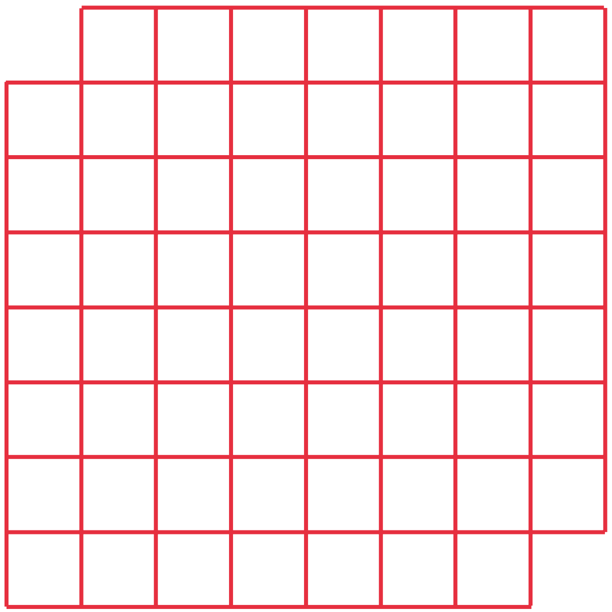
Tag für Mathematik und Unterricht 2016,

Kantonsschule Wil

Christian Blatter: **Unmögliche Zerlegungen**



- einen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen
- eine allgemeine Gleichung fünften Grades formelmässig lösen
- eine elementare Stammfunktion der Funktion $f(x) := e^{-x^2/2}$ angeben

Flächeninhalt von Polygonen $P \subset \mathbb{E}^2$

$$P \;\mapsto\; \mathsf{A}(P) \;\geq 0$$

- $P \cong Q \quad \Rightarrow \quad \mathsf{A}(P) = \mathsf{A}(Q).$
- Wird P durch geradlinige Schnitte in n Polygone P_i zerlegt, so gilt

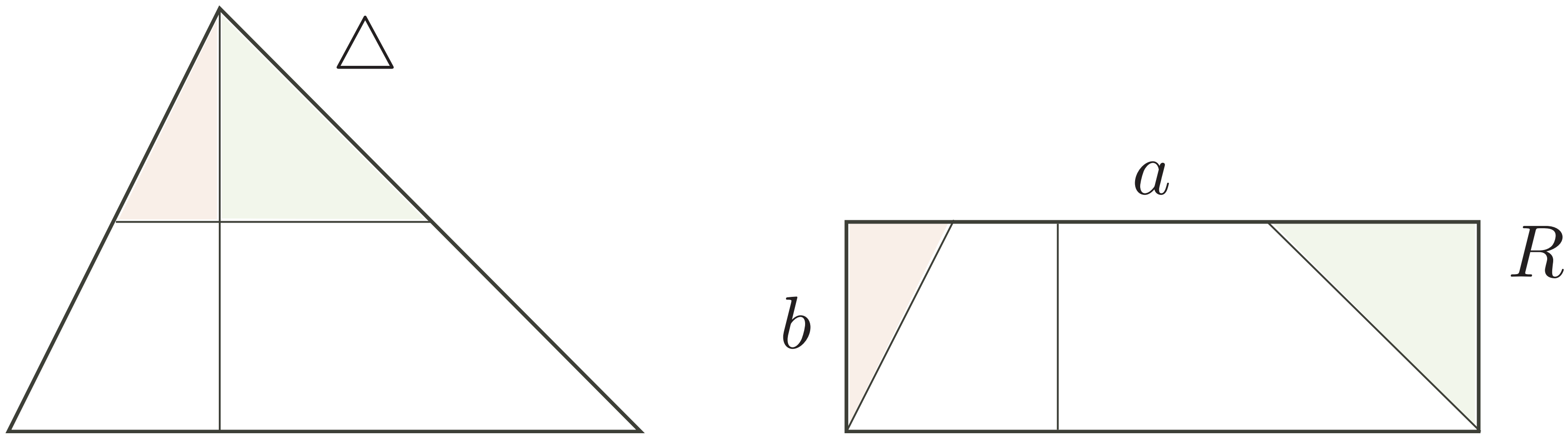
$$\mathsf{A}(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{A}(P_i) \ .$$

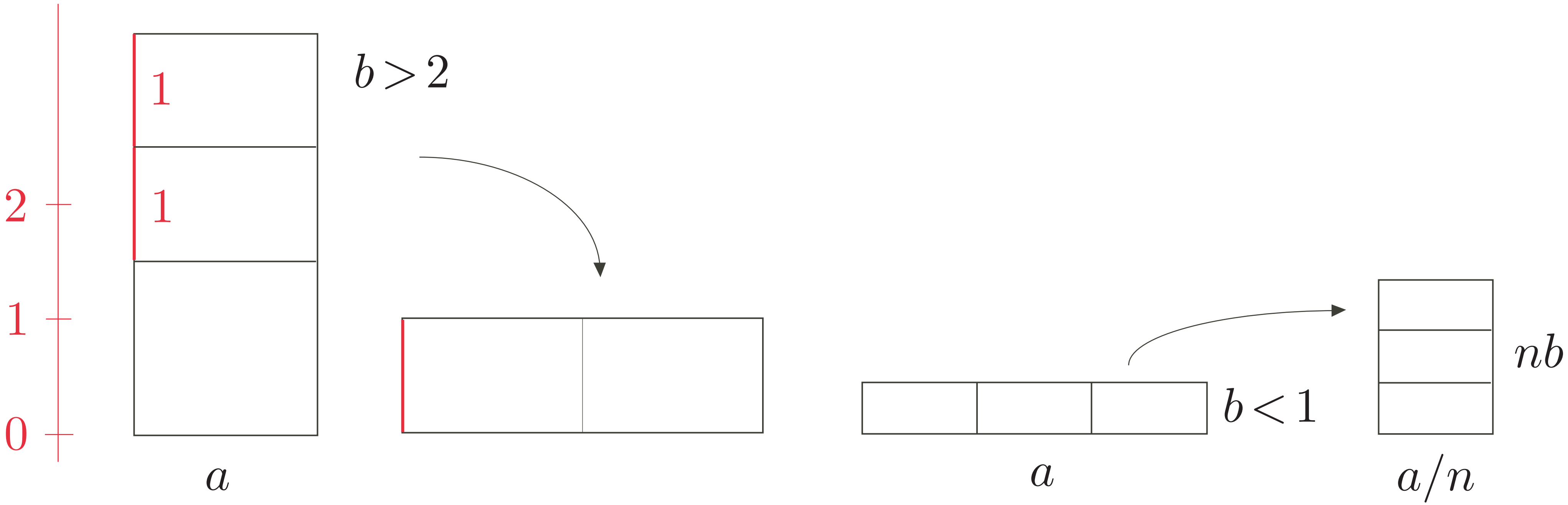
Zerlegungsgleiche Polygone haben dann denselben Flächeninhalt:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n}\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\, \backslash \;\; P_i, \qquad Q = \bigcup_{i=1}^{n}\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\, \backslash \;\; Q_i, \qquad P_i \cong Q_i \ \forall i$$

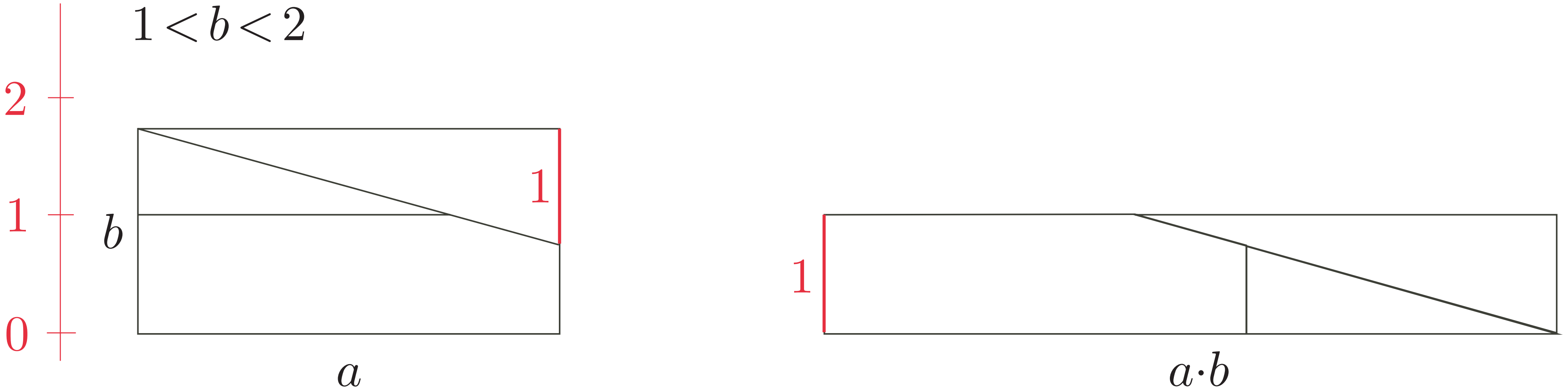
$$\Rightarrow \quad \mathsf{A}(P) = \mathsf{A}(Q) \ .$$

- Ist S ein rechteckiger Streifen der Breite 1 und der Länge ℓ, so gilt $\mathsf{A}(S) = \ell$.





$b>2$
1
1
2
1
0
a
$b<1$
a
nb
a/n

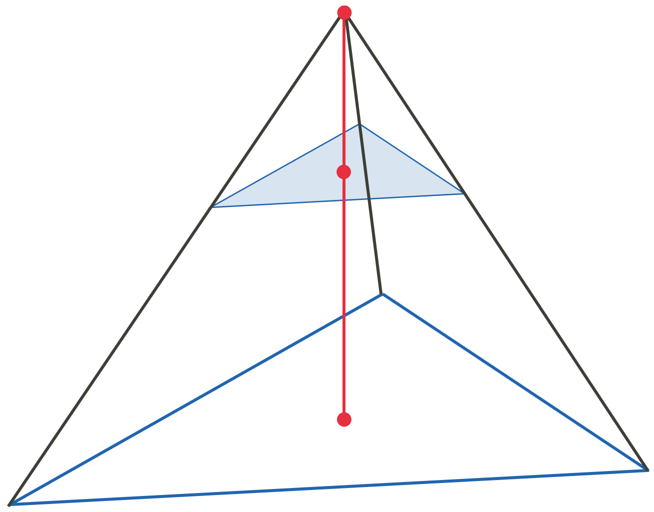


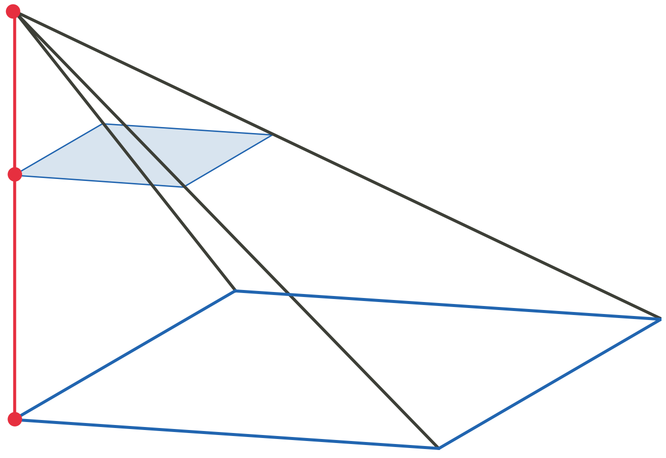
$1<b<2$
2
1
0
b
1
a
1
$a \cdot b$

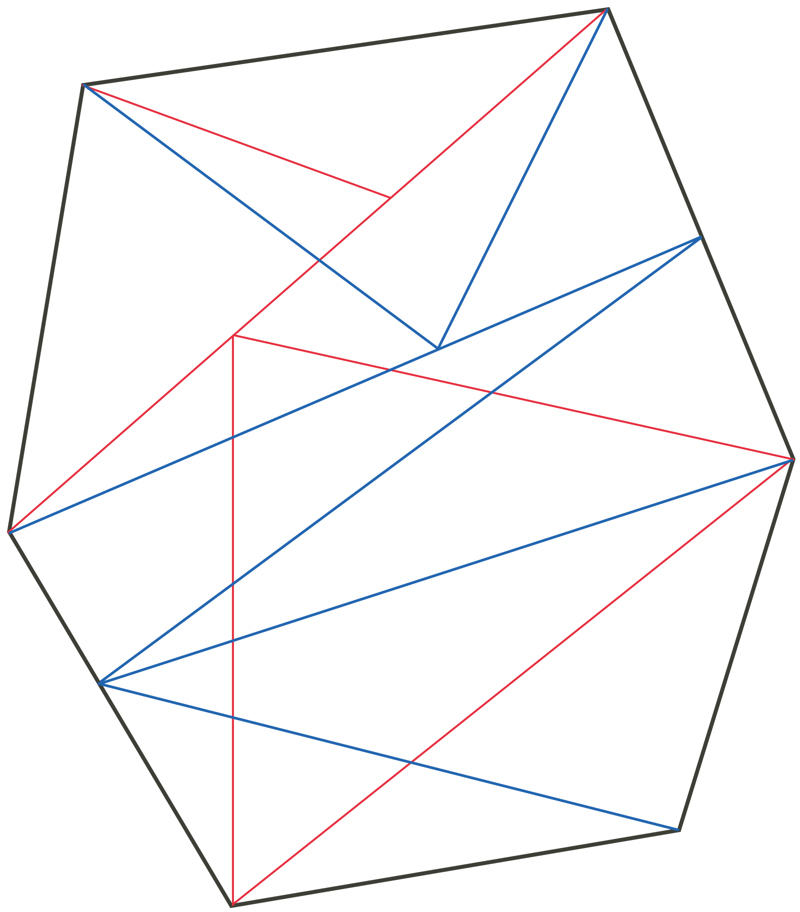
$$\mathsf{A}(a \times b\text{-Rechteck}) = a \cdot b\,, \qquad \mathsf{A}(\triangle) = \frac{1}{2}\, g \cdot h$$

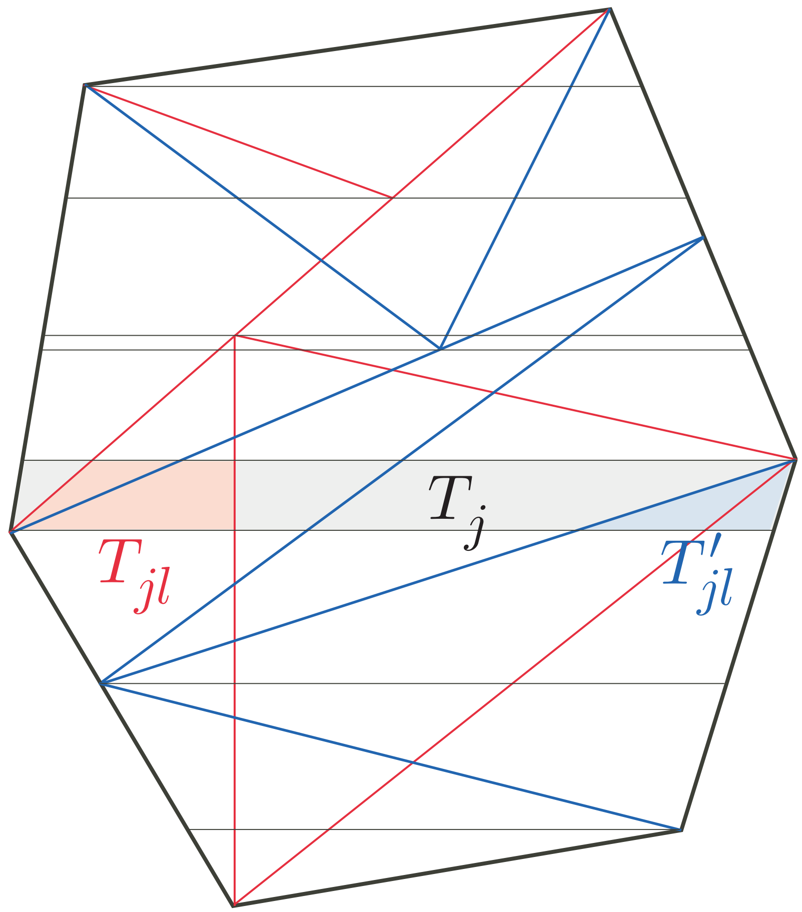
$$P = \bigcup_{i=1}^{n} \triangle_i \quad \Rightarrow \quad \mathsf{A}(P) = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{A}(\triangle_i)$$

Volumina : $\qquad \mathsf{V}(T) = \frac{1}{3}\, \mathsf{A}(G) \cdot h$








T_j
T_{jl}
T'_{jl}

Gauss spricht [...] sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, dass dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden. [...] Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich, und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen [...].

Satz von Dehn (1900):

Ein reguläres Tetraeder und ein Quader sind nicht zerlegungsgleich.

Jedem Polyeder $P \subset \mathbb{E}^3$ lässt sich ein gewisses "Datenpaket" $D(P)$, genannt **Dehn-Invariante** von P, zuordnen.

Zwei Polyeder P, Q sind höchstens dann zerlegungsgleich, wenn sie dasselbe Volumen und dieselbe Dehn-Invariante besitzen.

$$D(P) \ \in \ \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Q})$$

Polyeder P mit Kanten e_k $(1 \leq k \leq n)$,
Längen $\ell(e_k)$, innere Gratwinkel α_k

Daten $\big(\ell(e_k), \alpha_k\big)_{1 \leq k \leq n}$ werden kondensiert zu $D(P)$

$W := \{\alpha_0 = \pi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ *Winkelsortiment*

$$V(W) := \left\{ \textstyle\sum_{k=0}^{n} q_k \alpha_k \;\middle|\; q_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum

lineares $f\colon V(W) \to \mathbb{Q}$ mit $f(\pi) = 0$ *Testfunktion*

f eine Testfunktion, setze $\quad D_f(P) := \sum_{k=1}^{n} \ell(e_k) f(\alpha_k)$

P ein Quader $\quad \Rightarrow \qquad D_f(P) = 0$ für beliebiges f

Allgemeiner Satz von Dehn, nach Hadwiger:

P, Q Polyeder, W Winkelsortiment, das alle vorkommenden Gratwinkel enthält,

$D_f(P) \neq D_f(Q)$ für eine einzige Testfunktion f

$\Rightarrow \quad P$ und Q nicht zerlegungsgleich

Geometrisches Lemma:

P in Teilpolyeder zerlegt: $\quad P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$

Sortiment $\widetilde{W}$ enthält alle auftretenden Gratwinkel

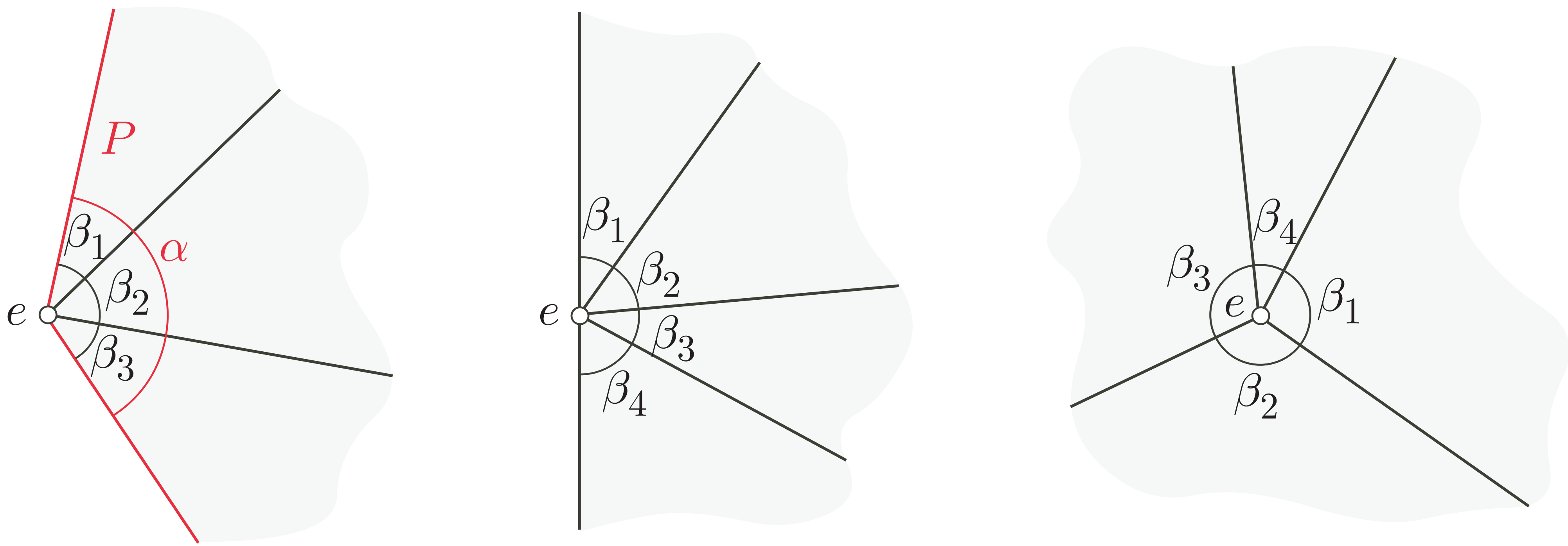
$\Rightarrow \quad D_f(P) = \sum_{i=1}^{m} D_f(P_i)$

α_k Gratwinkel von P, $\quad \beta_k$ Gratwinkel der P_i

$\widetilde{W} = \{\pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n'}\}$

Unterteilung von Kanten ändert $D_f(P)$ nicht

$\Rightarrow$ Normalschnitt konstant längs jeder Kante e



$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \alpha, \qquad \beta_1 + \ldots + \beta_4 = \pi, \qquad \ldots = 2\pi$$

$$f(\beta_1) + f(\beta_2) + f(\beta_3) = f(\alpha),$$

$$f(\beta_1) + f(\beta_2) + f(\beta_3) + f(\beta_4) = f(\pi) = 0, \quad \ldots$$

P und Q zerlegungsgleich,

W enthält alle Gratwinkel von P und Q,

$f\colon V(W) \to \mathbb{R}$ Testfunktion

Teilpolyeder $P_i \cong Q_i$ $(1 \le i \le m)$ mit Gratwinkeln β_k

$\widetilde{W} := W \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, $\exists$ Fortsetzung $f\colon V(\widetilde{W}) \to \mathbb{R}$

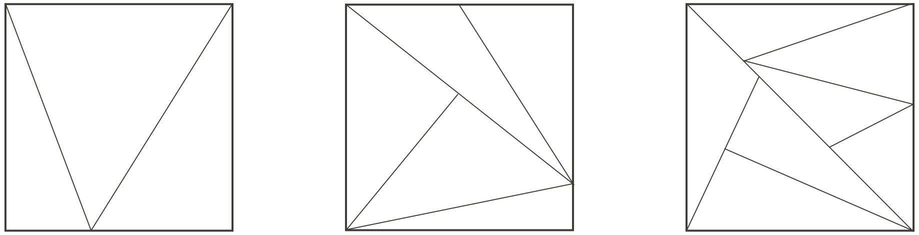
$D_f(P) = \sum_{i=1}^{m} D_f(P_i) = D_f(Q)$ ✓

T reguläres Tetraeder, Q volumengleicher Quader

Kantenlänge $\ell > 0$, Gratwinkel $\alpha = \arccos \frac{1}{3} \notin \pi\mathbb{Q}$

$W = \{\pi, \alpha\}$, $\dim_{\mathbb{Q}} V\big(\{\pi, \alpha\}\big) = 2$; $f(\pi) = 0$, $f(\alpha) = 1$

$D_f(T) = 6\ell f(\alpha) = 6\ell \neq 0 = D_f(Q)$ ✓



Satz von Monsky (1971):

Es ist unmöglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl flächengleicher Dreiecke zu zerlegen.

$\mathbf{z} = (x, y)$, rationale Koordinaten x, y

$x \neq 0$ rational $\quad\Rightarrow\quad x = 2^n \dfrac{p}{q}\,, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p,\ q$ ungerade

2-*adischer Wert* von x: $\quad \|x\| := 2^{-n}\,; \qquad \|0\| := 0$

$$\|1\| = 1, \quad \left\|\tfrac{3}{5}\right\| = 1, \quad \left\|-\tfrac{5}{12}\right\| = 4, \quad \left\|\tfrac{8}{27}\right\| = \tfrac{1}{8}, \quad \|20\| = \tfrac{1}{4}$$

Rechenregeln:

$$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\| \ ,$$

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \ ,$$

$$\|x\| < \|a\| \quad \Rightarrow \quad \|a + x\| = \|a\| \ .$$

Einteilung der Punkte $\mathbf{z} = (x, y)$ in drei Klassen:

$\mathbf{z} \in O :$ $\quad \|x\| < 1 \quad \wedge \quad \|y\| < 1$ $\quad$ ("Nullklasse")

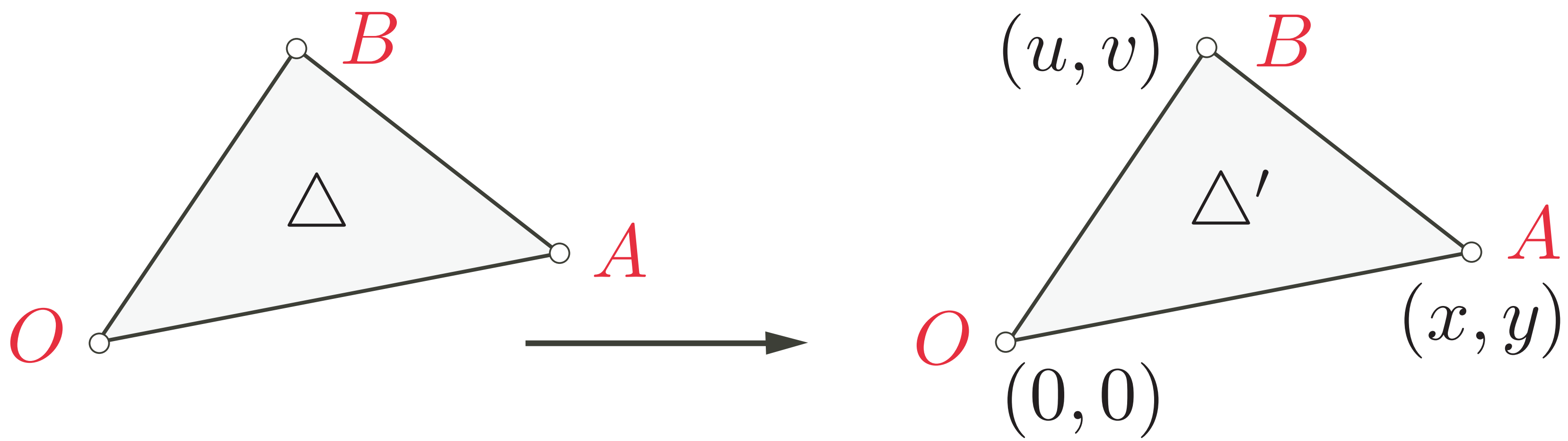
$\mathbf{z} \in A :$ $\quad \|x\| \geq 1 \quad \wedge \quad \|x\| \geq \|y\|$

$\mathbf{z} \in B :$ $\quad \|y\| \geq 1 \quad \wedge \quad \|y\| > \|x\|$

$$\mathbf{c} \in X \quad \wedge \quad \mathbf{z} \in O \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{c} + \mathbf{z} \in X$$

$\triangle$ mit Ecken in drei verschiedenen Klassen: *perfekt*

Lemma. $\triangle$ perfekt $\Rightarrow$ $\|\mathsf{A}(\triangle)\| \geq 2$

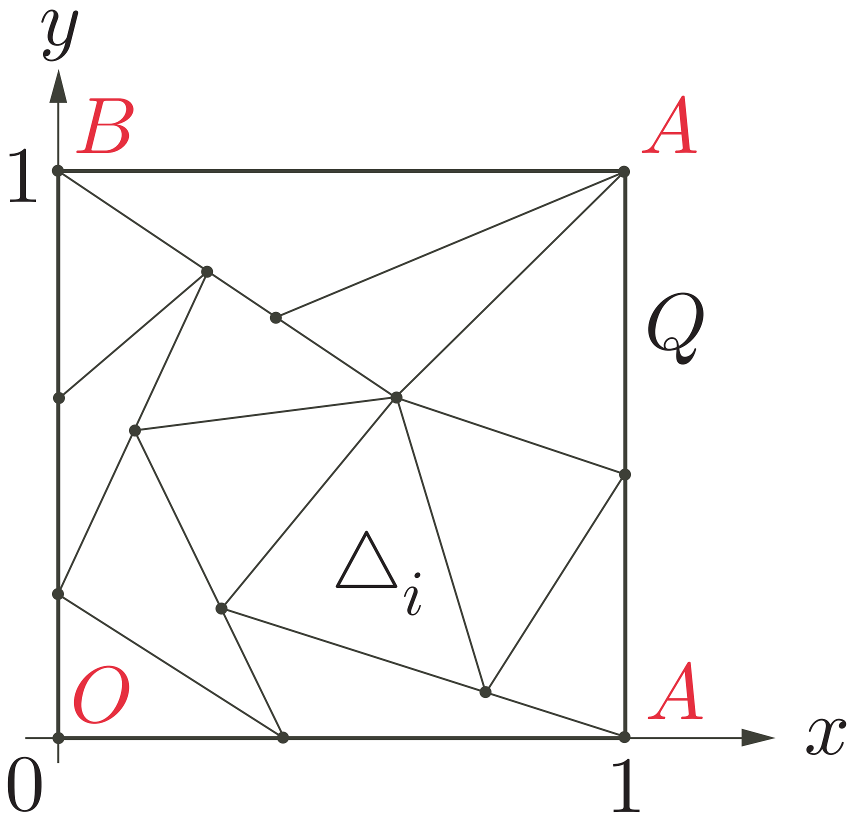


$$\mathsf{A}(\triangle) = A(\triangle') = \tfrac{1}{2}\,\left|xv - yu\right|$$

$$\|yu\| = \|y\|\;\|u\| < \|x\|\;\|v\| = \|xv\|$$

$$\|\mathsf{A}(\triangle)\| = \left\|\tfrac{1}{2}\right\|\;\|xv\| = 2 \cdot \|x\| \cdot \|v\| \geq 2$$

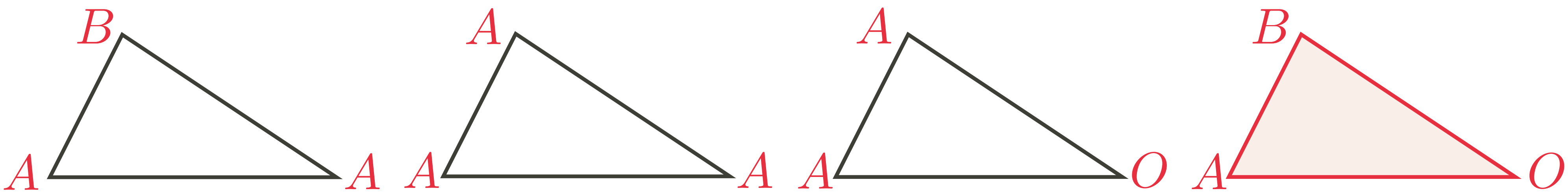
Korollar. Auf einer Geraden können nicht Punkte von allen drei Klassen liegen



der Zauberstab: die Invariante

$\#(K) :=$ Anzahl der OA-Kanten in K, **modulo 2**

Beispiel: $\#(\partial Q) = 1$



$\#(\partial\triangle) = 0$ $\qquad \#(\partial\triangle) = 0$ $\qquad \#(\partial\triangle) = 0$ $\qquad \#(\partial\triangle) = 1$

$$\sum_i \#(\partial\triangle_i) \;=\; \#(\partial Q) \;=\; 1$$

$\Rightarrow$ es gibt mindestens 1 perfektes $\triangle_i \qquad =: \;\triangle^*$

Lemma: $\quad \|\mathsf{A}(\triangle^*)\| \geq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{A}(\triangle^*) \neq \dfrac{1}{2m+1}$

`www.math.ethz.ch/~blatter/Zerlegungen.pdf`