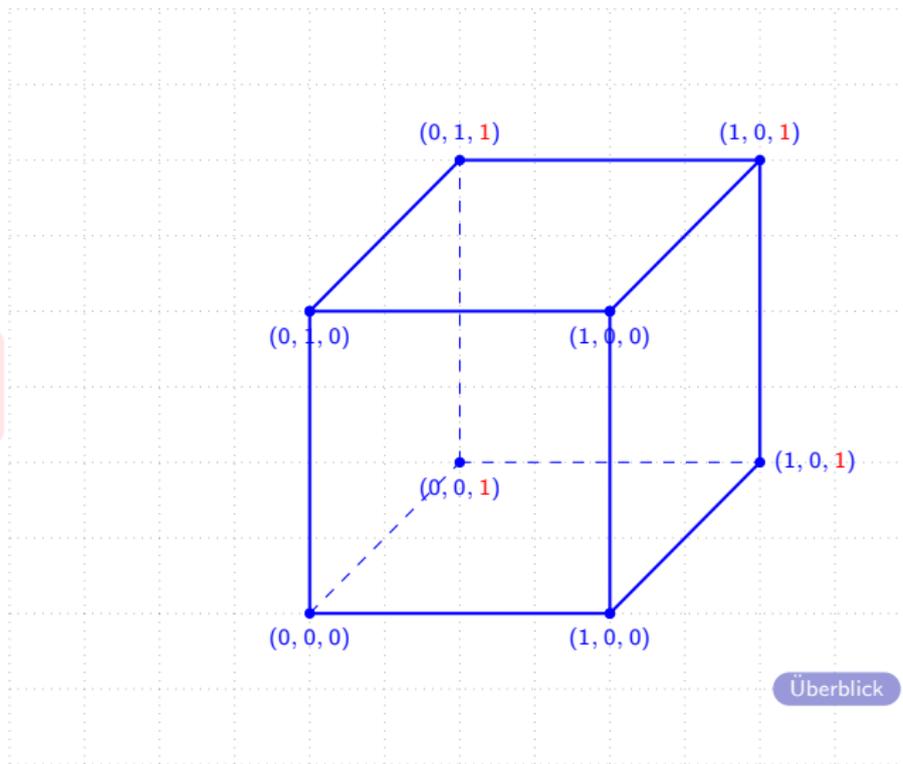
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

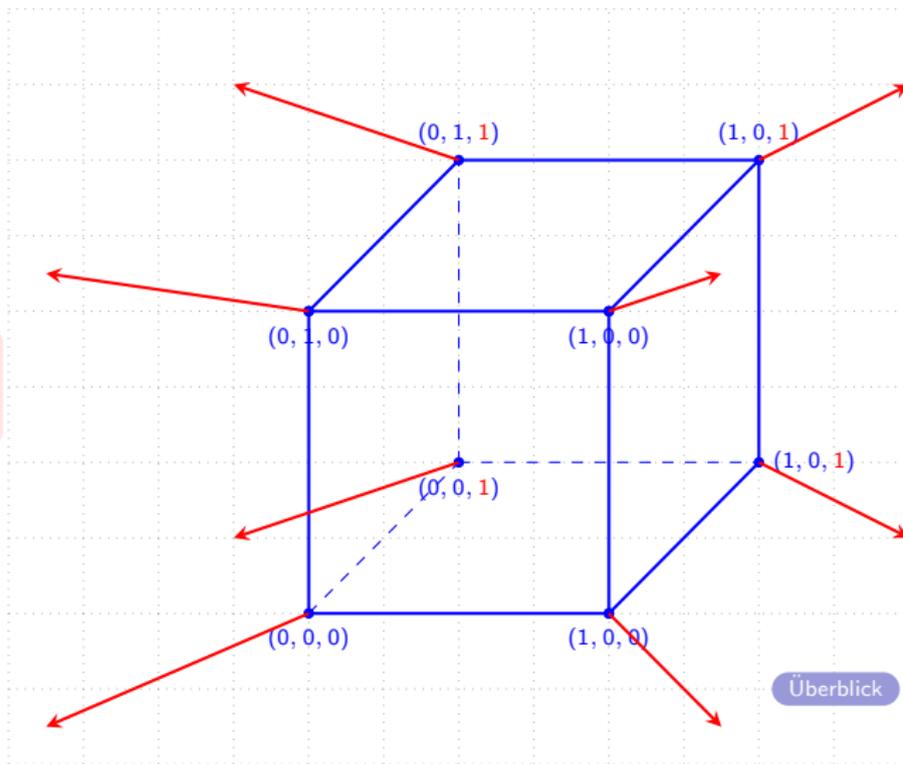
Dim
 $n = 3$



Konstruktion eines 4-d Würfels

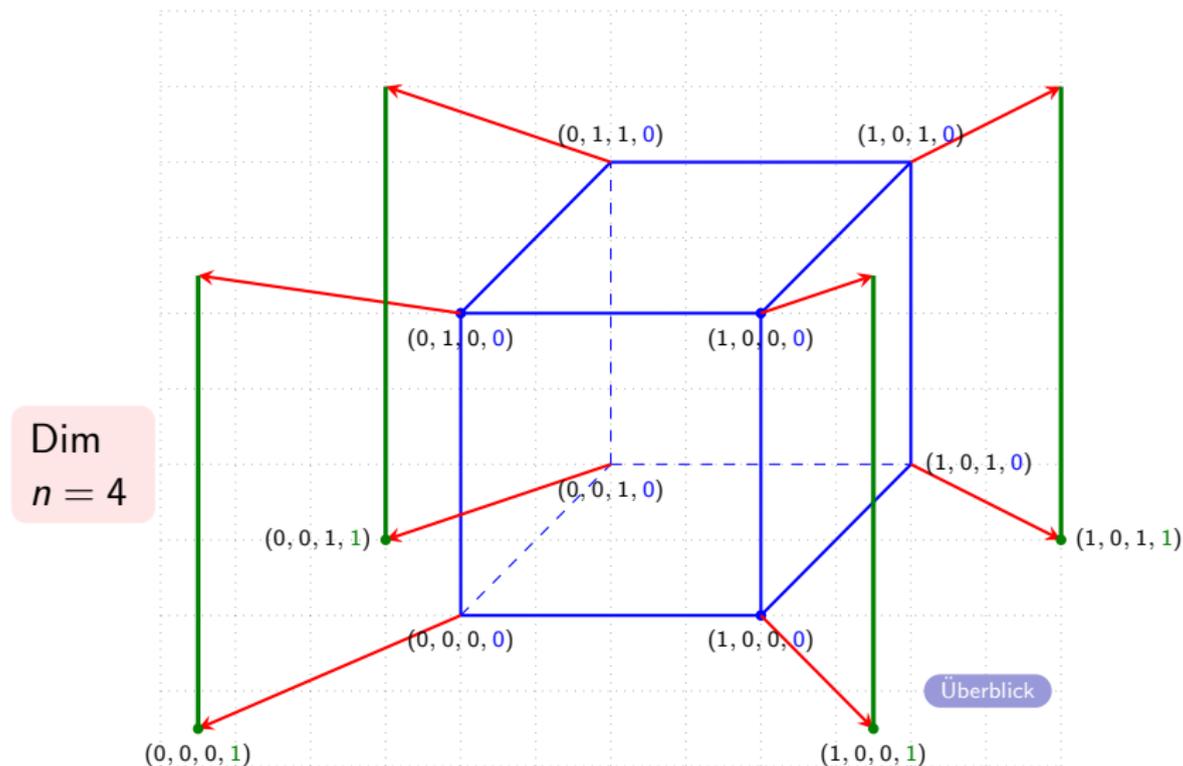
Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.

Dim
 $n = 3$



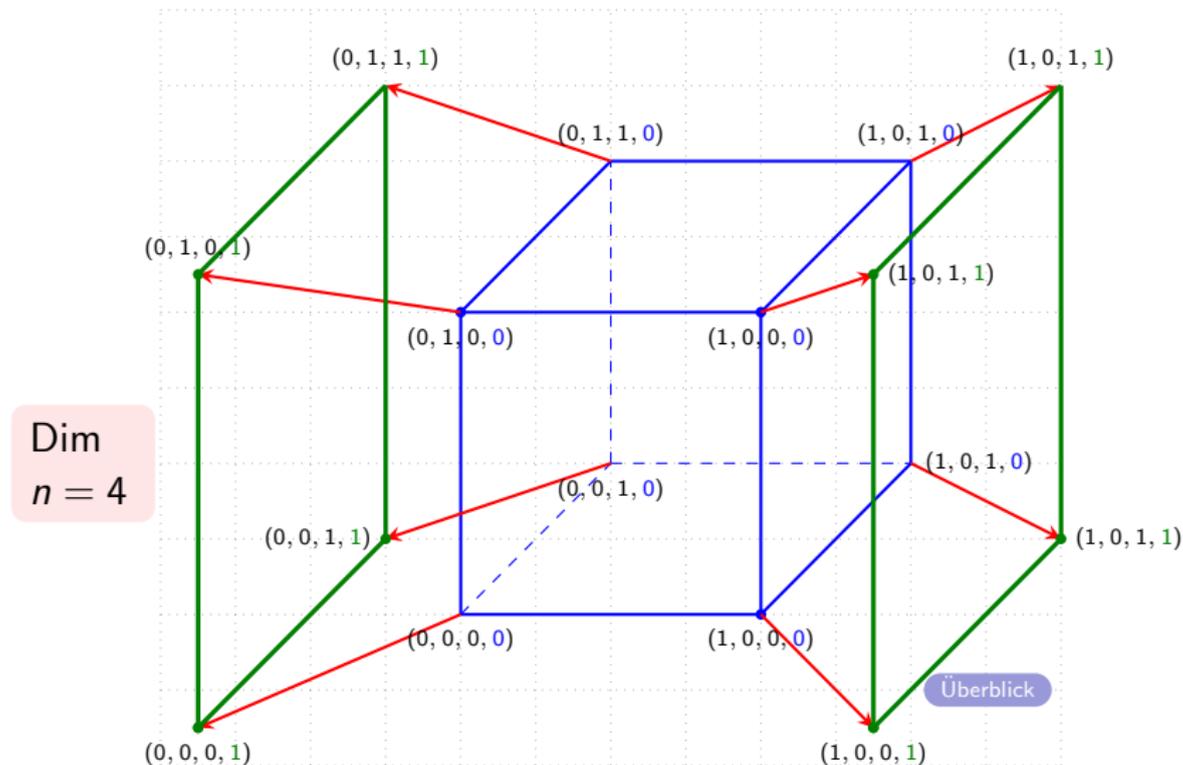
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



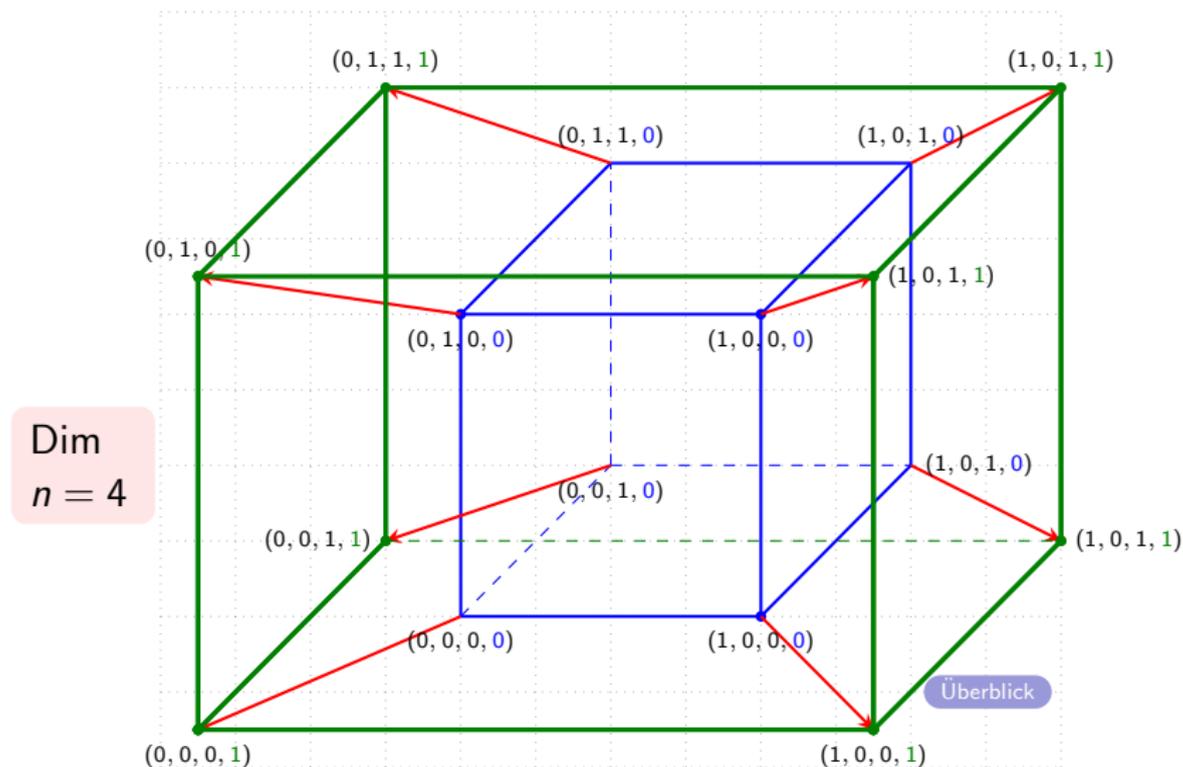
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



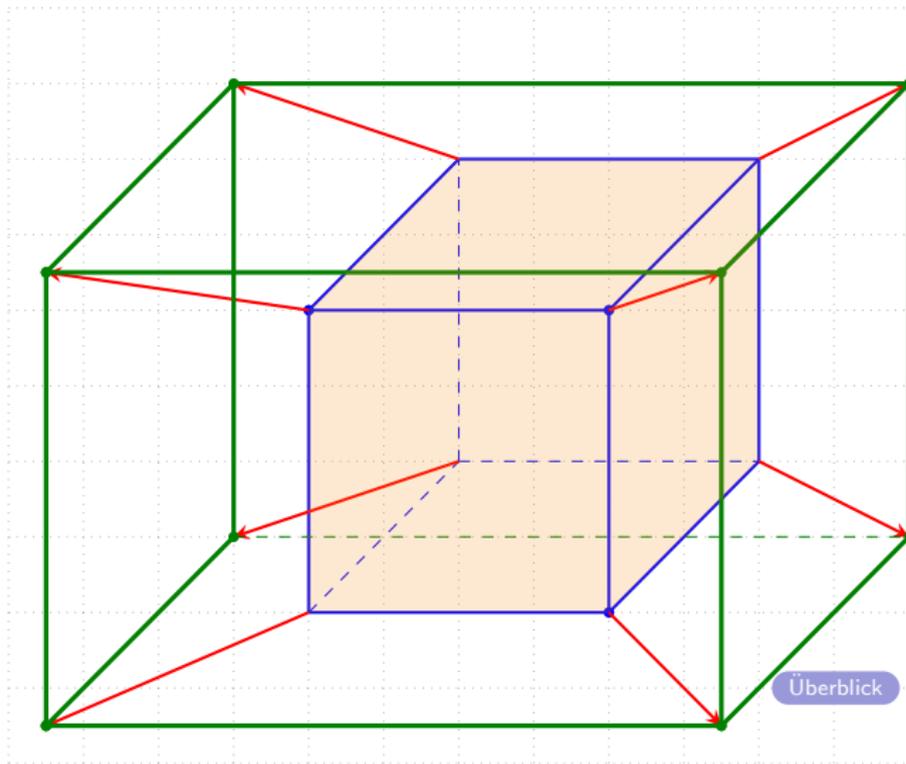
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



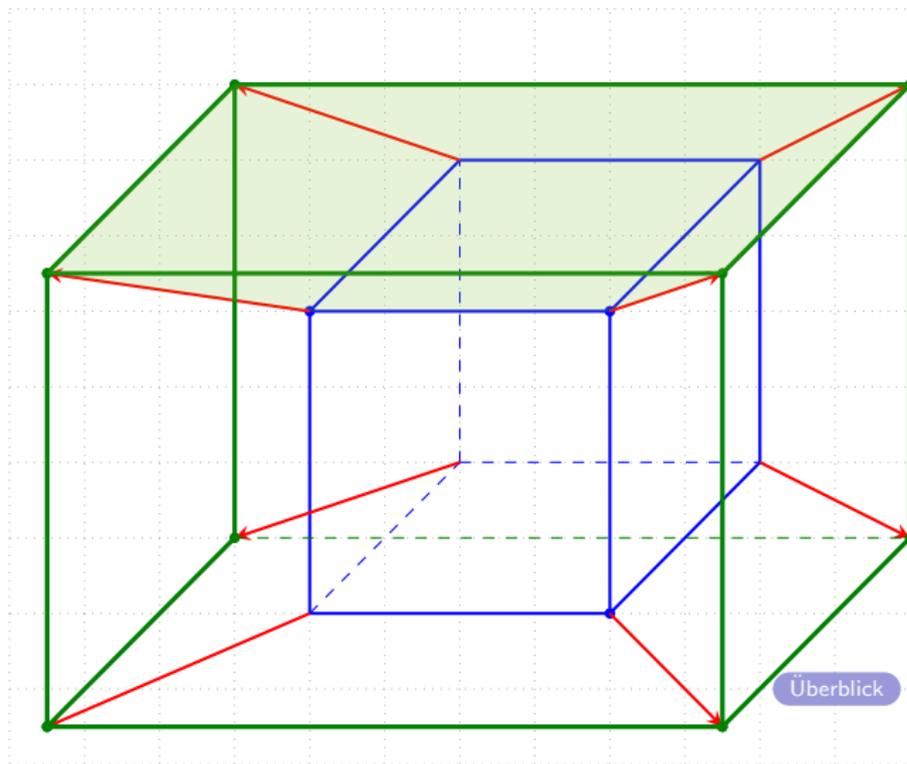
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



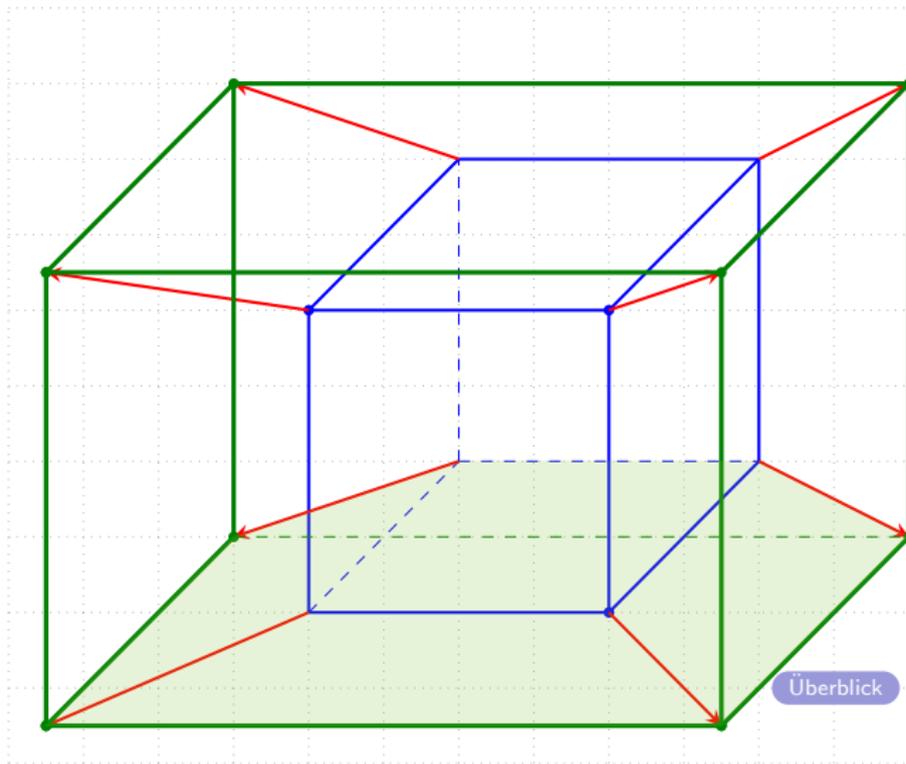
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



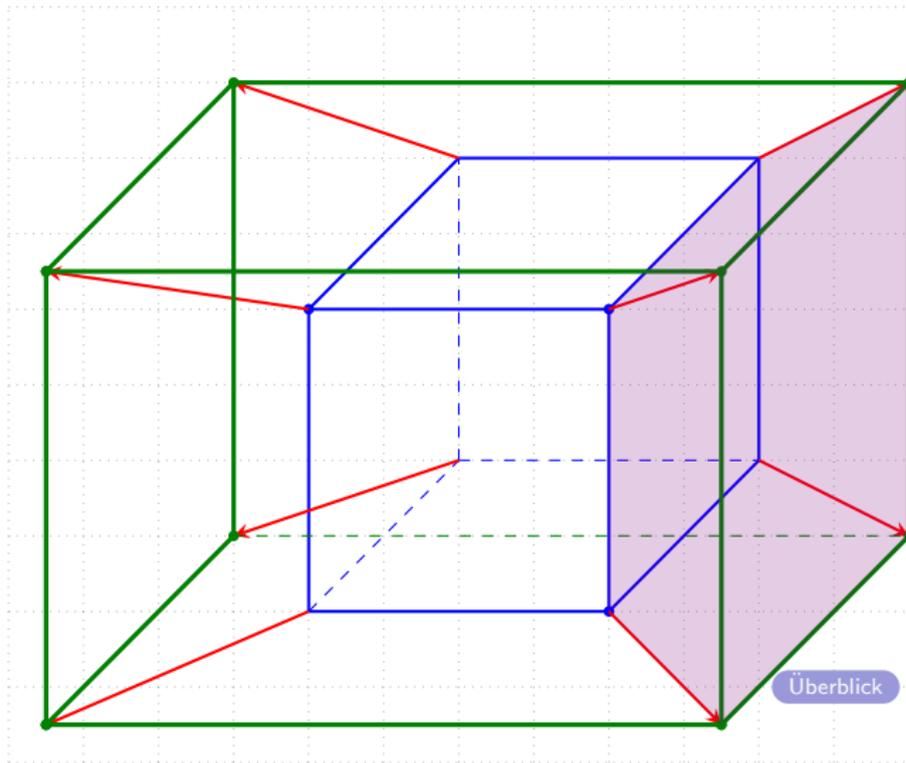
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



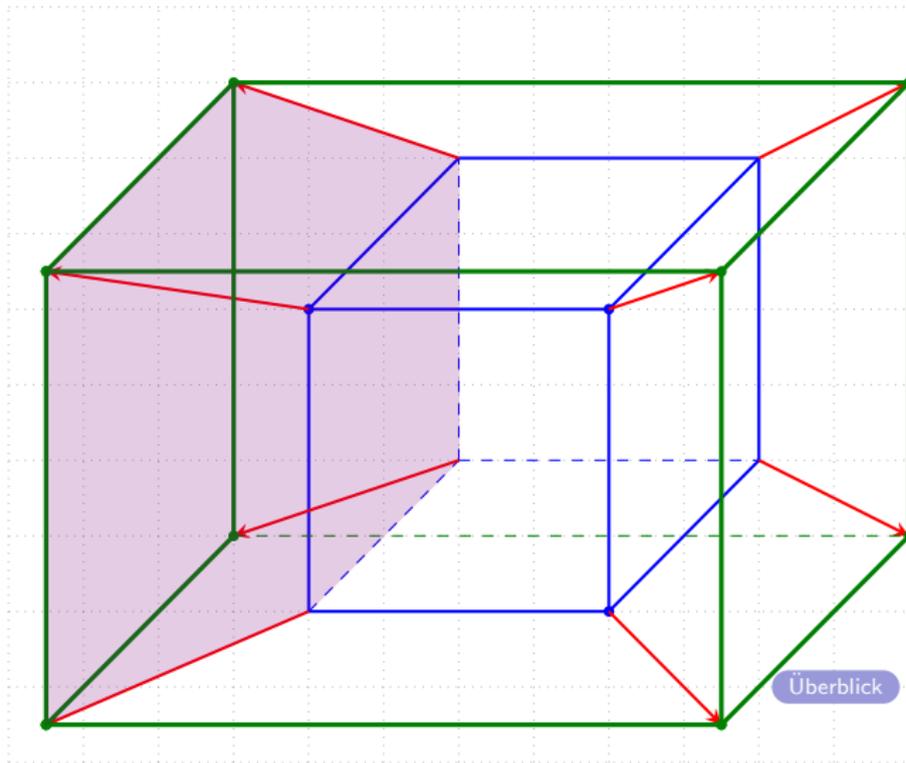
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



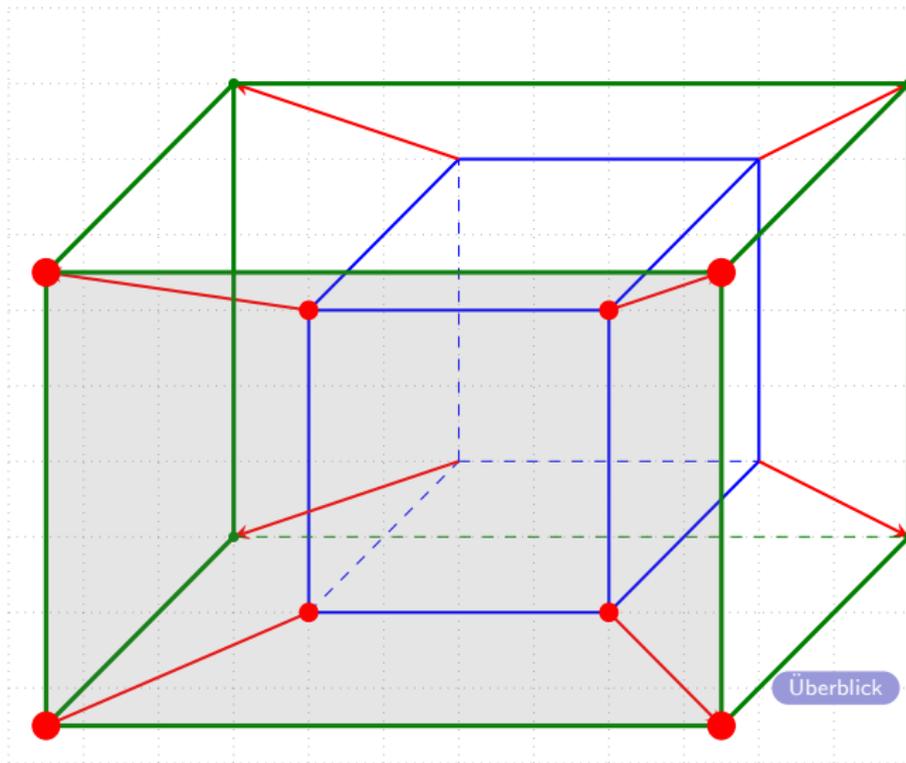
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



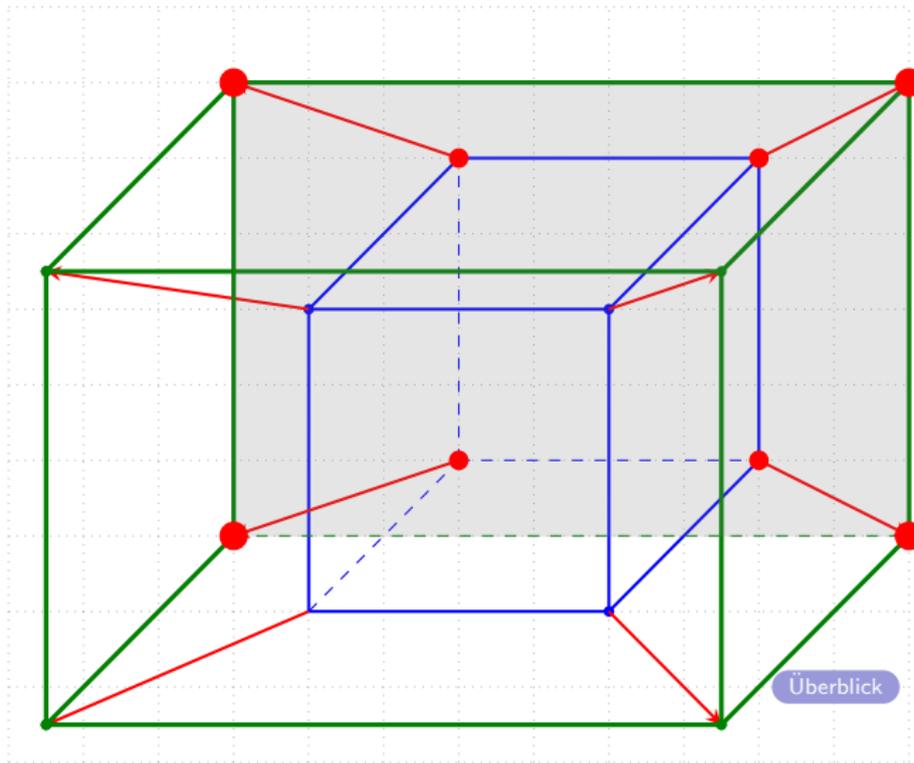
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



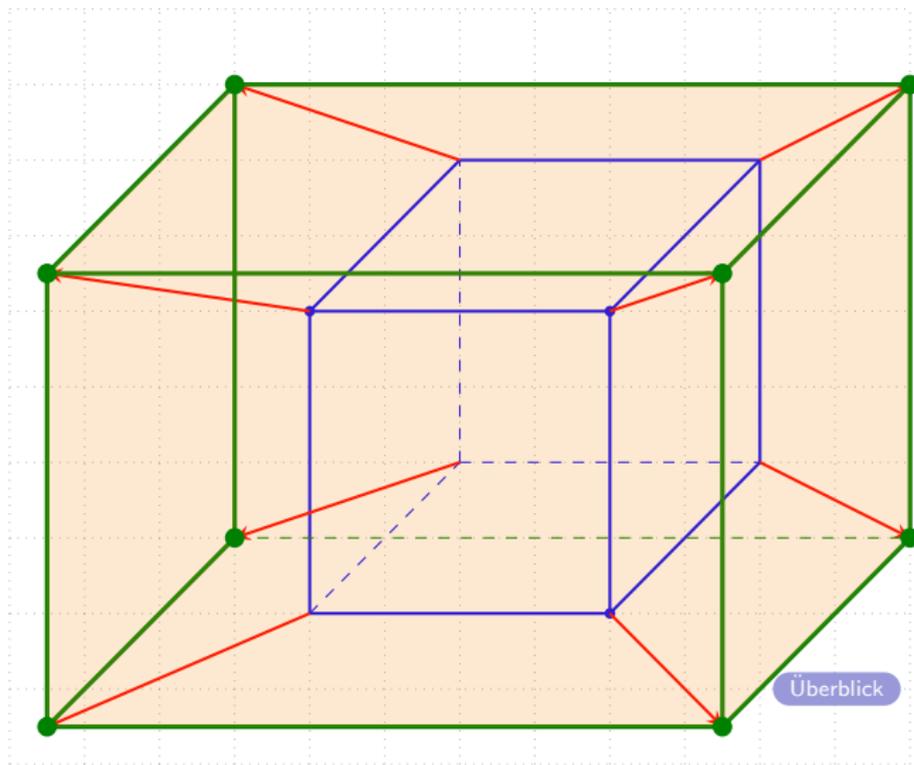
Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



Konstruktion eines 4-d Würfels

Wir bauen den 4-dimensionalen Würfel schrittweise auf.



Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele Ecken (Dimension 0) gibt es in einem n -Würfel?

Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension 0) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension 1) gibt es in einem n -Würfel?

Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension 0) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension 1) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension 2) gibt es in einem n -Würfel?

Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **k -Würfel** (Dimension **k**) $W_{k,n}$ gibt es in einem n -Würfel?

Wofür könnte man sich interessieren?

Fragen:

- Wie viele **Ecken** (Dimension **0**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Kanten** (Dimension **1**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **Flächen** (Dimension **2**) gibt es in einem n -Würfel?
- Wie viele **k -Würfel** (Dimension k) $W_{k,n}$ gibt es in einem n -Würfel?
- **Wie bekommt man dazugehörigen Formeln?**

Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}(x + 2)^0 = 1$$

•

$$e = 1$$

Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0} (x + 2)^0 = 1$$



$$e = 1$$

$${}^{n=1} (x + 2)^1 = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}(x + 2)^0 = 1$$



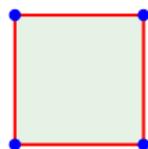
$$e = 1$$

$${}^{n=1}(x + 2)^1 = x + 2$$



$$e = 2$$
$$k = 1$$

$${}^{n=2}(x + 2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$



$$e = 4$$
$$k = 4$$
$$f = 1$$

Binomische Formel $(x + 2)^n$

$${}^{n=0}(x + 2)^0 = 1$$



$$e = 1$$

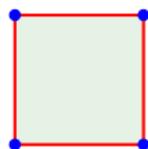
$${}^{n=1}(x + 2)^1 = x + 2$$



$$e = 2$$

$$k = 1$$

$${}^{n=2}(x + 2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

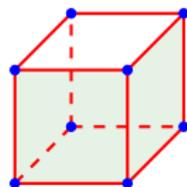


$$e = 4$$

$$k = 4$$

$$f = 1$$

$${}^{n=3}(x + 2)^3 = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8$$



$$e = 8$$

$$k = 12$$

$$f = 6$$

$$w = 1$$

Binomische Formel $(x + 2)^n$

$$(x + 2)^0 = 1$$



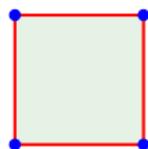
$$e = 1$$

$$(x + 2)^1 = x + 2$$



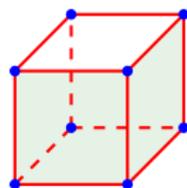
$$e = 2$$
$$k = 1$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$



$$e = 4$$
$$k = 4$$
$$f = 1$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8$$

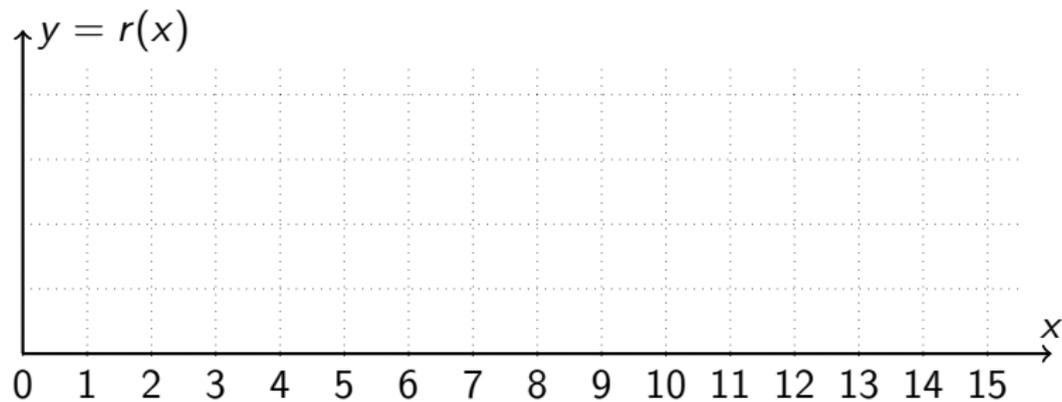


$$e = 8$$
$$k = 12$$
$$f = 6$$
$$w = 1$$

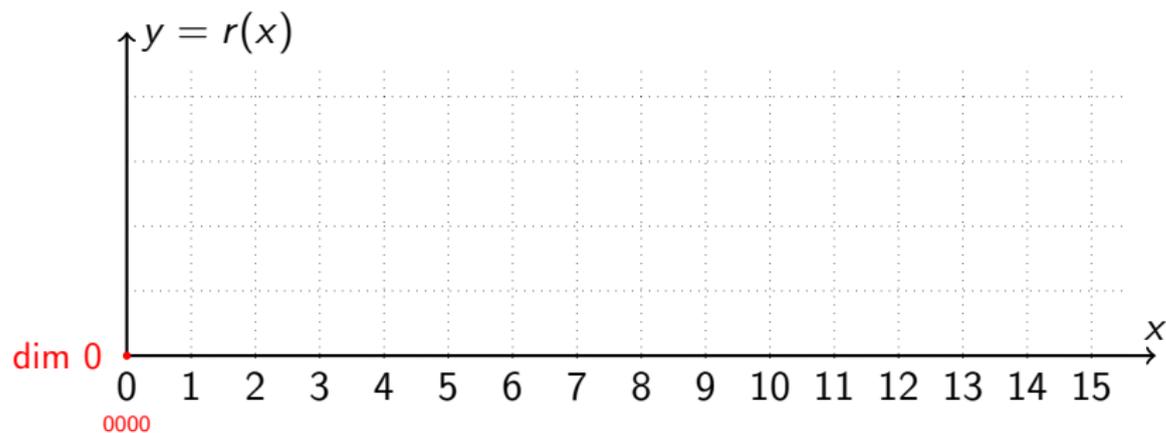
$$(x + 2)^4 = x^4 + 8 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 16$$

Überblick

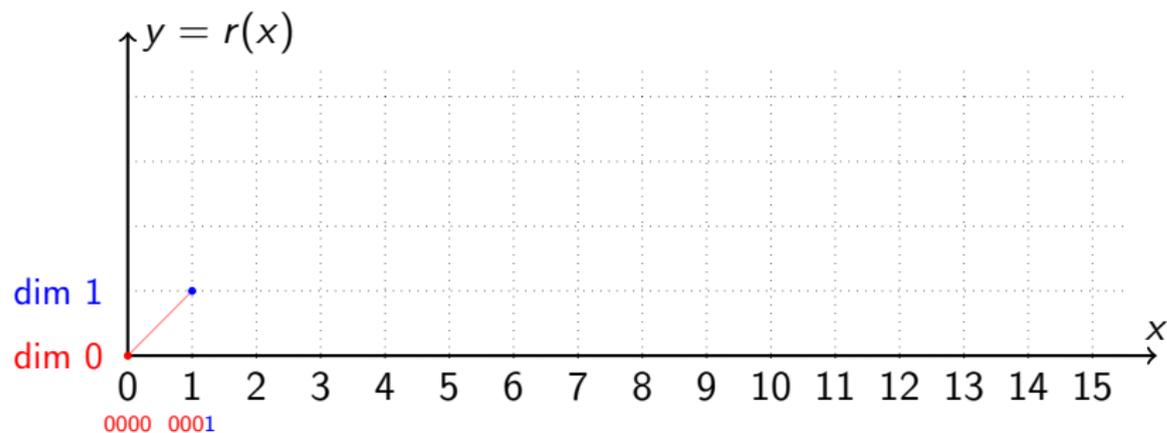
Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



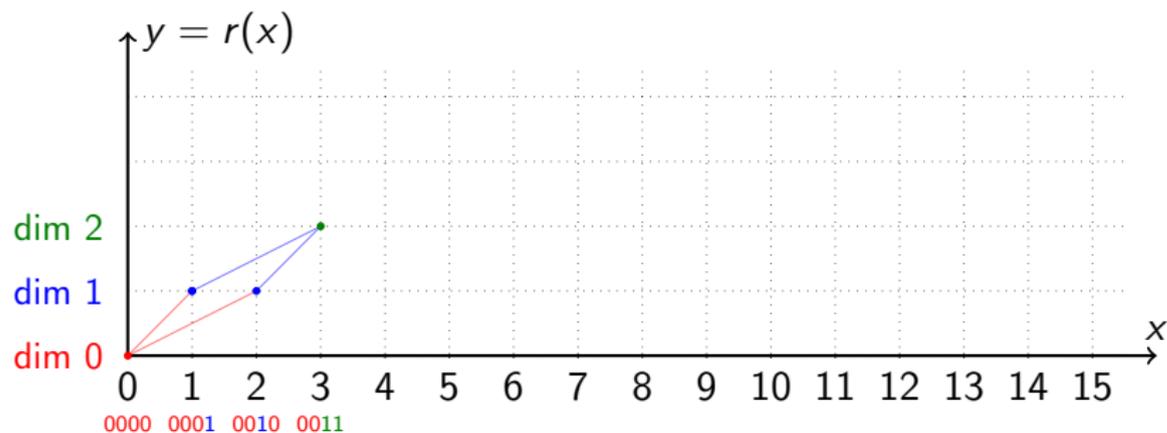
Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



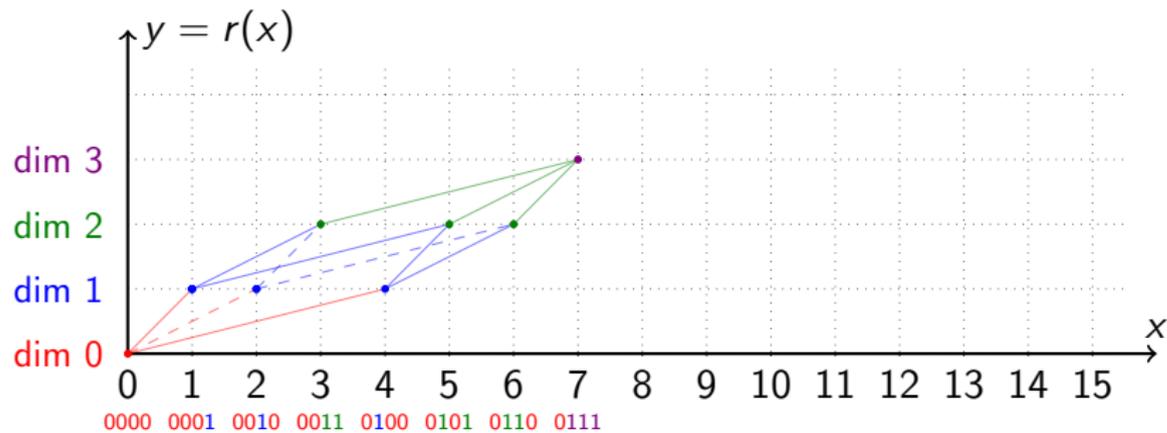
Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



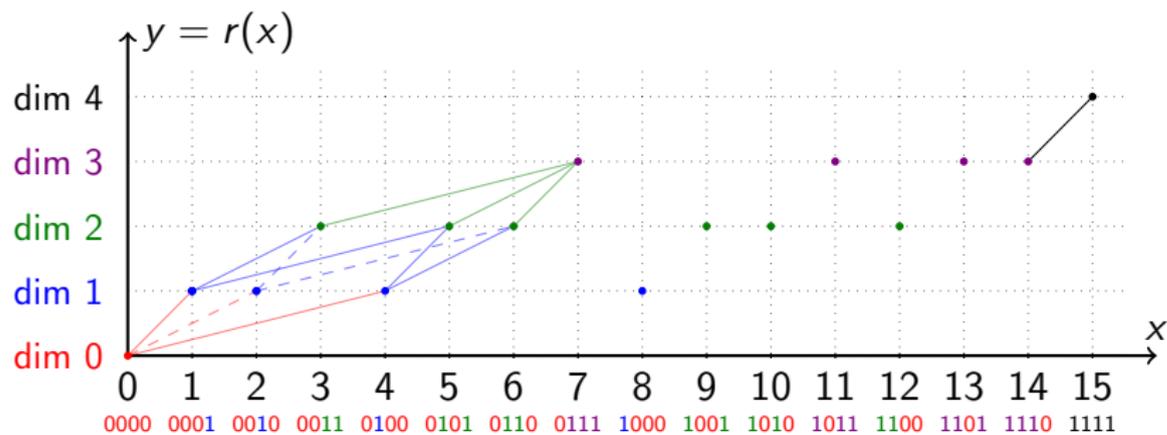
Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



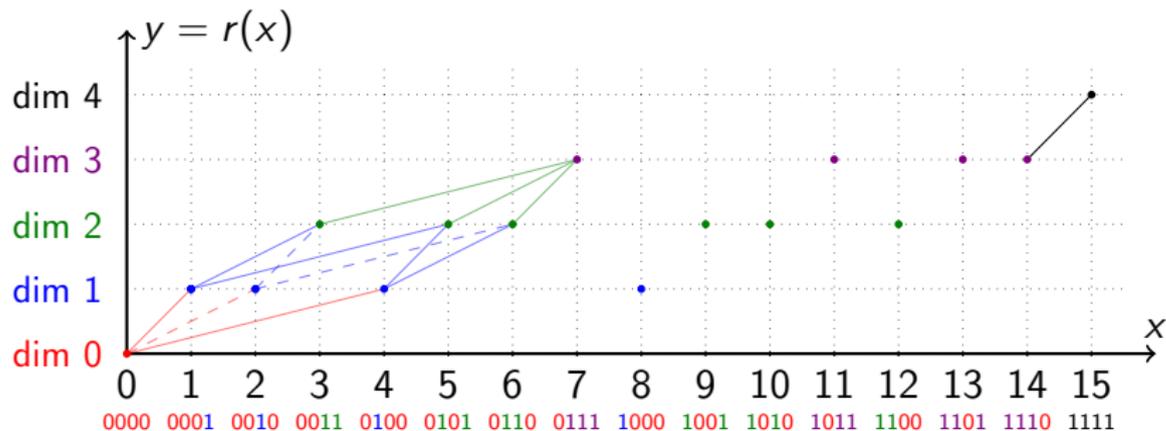
Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



Beschreibung eines Hyperwürfels im KS

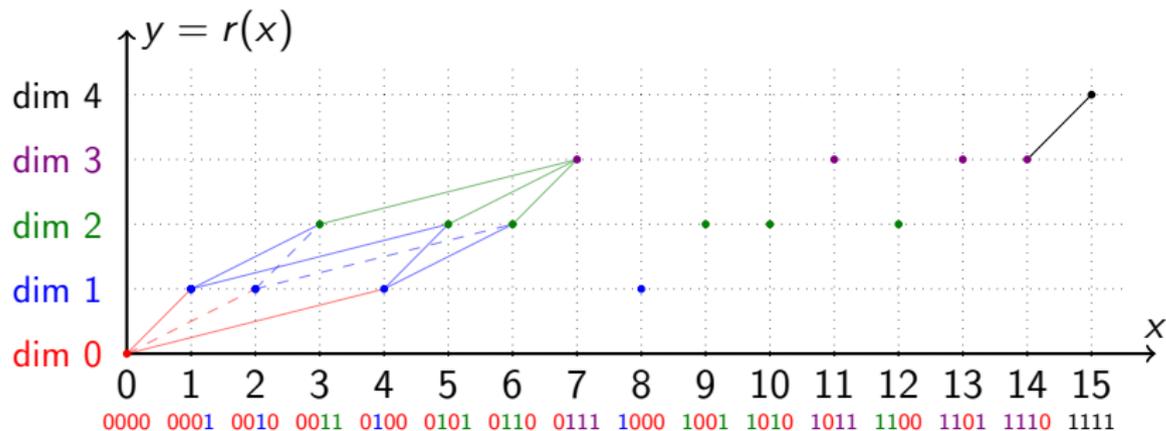


Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



Regel 1: Punkt $(x, r(x))$, $x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $r(x) = \# 1$ in Binärdarstellung

Beschreibung eines Hyperwürfels im KS



Regel 1: Punkt $(x, r(x)), x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $r(x) = \# 1$ in Binärdarstellung

Regel 2: A und B sind verbunden, wenn $|x(A) - x(B)| = 2^k$ und $m_{AB} > 0$

Überblick

Hamming distance representation of n -cubes

0.Etage

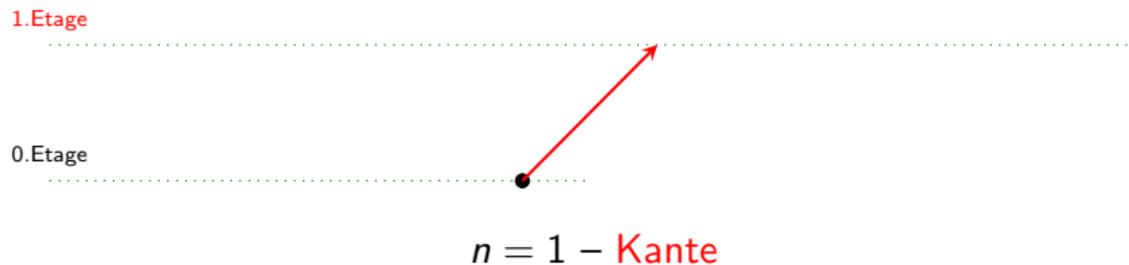


Hamming distance representation of n -cubes

1.Etage

0.Etage

$n = 1$ - Kante

The diagram illustrates a 1D cube (edge) with two levels. The lower level is labeled "0.Etage" and the upper level is labeled "1.Etage". A horizontal dotted line represents the 0.Etage, and another horizontal dotted line represents the 1.Etage. A black dot is placed on the 0.Etage line. A red arrow points from this dot to the 1.Etage line, representing a Hamming distance of 1. The text "n = 1 - Kante" is written below the diagram.

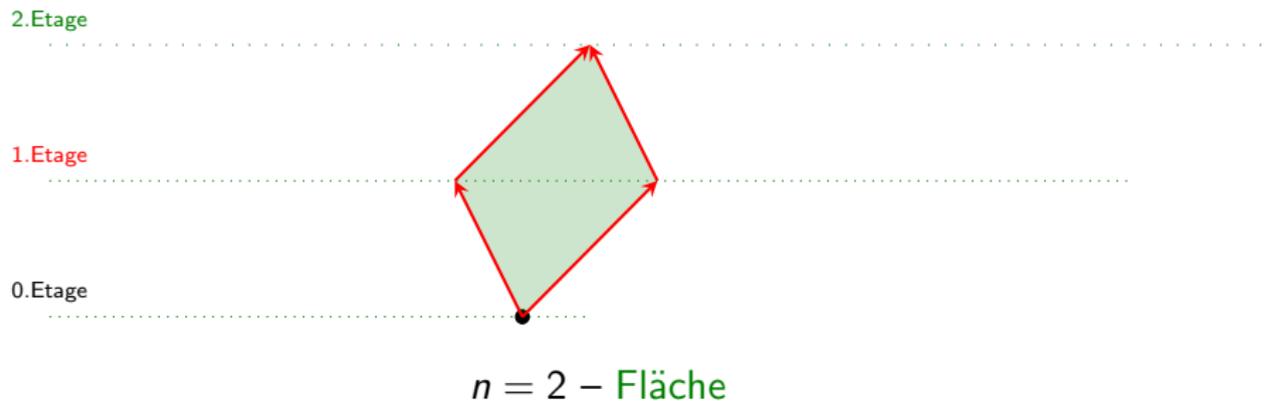
Hamming distance representation of n -cubes

2.Etage

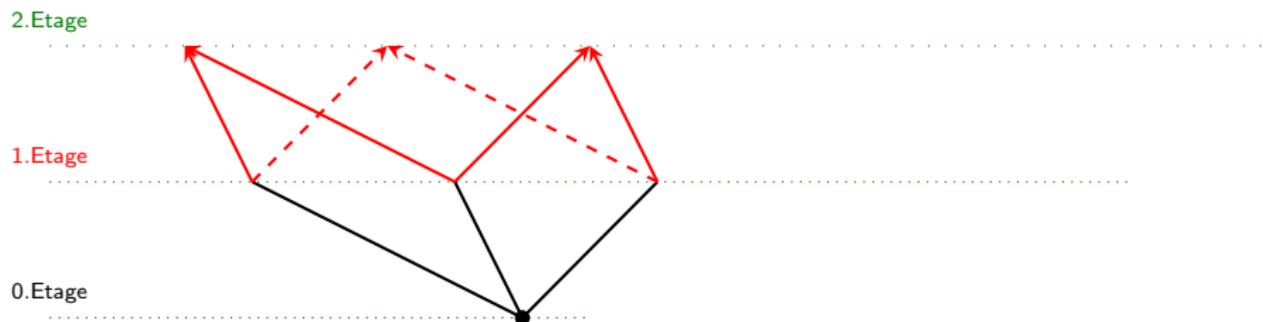
1.Etage

0.Etage

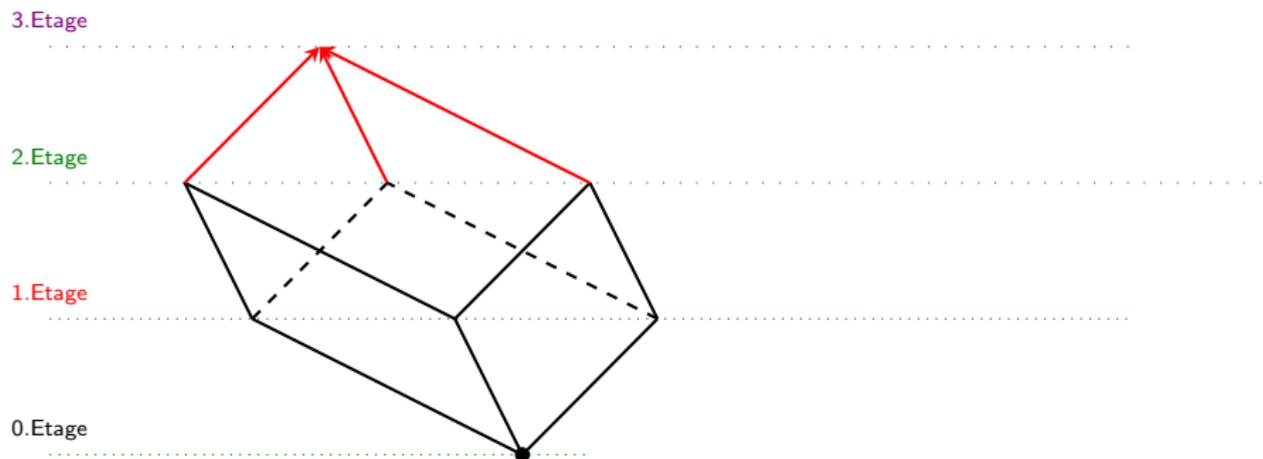
$n = 2$ - Fläche



Hamming distance representation of n -cubes



Hamming distance representation of n -cubes



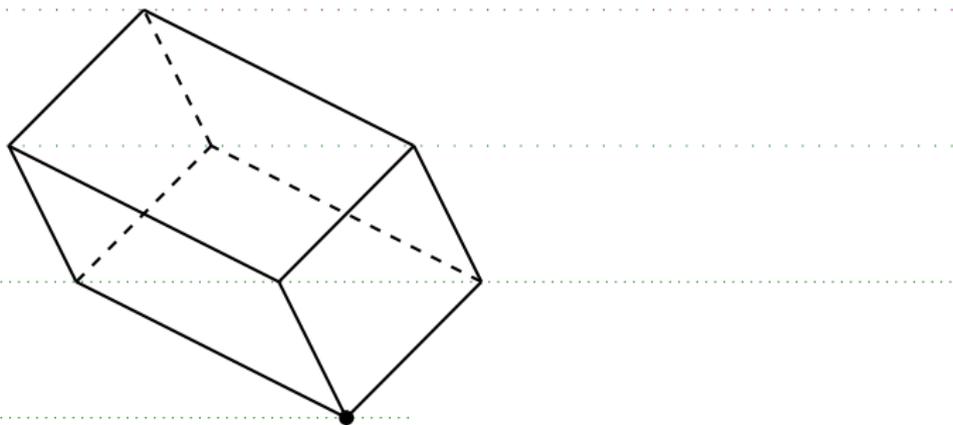
Hamming distance representation of n -cubes

3.Etage

2.Etage

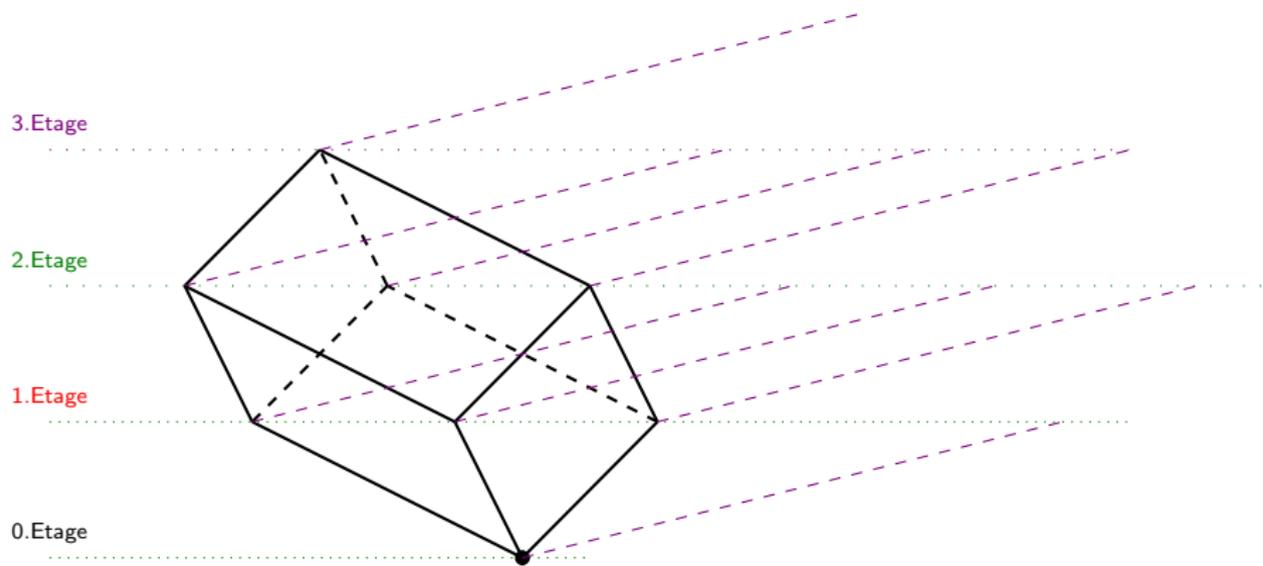
1.Etage

0.Etage



$n = 3$ - Würfel

Hamming distance representation of n -cubes



Hamming distance representation of n -cubes

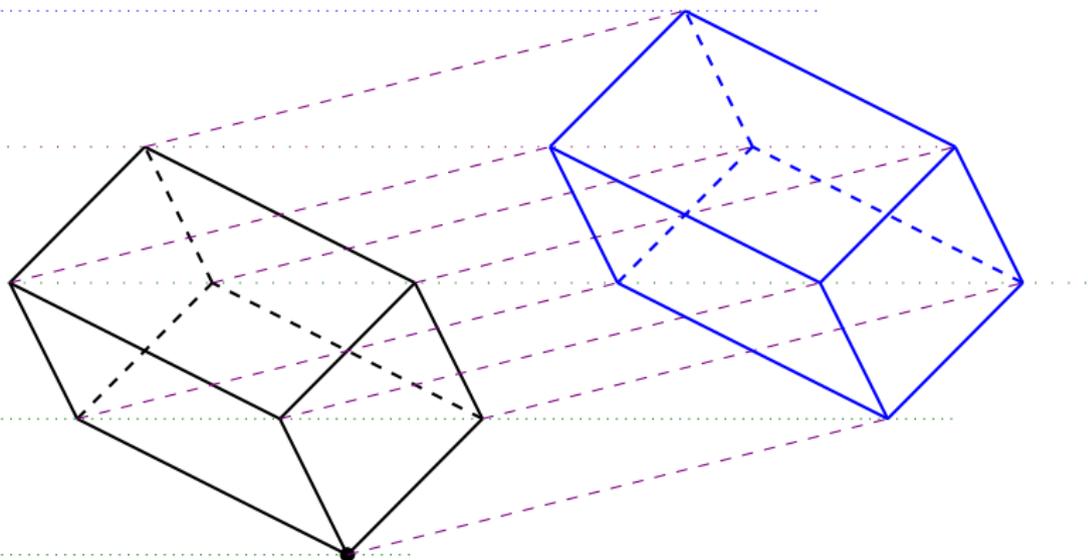
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



Hamming distance representation of n -cubes

4.Etage

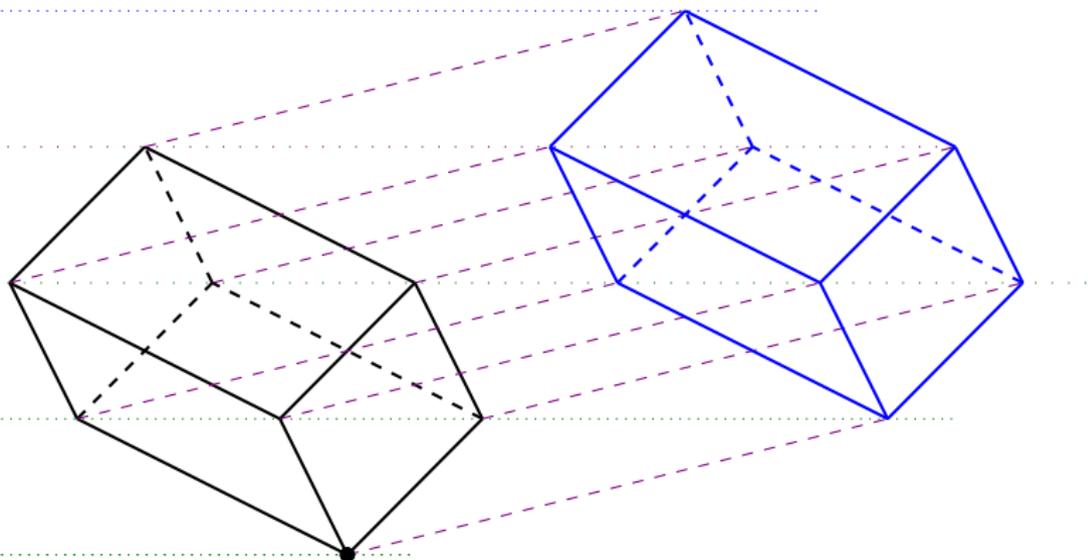
3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage

0000



Hamming distance representation of n -cubes

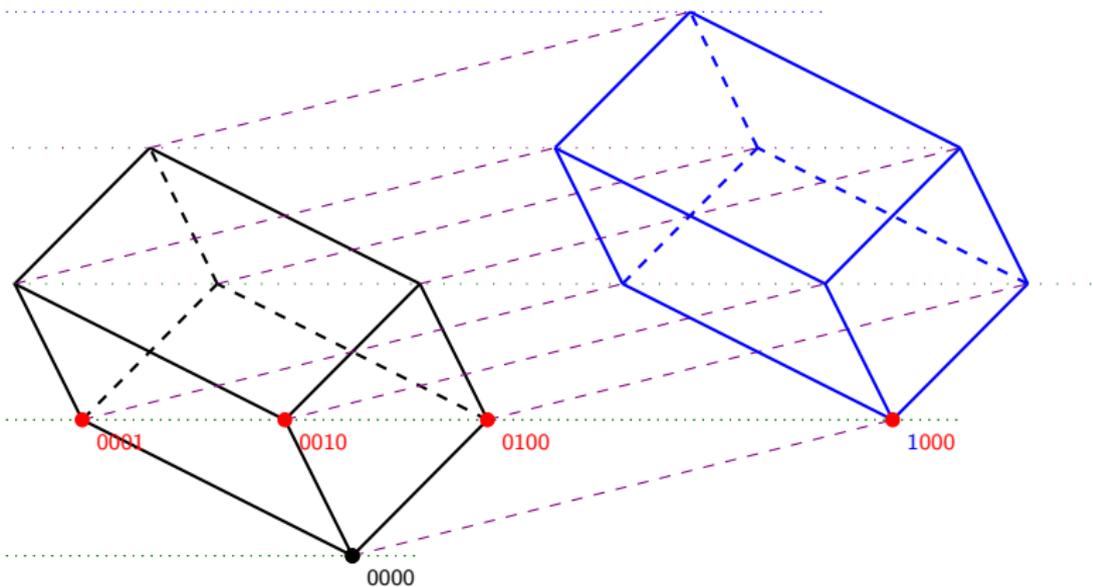
4.Etage

3.Etage

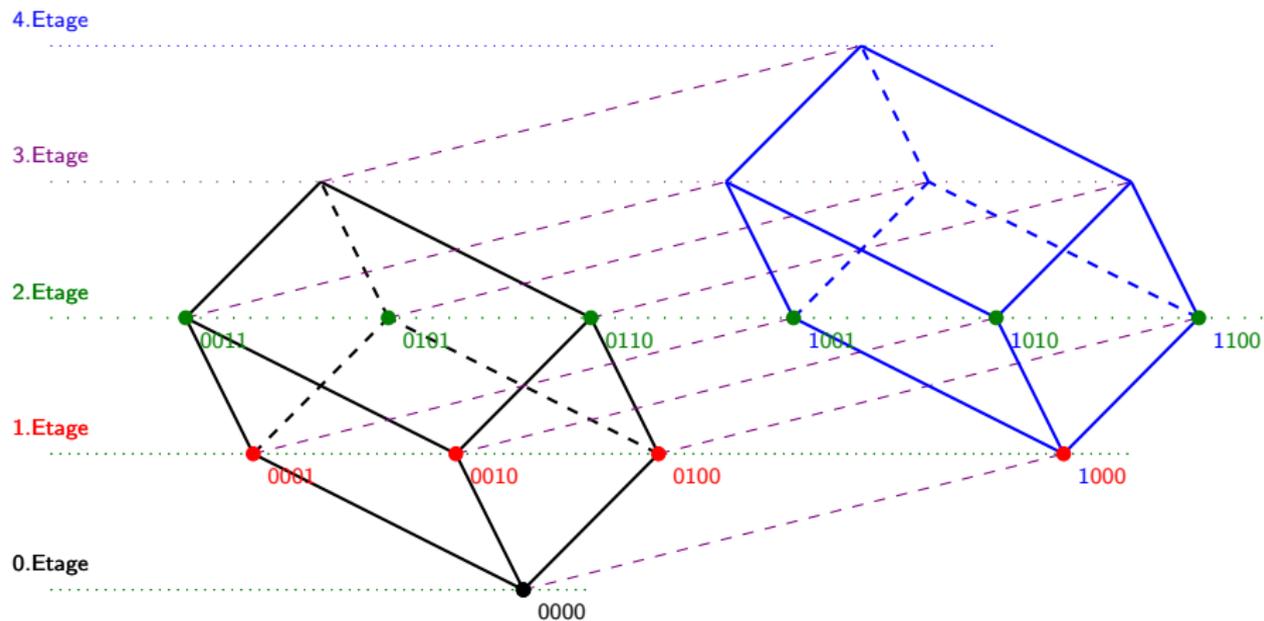
2.Etage

1.Etage

0.Etage



Hamming distance representation of n -cubes



Hamming distance representation of n -cubes

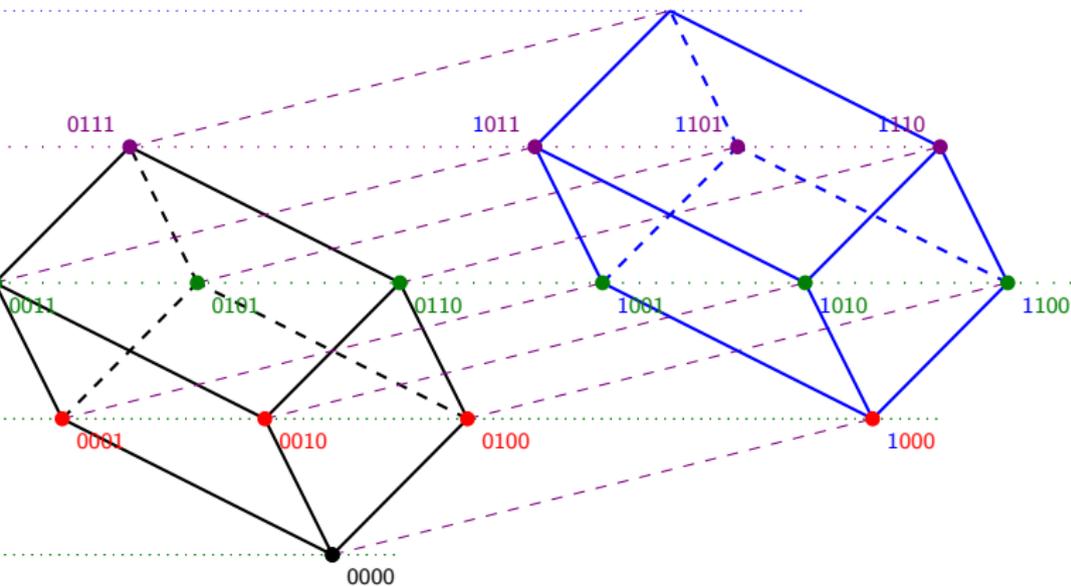
4.Etage

3.Etage

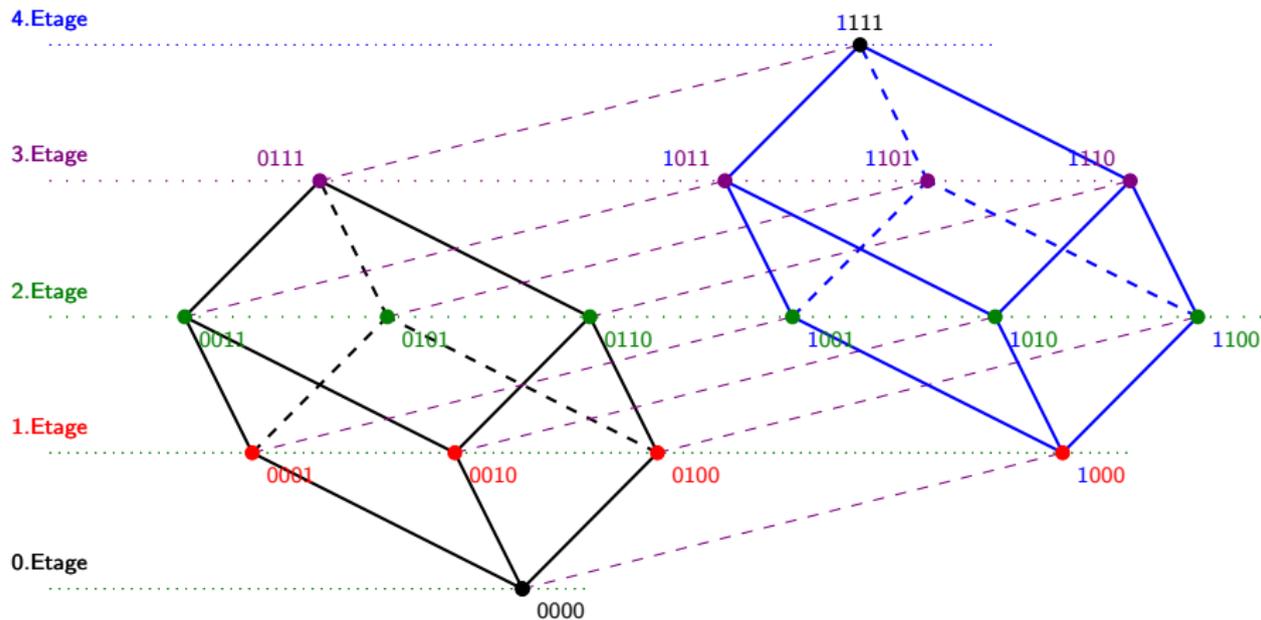
2.Etage

1.Etage

0.Etage



Hamming distance representation of n -cubes



Pascal'sche Matrix

Betrachte P^2 der Pascalschen Matrix P in der unteren Diagonalform:

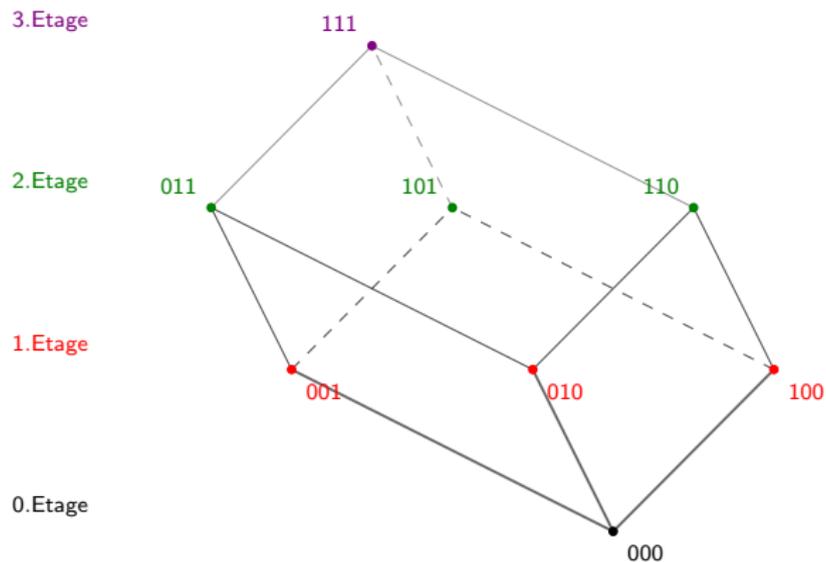
$$P \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $C = P^2$ ergibt zeilenweise **Ecken**, **Kanten**, **Flächen**, **Würfel**, etc.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 & 0 \\ 16 & 32 & 24 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

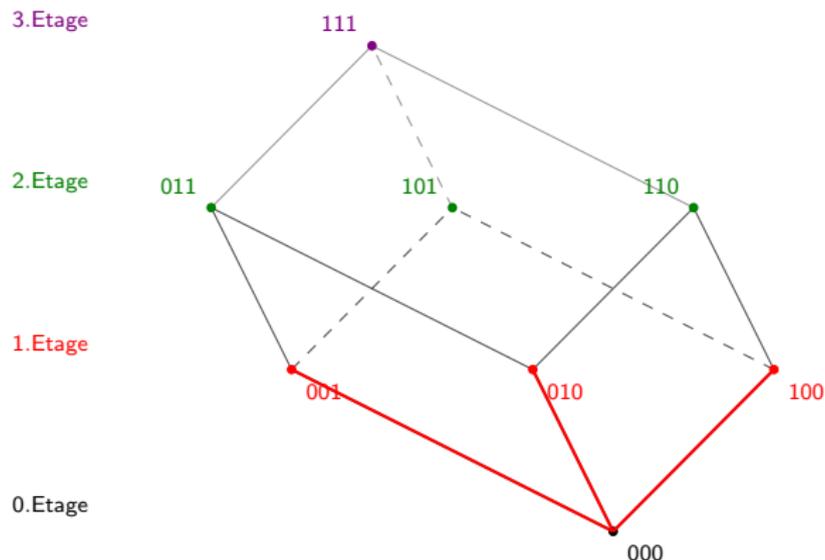
Überblick

Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?



Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

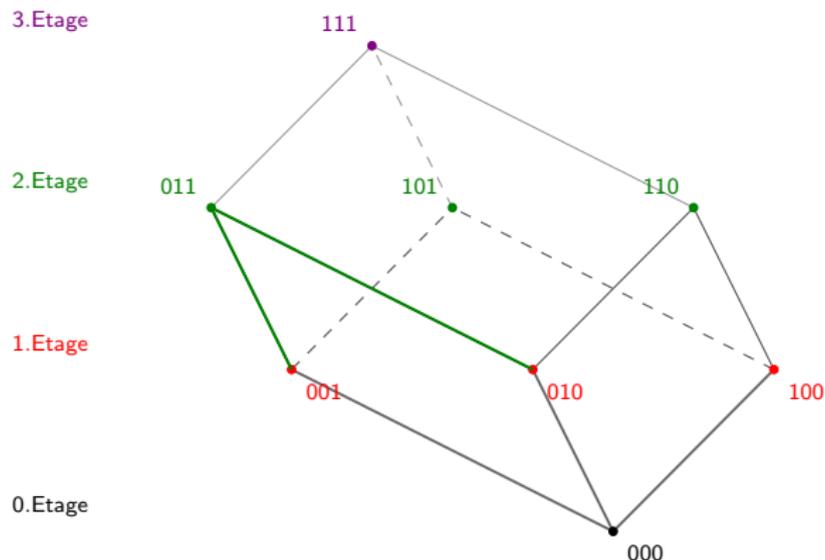
Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$



Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$

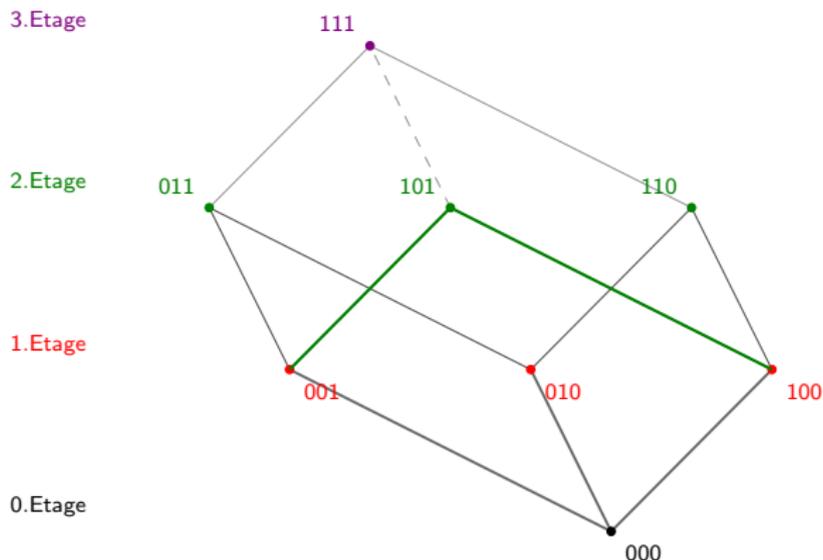
Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$



Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$

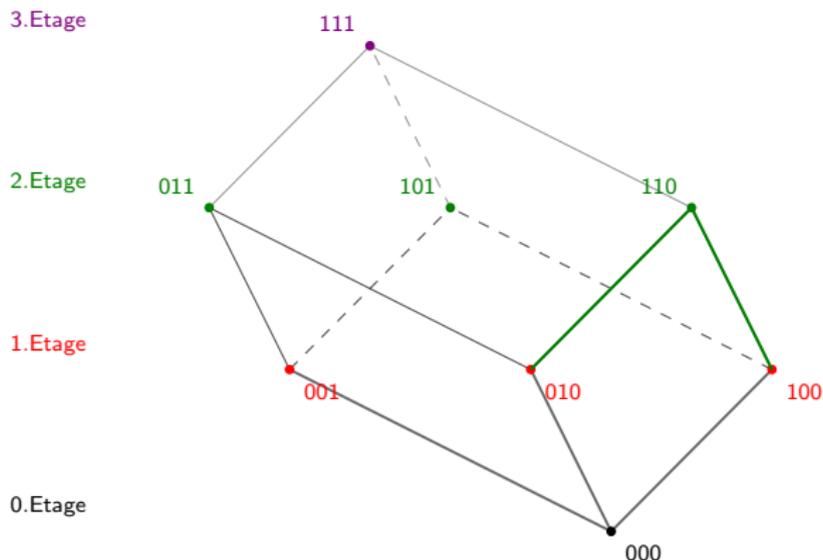
Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$



Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$

Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$

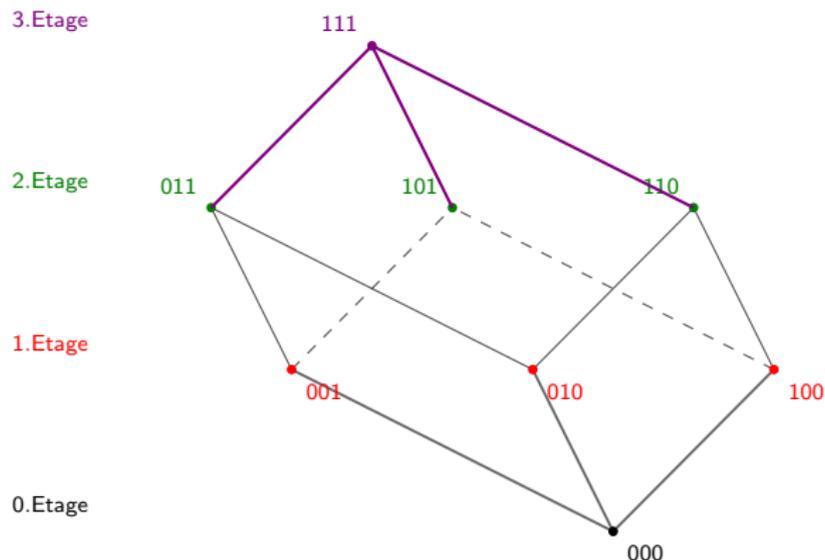


Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$

Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$

Kanten von der 3. Etage: $1 \cdot 3 = 3$



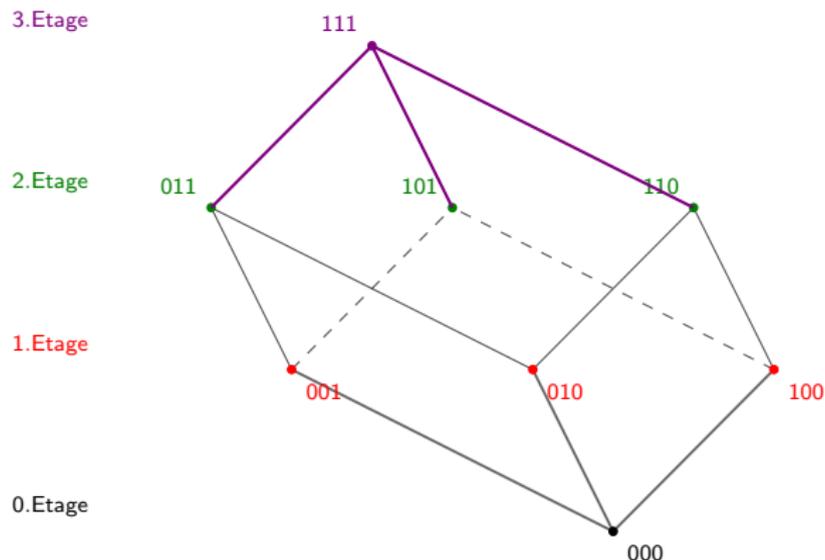
Wie sieht man 12 Kanten im 3-d Würfel?

Kanten von der 1. Etage: $3 \cdot 1 = 3$

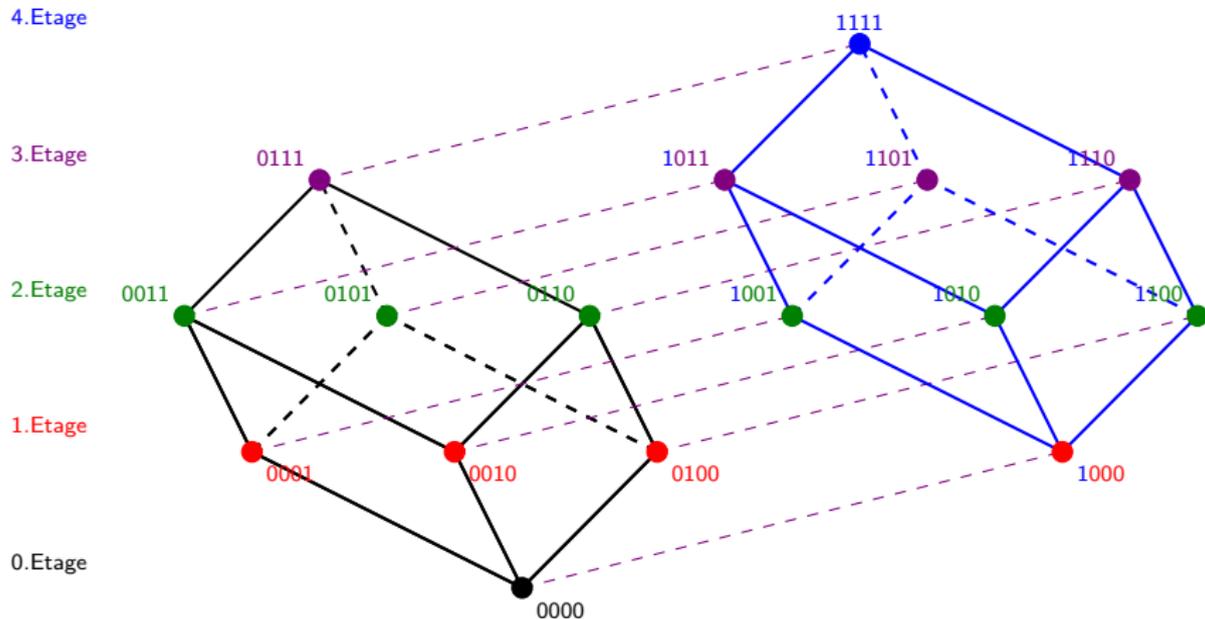
Kanten von der 2. Etage: $3 \cdot 2 = 6$

Kanten von der 3. Etage: $1 \cdot 3 = 3$

Insgesamt: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 12$ Kanten

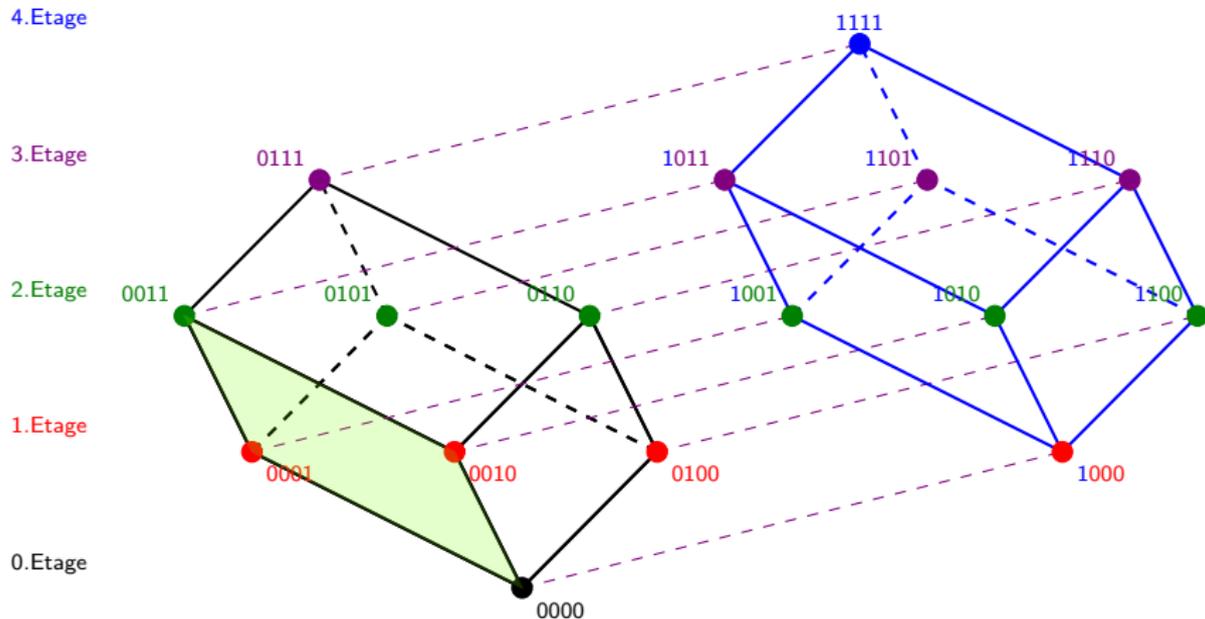


Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?



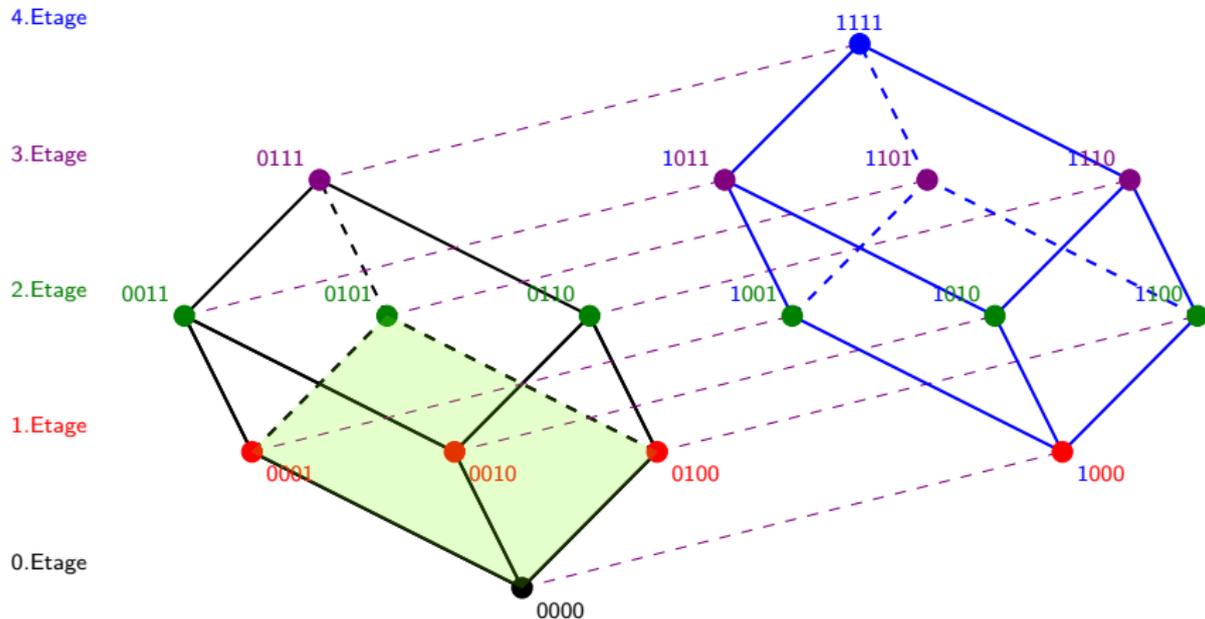
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



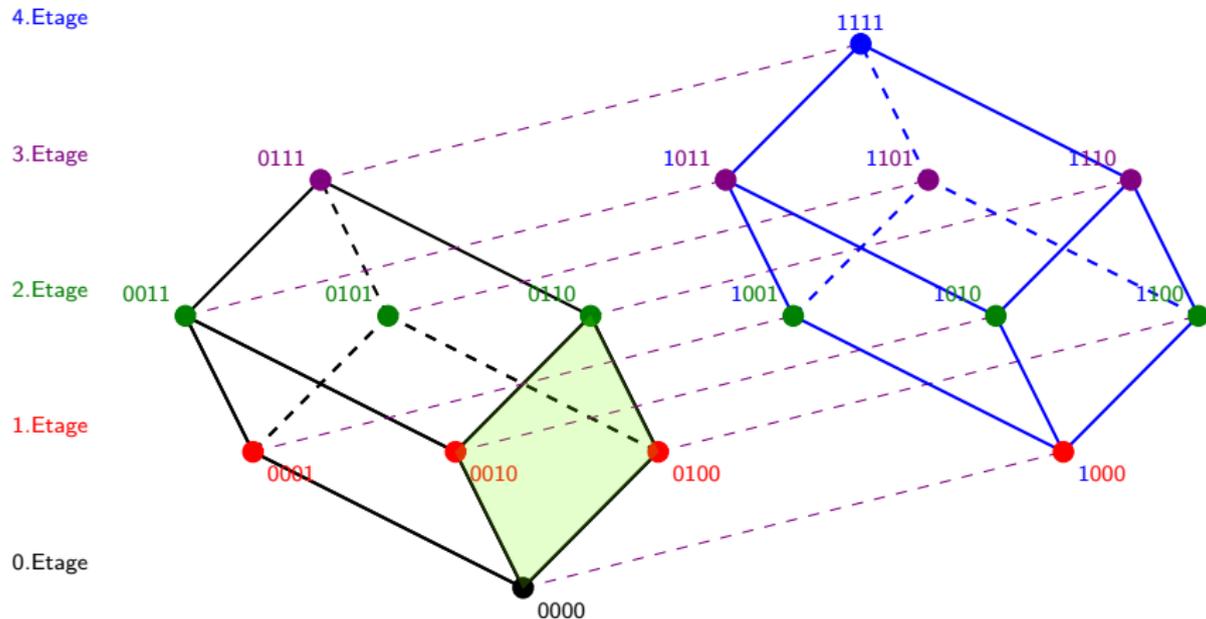
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



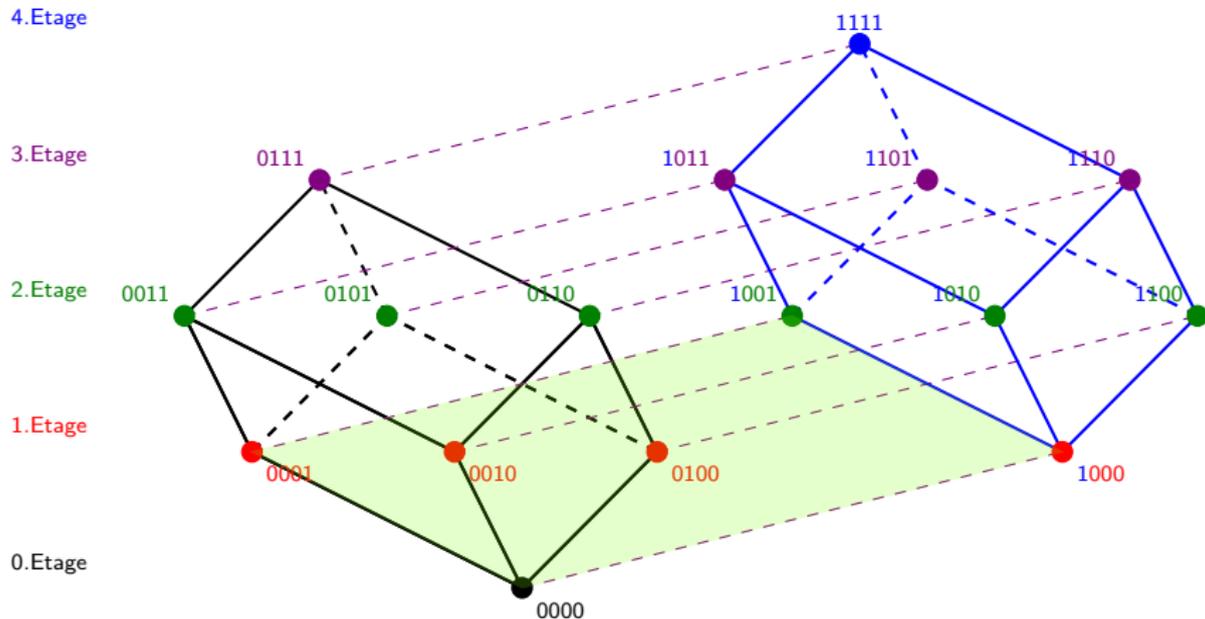
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



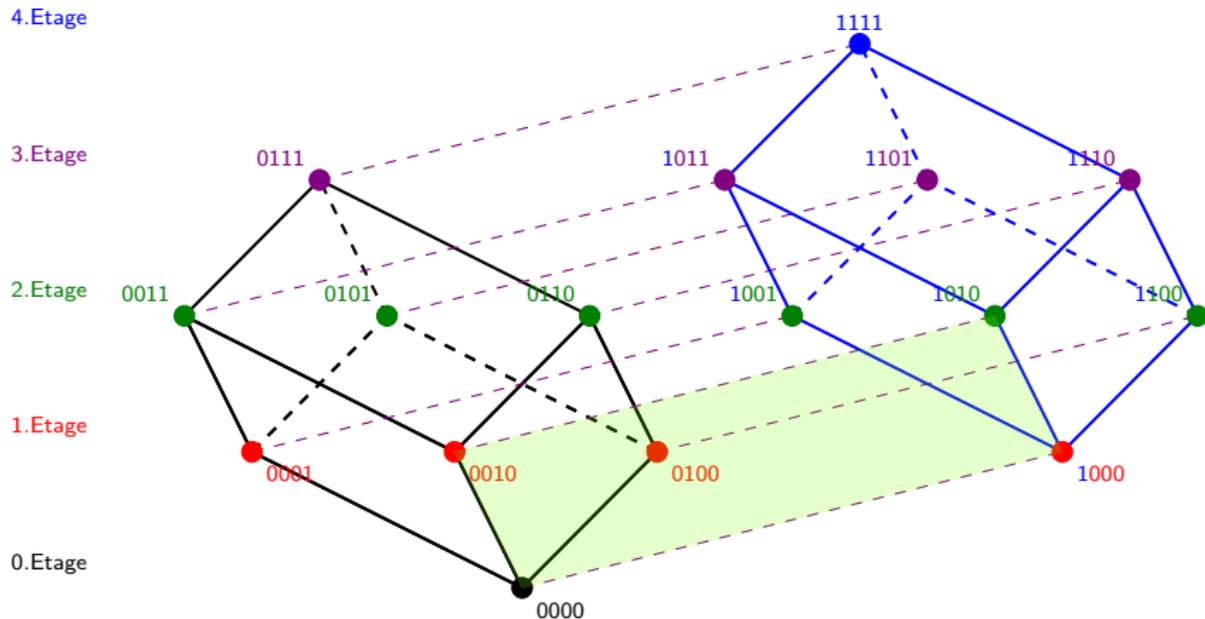
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



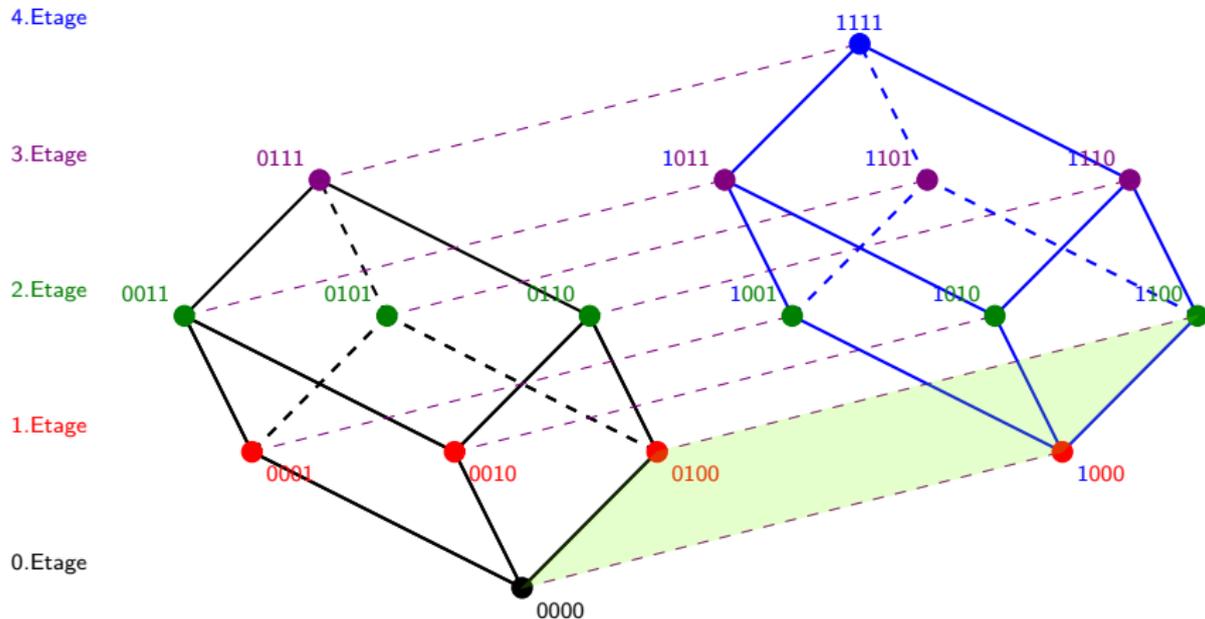
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 2. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage

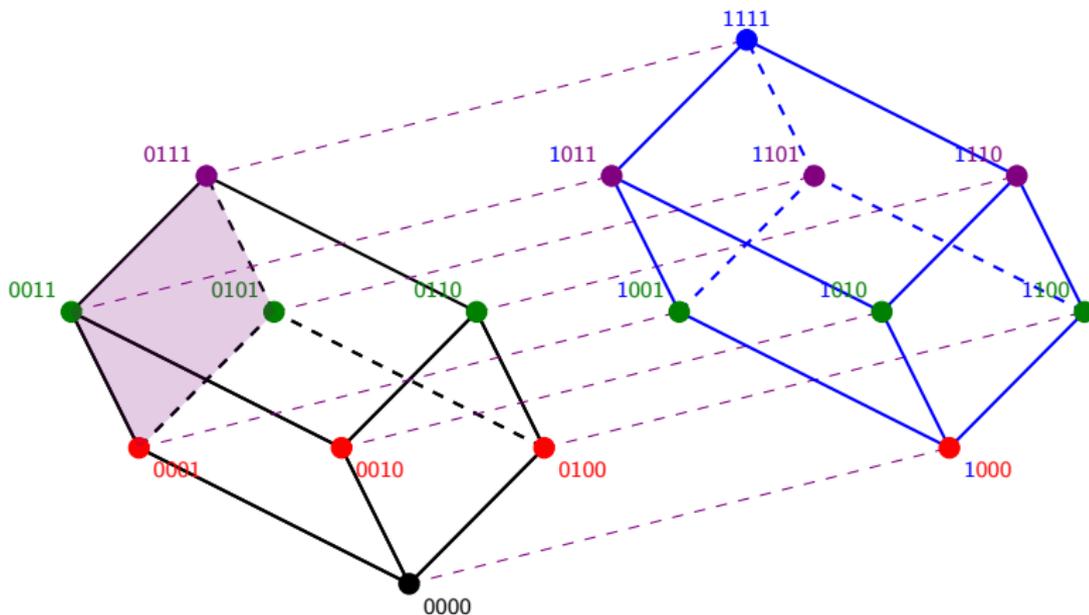
4.Etage

3.Etage

2.Etage

1.Etage

0.Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage

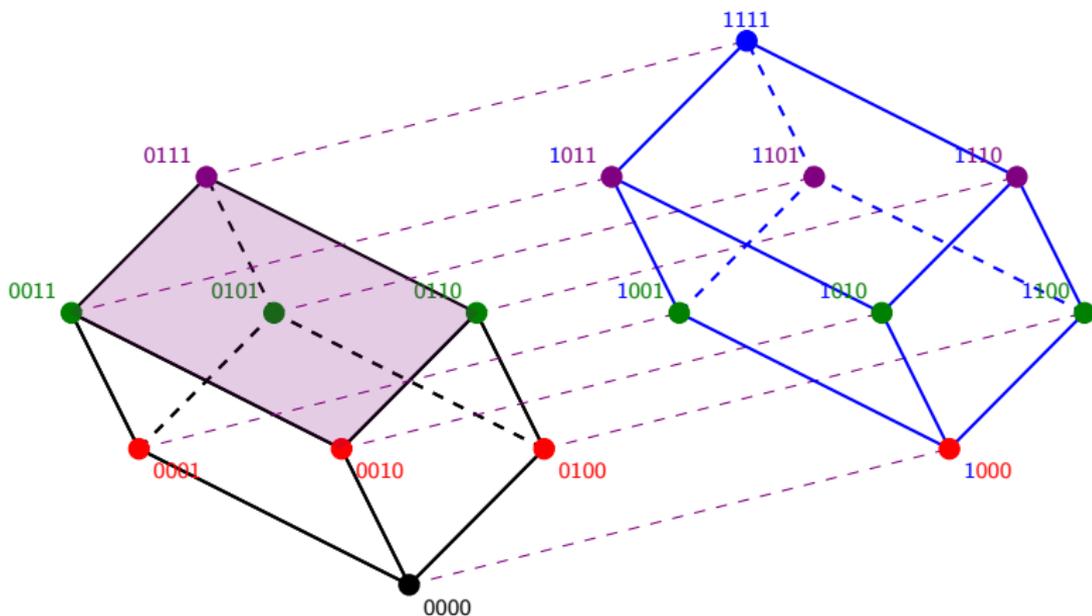
4.Etage

3.Etage

2.Etage

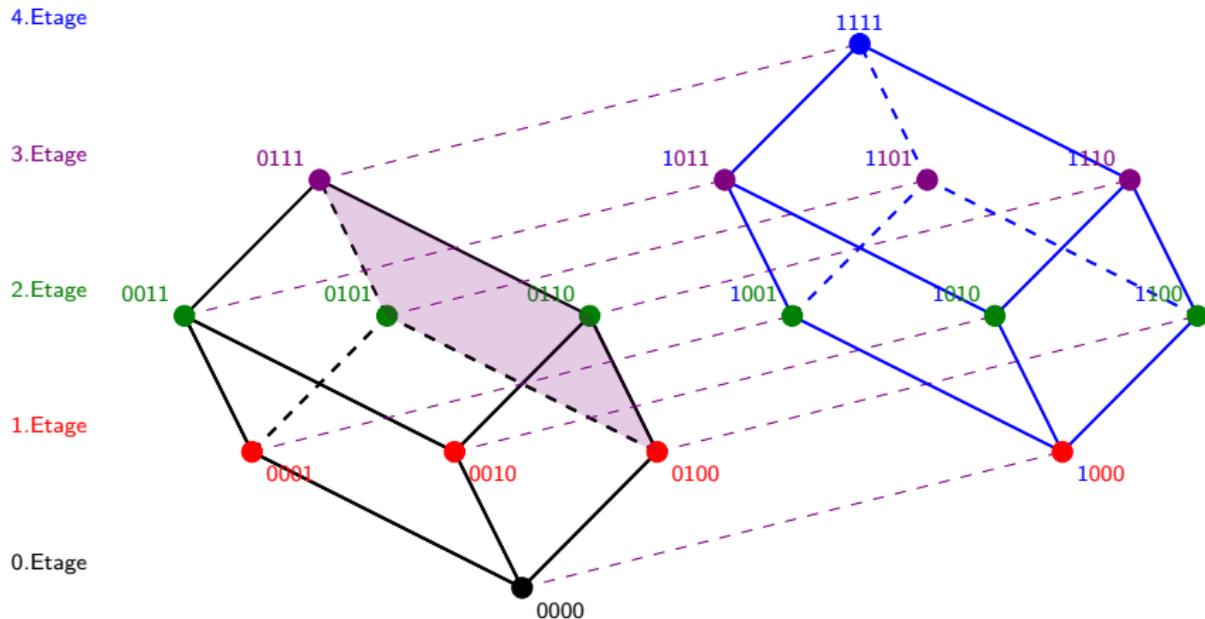
1.Etage

0.Etage



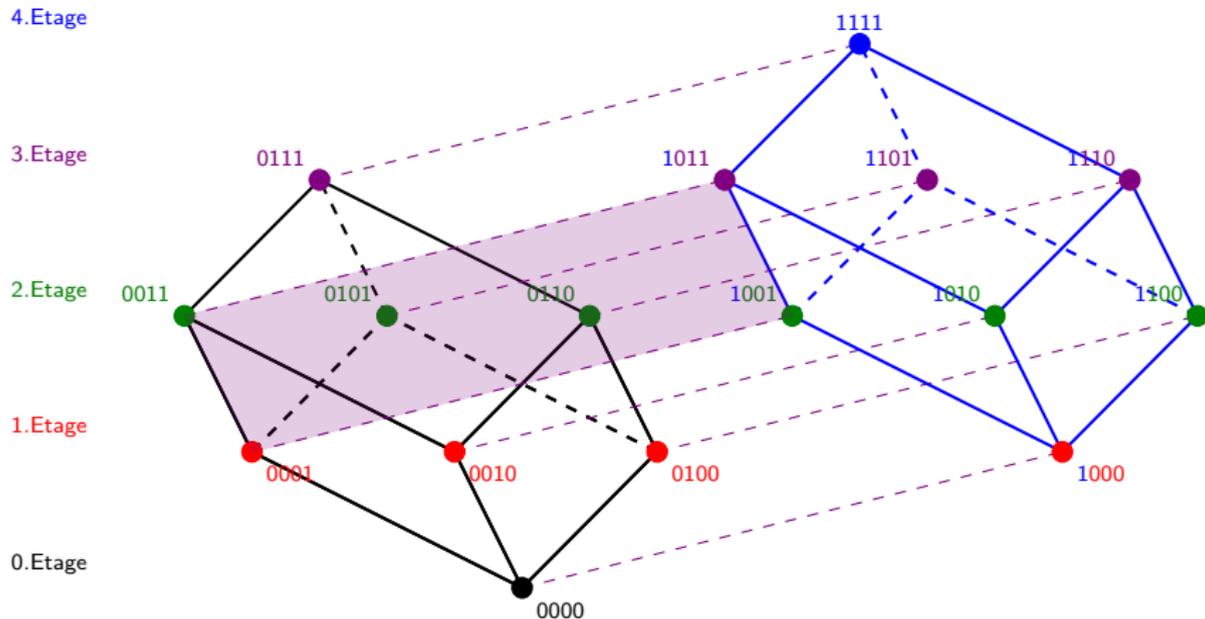
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage

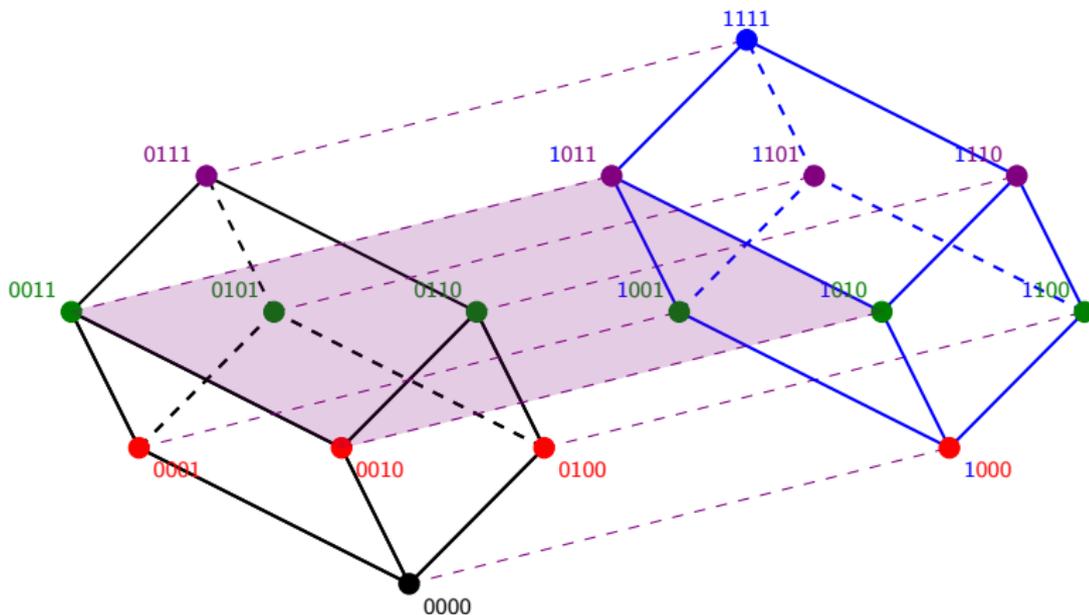
4.Etage

3.Etage

2.Etage

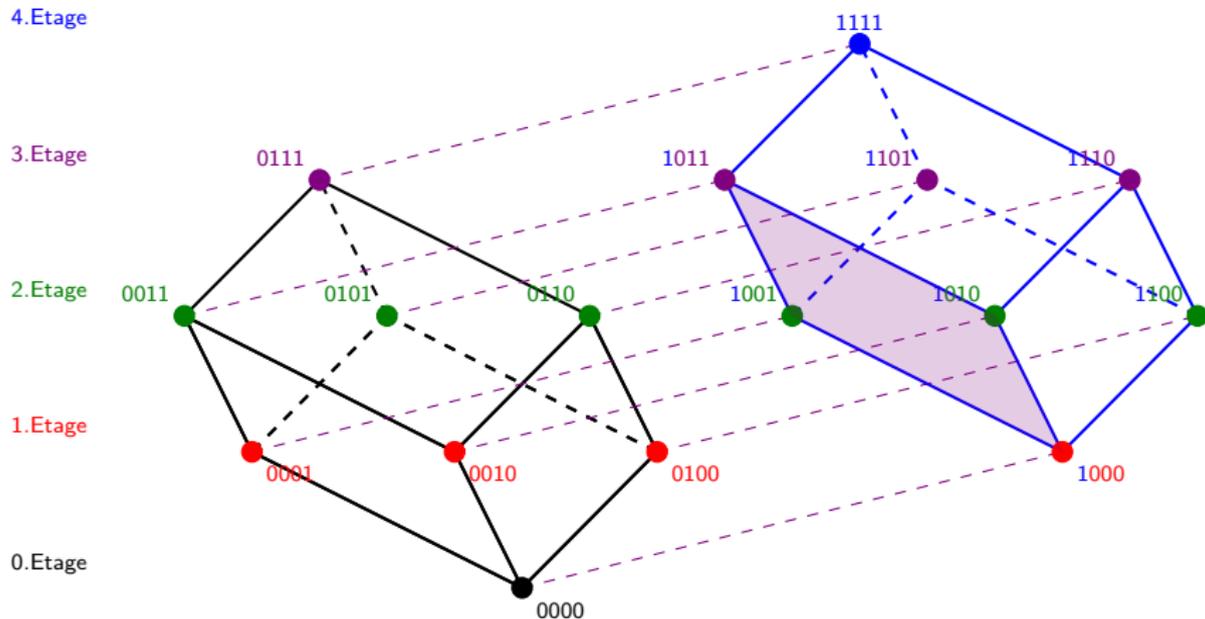
1.Etage

0.Etage



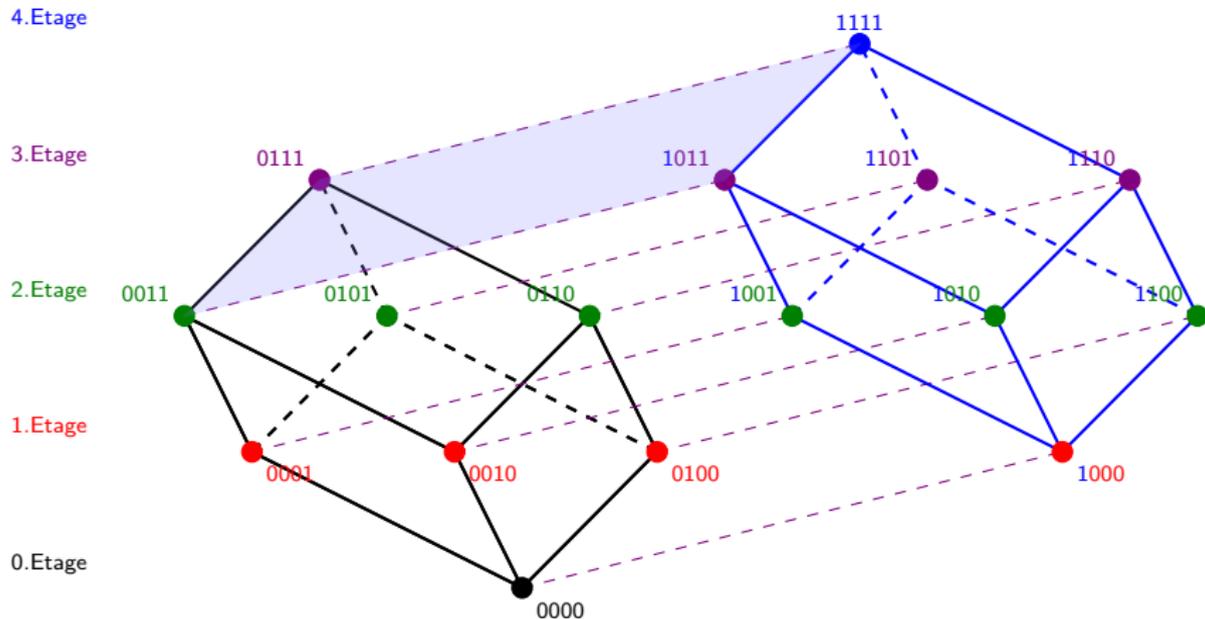
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 3. Etage



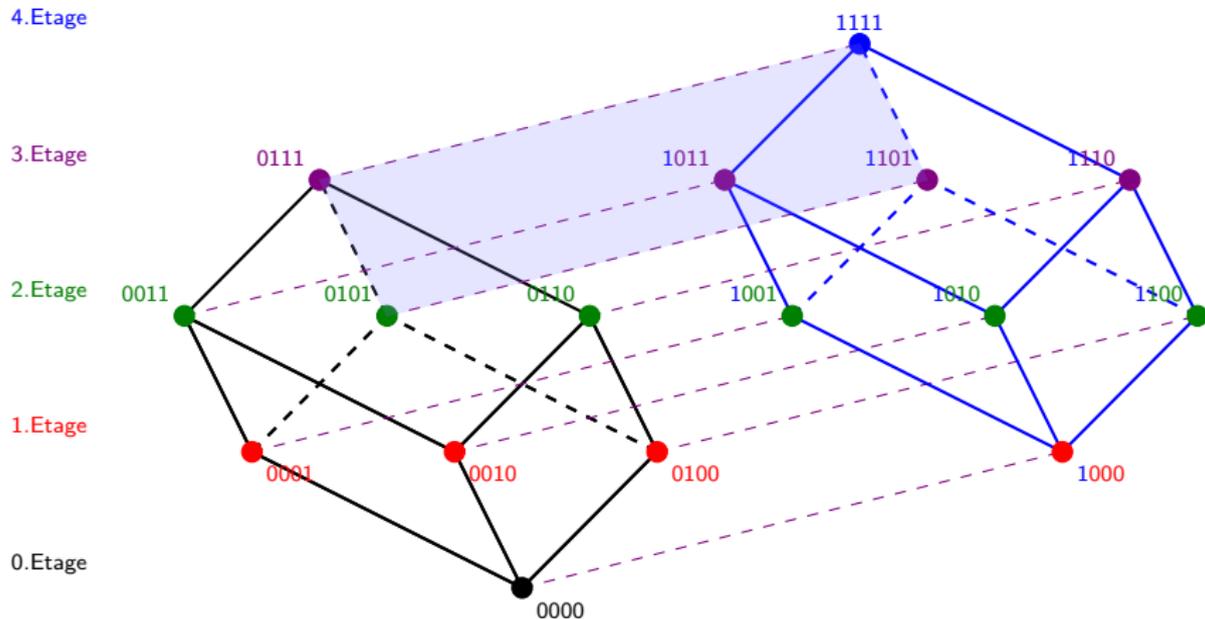
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage



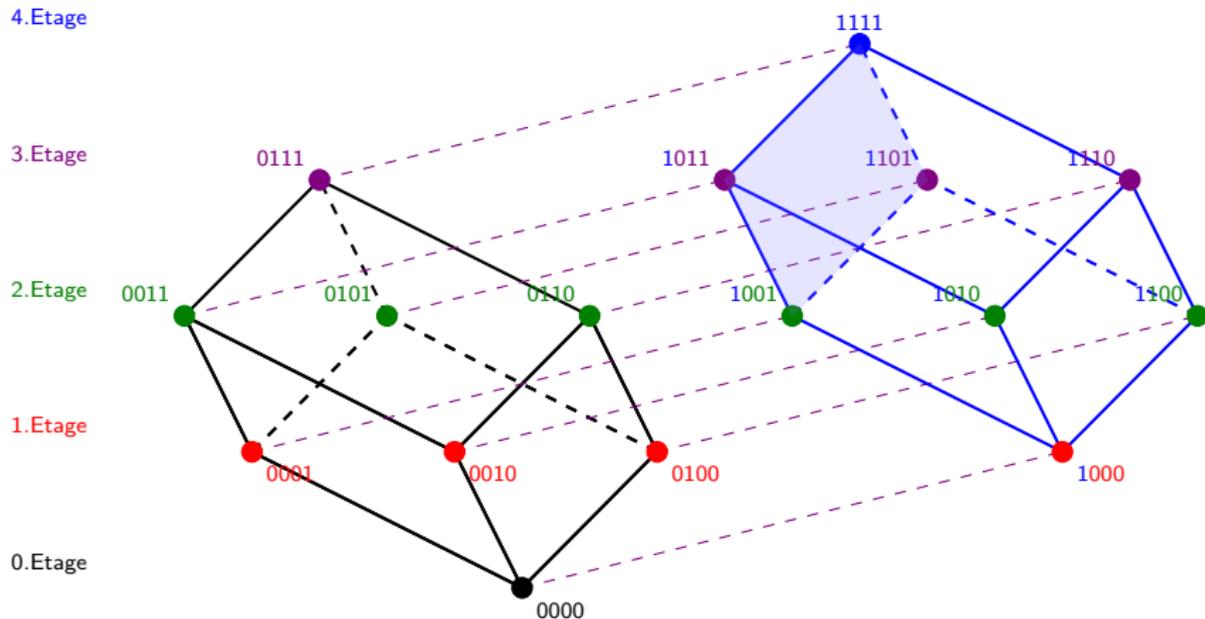
Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage

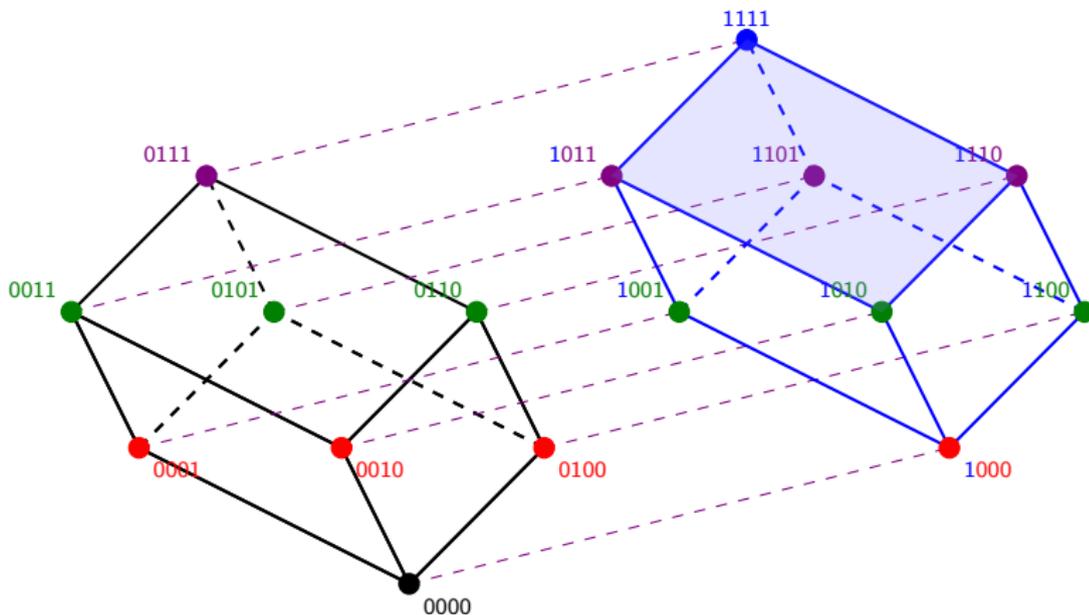
4.Etage

3.Etage

2.Etage

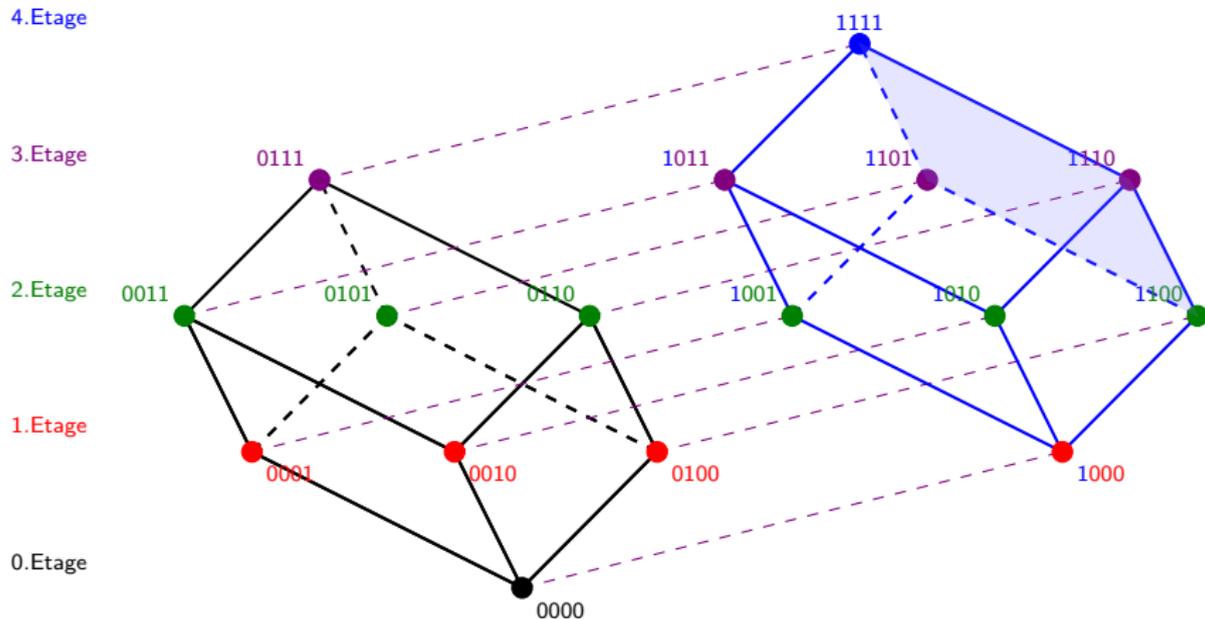
1.Etage

0.Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?

Flächen von der 4. Etage

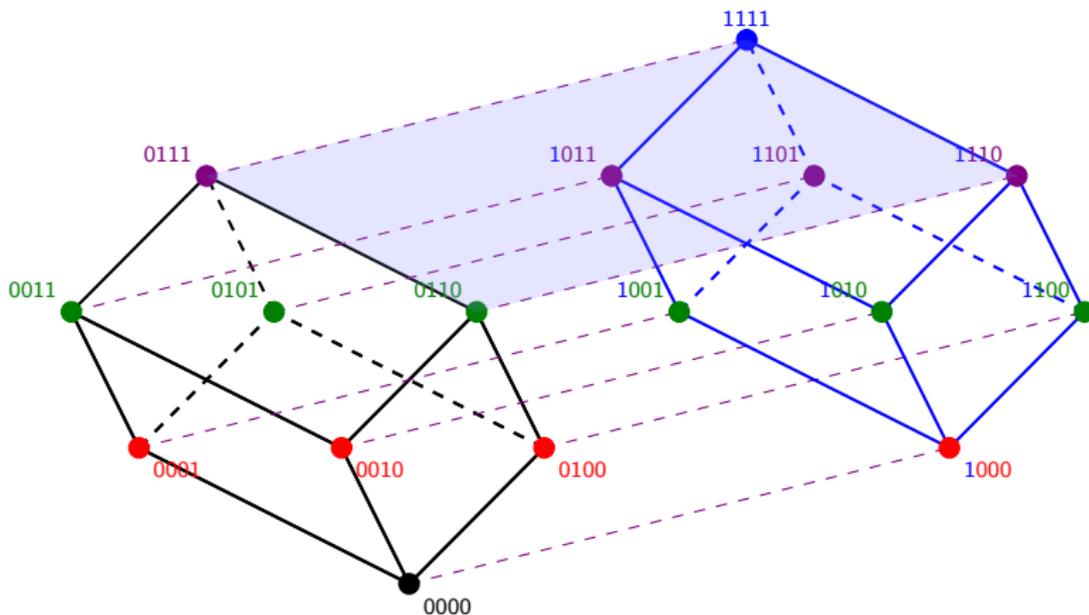
4.Etage

3.Etage

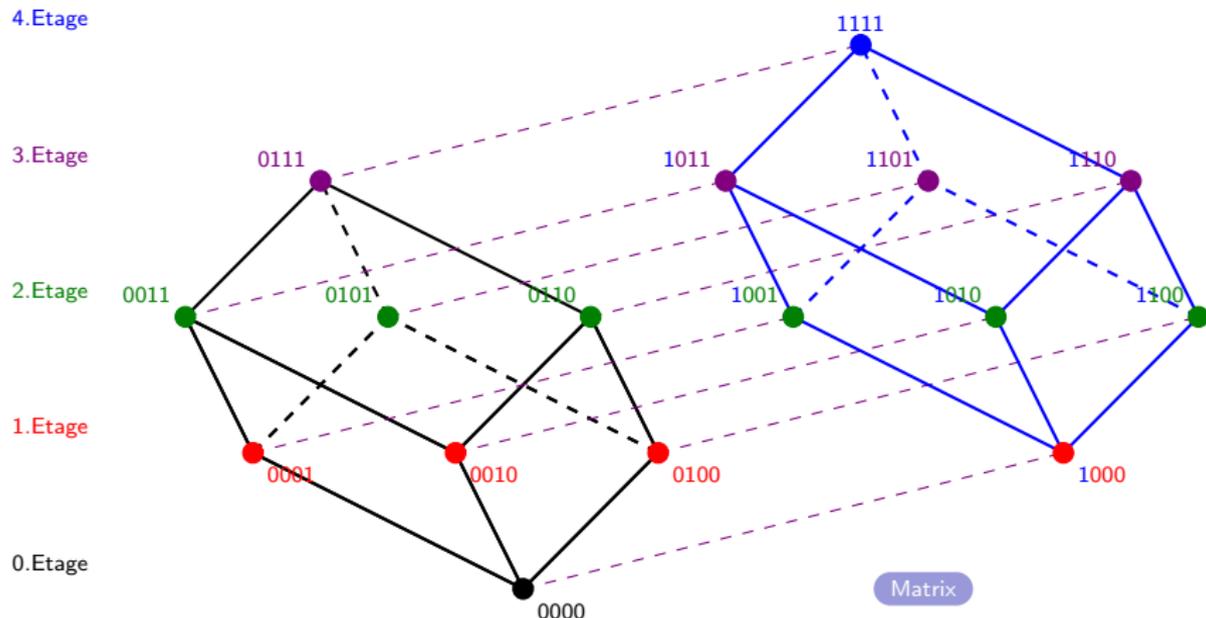
2.Etage

1.Etage

0.Etage



Wie sieht man 24 Flächen im Hyperwürfel?



Insgesamt: $1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 24$ Flächen

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau m** Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die Etage m , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau m** Einsen. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage m** , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die **obere Grenze** in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einsen aus n verfügbaren Plätzen.

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau m** Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage m** , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m - k$: $\binom{m}{k}$
Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau** m Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage** m , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m - k$: $\binom{m}{k}$
Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau** m Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage** m , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m - k$: $\binom{m}{k}$
Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der k -Würfel in einem n -Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau m** Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage m** , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m - k$: $\binom{m}{k}$
Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der k -Würfel in einem n -Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

Dies entspricht genau dem Produkt aus der n -ten Zeile und der k -ten Spalte der Pascalschen Matrix.

k -Würfel in einem n -Würfel

n -Würfel hat $n + 1$ Etagen – $0, 1, 2, \dots, n$.

Die m -te Etage enthält Punkte mit **genau m** Einser. Wir zählen k -Würfel.

- Wähle die **Etage m** , in der die obere Ecke liegen soll: $0 \leq m \leq n$.
- Wähle die *obere Grenze* in dieser Etage m : $\binom{n}{m}$
Dies ist gleich zur Wahl von m Einser aus n verfügbaren Plätzen.
- Wähle die *untere Grenze* in der Etage $m - k$: $\binom{m}{k}$
Dies ist gleich zur Wahl von k Einser, die zu Nullen werden.

Daraus ergibt sich die folgende Formel für die Anzahl der k -Würfel in einem n -Würfel:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k}$$

Dies entspricht genau dem Produkt aus der n -ten Zeile und der k -ten Spalte der Pascalschen Matrix.

Besonderer Fall: $k = 0 \iff \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \cdot \binom{m}{0}$. Die Summe der Binomialkoeffizienten ist 2^n .

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- **Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.**

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- **Beispiele:** $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele: $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele: $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von A

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele: $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von A
- **Insgesamt gibt es also in diesem Beispiel $2^4 = 16$ Teilmengen.**

Hyperwürfel und Mengenlehre

Wie viele Teilmengen hat eine Menge A mit n Elementen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?

Wir betrachten den Fall $n = 4$ mit $A = \{a, b, c, d\}$

- Jede Teilmenge wird kodiert durch eine Liste mit 4 Positionen
- Gehört ein Element der Teilmenge schreiben wir eine 1, sonst eine 0.
- Beispiele: $\emptyset \leftrightarrow (0, 0, 0, 0)$; $\{a, c\} \leftrightarrow (1, 0, 1, 0)$; $A \leftrightarrow (1, 1, 1, 1)$;
- Die Anzahl 1 in der Liste entspricht der Anzahl Elementen in der Teilmenge
- Jede Ecke eines Hyperwürfels entspricht genau einer Teilmenge von A
- Insgesamt gibt es also in diesem Beispiel $2^4 = 16$ Teilmengen.
- **Allgemein?**

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- Ecken (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken (Dim 0):** $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten (Dim 1):** $\exists j : x_j \in [0, 1] \text{ und } \forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}.$

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Flächen** (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Flächen** (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Insgesamt gibt es $E_n = W_{0,n} = 2^n$ Ecken.**

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Flächen** (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- Insgesamt gibt es $E_n = W_{0,n} = 2^n$ Ecken.
- Insgesamt gibt es $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Flächen** (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- Insgesamt gibt es $E_n = W_{0,n} = 2^n$ Ecken.
- Insgesamt gibt es $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.
- Insgesamt gibt es $F_n = W_{2,n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$ Flächen.

Wir beschreiben verschiedene Elemente eines Hyperwürfel in einem Koordinatensystem

- **Ecken** (Dim 0): $e(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- **Kanten** (Dim 1): $\exists j : x_j \in [0, 1]$ und $\forall i \neq j \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- **Flächen** (Dim 2): $\exists j_1 \neq j_2 : x_{j_1}, x_{j_2} \in [0, 1]$ und $\forall i \notin \{j_1, j_2\} \quad x_i \in \{0, 1\}$.
- Insgesamt gibt es $E_n = W_{0,n} = 2^n$ Ecken.
- Insgesamt gibt es $K_n = W_{1,n} = n \cdot 2^{n-1}$ Kanten.
- Insgesamt gibt es $F_n = W_{2,n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$ Flächen.
- Allgemein gibt diese Formel die Anzahl der k -Würfel in einem n -Würfel

$$W_{k,n} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$