Teil (C) Beweisen am Gymnasium

Mathematik ist die beweisende Wissenschaft. Der bekannte Mathematiker Albrecht Beutelspacher bemerkte gar einst, wer Mathematik sage, sage Beweis. Ohne Beweise ist Mathematik nicht denkbar. Welche Rolle aber sollen sie im Mittelschulunterricht spielen? Was sollen wir an der Mittelschule überhaupt unter dem Begriff „Beweis“ verstehen?

Hier eine Arbeitsdefinition.

> Unter einem Beweis verstehen wir eine Argumentation, welche einen mathematischen Sachverhalt verständlich, vollständig und korrekt herleitet oder verifiziert.

Dazu ein paar Bemerkungen:

- Mit „verständlich“ ist gemeint, dass das angesprochene Publikum die Argumentation verstehen kann und diese auch sprachlich nachvollziehbar verfasst wird. In der Mittelschule umfasst das Publikum vor allem die Mitschülerinnen und Mitschüler – und nur am Rande auch die Lehrperson. Man kann sich als Adressaten der Argumentation gut den „interessierten Laien“ vorstellen.

- Zur „Vollständigkeit“: Man kann zu beweisende mathematische Sachverhalte bis auf die Axiome zurückführen – das ist hier selbstverständlich nicht gemeint. Es gilt, dass die Argumentation im Rahmen der behandelten Theorie vollständig sein soll, also etwa Überlegungen zu Definitionsbereichen etc. beinhaltet. Zudem verlangen wir, dass die Argumente schriftlich oder mündlich so festgehalten werden, dass keine Argumentationslücken entstehen.

Mit Beweisen meinen wir also alle Tätigkeiten, welche mathematische Sachverhalte erklären. Beweisen umfasst somit die Tätigkeiten Erklären, Argumentieren, plausibel machen, Herleiten etc.

Wir sprechen hier vom Beweisen im Mittelschulunterricht. Wer soll beweisen? – Natürlich die Lernenden, die Schülerinnen und Schüler. Also werden wir unsere Arbeitsdefinition von „Beweis“ als Lernziel formulieren:

> Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mathematische Sachverhalte verständlich, vollständig und korrekt herleitet und erklärt.

Solche Lernziele findet man tatsächlich in den Lehrplänen verschiedener Gymnasien.

Weshalb beweisen?

Im Folgenden soll nun geklärt werden, weshalb sich die Lernenden überhaupt mit mathematischen Beweisen auseinandersetzen sollen.

These 1: **Nur wer einen mathematischen Sachverhalt verständlich, vollständig und korrekt herleiten und erklären kann, hat diesen auch verstanden.**

Diese These soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Im Mittelschulunterricht wird die Kurvendiskussion thematisiert. Dabei stehen zwei konkrete Lernziele auf dem Programm:

- *Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, eine Kurvendiskussion durchzuführen.*
  Damit ist gemeint, dass sie eine Kurvendiskussion fehlerfrei ausführen und die geforderten Grössen berechnen können, also etwa die Koordinaten der Wendepunkte einer Kurve. Ob dieses Lernziel erreicht wurde kann einfach geprüft werden: Man gibt den Lernenden eine geeignete Funktionsgleichung vor und fordert sie auf, eine Kurvendiskussion durchzuführen.

- *Die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie eine Kurvendiskussion funktioniert.*
  Damit ist gemeint, dass sie verstehen, weshalb die durchzuführenden Schritte tatsächlich die Koordinaten der Wendepunkte liefern. Es ist wichtig zu verstehen, dass, wenn ein Schüler die korrekten Koordinaten berechnen kann, er nicht zwangsläufig versteht, warum seine Berechnungen tatsächlich die korrekten Zahlen liefern. Die Praxis zeigt sogar: Die wenigsten, auch jene nicht, die eine Diskussion korrekt durchzuführen im Stande sind, verstehen den Mechanismus der Kurvendiskussion. Wenn man im Unterricht den Fokus auf diesen Mechanismus lenken will, so muss man die Lernenden zum Argumentieren bringen – zum Beweisen.

Wie dieses zweite Lernziel erreicht werden kann, soll im Folgenden beispielhaft gezeigt werden. Eine sehr lernwirksame und erfolgreiche Methode bilden die sogenannten „Selbsterklärungen“. Im Zusammenhang mit der angesprochenen Kurvendiskussion könnte eine Aufgabenstellung lauten:

Paul behauptet: *Wenn die Ableitungsfunktion einer Funktion genau drei verschiedene Nullstellen hat, so besitzt die Funktion ganz sicher ein lokales Maximum.* Hat Paul recht?

Lernende, welche mit dieser Fragestellung konfrontiert werden, müssen sich zuerst überlegen, ob Paul recht hat oder nicht: Sie müssen über das gestellte Problem nachdenken und eine Vermutung aufstellen. Dann müssen Sie zeigen, dass ihre Vermutung korrekt ist: Sie müssen ihre eigene Vermutung beweisen. Damit treiben die Lernenden eigentliche Mathematik.

Haben die Lernenden verstanden, wie eine Kurvendiskussion funktioniert, können sie selbständig diese Theorie erweitern und haben somit eine echte mathematische Kompetenz erworben. Sie sind fähig, Aufgabenstellungen wie diese erfolgreich zu bearbeiten:

Wie kann man rein rechnerisch feststellen, ob es sich bei einem Wendepunkt um einen links-rechts Wendepunkt oder einen rechts-links Wendepunkt handelt? Argumentieren Sie mit der dritten Ableitung der Funktion.

Solche Aufgabenstellungen fördern das mathematische Verständnis der Lernenden und helfen ihnen so, die Mathematik zu durchschauen. Fordert man hingegen lediglich das korrekte Ausführen von Rechenschemata, welche diese nicht begreifen (und nicht begreifen sollen und müssen), entmündigt man die Schülerinnen und Schüler. Ein solcher Unterricht ist nicht motivierend und vermittelt die falschen Inhalte. Damit komme ich zur These 2.

These 2:

Wenn im Mathematikunterricht das Beweisen als Tätigkeit der Lernenden nicht geübt und gepflegt wird, so erhalten diese ein falsches Bild der Mathematik.

Die Wissenschaft der Mathematik ist ohne die Tätigkeit des Beweisens nicht denkbar. Erst die Beweise machen die Mathematik aus. Es ist definitiv nicht in Ordnung, dass viele Menschen nach vier Jahren Mittelschulmathematik keine Ahnung vom Beweisen haben, wo dies doch das eigentliche „Mathematik treiben" darstellt. Dies zeigt sich auch in der hohen Abbrecherquote an den Hochschulen im Fach Mathematik: Die Leute gehen mit völlig falschen Vorstellungen in die Vorlesungen.

In diesem Zusammenhang möchte ich zeigen, dass die gängigen Lehrmittel häufig auch nicht sonderlich hilfreich sind. Die folgenden Auszüge stammen aus dem Lehrmittel von Bigalke/Köhler, „Mathematik Band 2". Es behandelt die Vektorgeometrie und die Stochastik. Ich möchte vorausschicken, dass dieses Lehrmittel keineswegs einfach ein Negativbeispiele darstellt, sondern repräsentativ ist und durchaus brauchbares Material beinhaltet.

Wir sehen (nächste Seite) die Seite 247 im besagten Lehrmittel. Hier wird, anhand eines einleuchtenden Beispiels, erklärt, wie viele Tippmöglichkeiten es beim Lotto „3 aus 7" gibt. Dies wird anschliessend verallgemeinert und der bekannte Term „n tief k" hergeleitet. Das alles sieht überzeugend aus, mit brauchbaren Darstellungen untermauert und am Ende (Seite 248) zusammengefasst. Interessant ist dann das Beispiel und die Übungen für die Lernenden.

Keine einzige Übungsaufgabe geht auf das Konzept des Binomialkoeffizienten ein. Die Lernenden sollen lediglich lernen, in welchen Situationen die Formel zur Anwendung gebracht werden kann – auch dies ist natürlich wichtig! – aber keine Aufgabe erfordert ein Nachdenken über die Formel selber.

Wenn in den Lehrmitteln keine Beweise oder Herleitungen (oder Auseinandersetzungen mit Herleitungen und Beweisen) gefordert werden, und auch in Prüfungssituationen keine Beweise verlangt werden, beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler auch nicht damit. Sie folgen – völlig zurecht – dem Grundsatz: Wichtig ist, was an Prüfungen gefragt wird. Und wenn sie nicht verbindlich über den Binomialkoeffizient nachdenken müssen, tun sie es auch nicht.

Damit vermitteln wir ein falsches, oder doch zumidest ein unvollständiges Bild der Mathematik. Solche Lehrmittel, und der darauf aufgebaute Mathematikunterricht, enthalten den Lernenden die

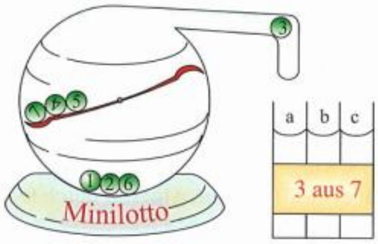
Mathematik systematisch vor und überlassen ihnen lediglich das Rechnen – und dann wundern wir uns, wenn es mit der Mathematik nicht klappt. Und damit sind wir bei der dritten These.

These 3:

Ein Unterricht, welche konsequent das Verstehen der mathematischen Sachverhalte – und damit die Tätigkeit des Beweisens – in den Vordergrund stellt, ist für die Lernenden motivierend und herausfordernd. In dem wir den Schülerinnen und Schülern helfen, die mathematischen Konzepte zu durchschauen, statt sie lediglich zum Rechnen zu verdonnern, tun wir etwas gegen die „Mathematikkrise“ an den Gymnasien.

C. Ungeordnete Stichproben beim Ziehen aus einer Urne

Beispiel: Minilotto „3 aus 7“
In einer Lottotrommel befinden sich 7 Kugeln. Bei einer Ziehung werden 3 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man mit einem Tipp Lottokönig?



Lösung:
Das Ankreuzen der 3 Minilottozahlen ist ein Ziehen ohne Zurücklegen. Würde es dabei auf die Reihenfolge der Zahlen ankommen, so gäbe es $7 \cdot 6 \cdot 5$ unterschiedliche 3-Tupel als mögliche geordnete Tipps.

Aus einer Menge von 7 Zahlen lassen sich $7 \cdot 6 \cdot 5$ verschiedene 3-Tupel bilden.

Da es beim Lotto jedoch nicht auf die Reihenfolge der Zahlen ankommt, fallen all diejenigen 3-Tupel zu einem ungeordneten Tipp zusammen, die sich nur in der Anordnung ihrer Elemente unterscheiden.

(a;b;c)
(a;c;b)
(b;a;c)
(b;c;a)
(c;a;b)
(c;b;a)
$\rightarrow$ {a;b;c}

Da man aus 3 Zahlen insgesamt 3! 3-Tupel bilden kann, fallen jeweils 3! dieser geordneten 3-Tupel zu einem Lottotipp, d. h. zu einer 3-elementigen Menge zusammen.
Es gibt also $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ Lottotipps.
Die Chancen, mit einem Tipp Lottokönig zu werden, stehen daher 1 zu 35.

Einer 3-elementigen Menge entsprechen jeweils 3! verschiedene 3-Tupel.

Eine Menge von 7 Zahlen besitzt genau $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$ 3-elementige Teilmengen.

Beim Minilotto werden aus einer 7-elementigen Menge ungeordnete Stichproben vom Umfang 3 ohne Zurücklegen entnommen. Eine solche Stichprobe stellt eine 3-elementige Teilmenge der 7-elementigen Menge dar.
Es gibt insgesamt genau $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{3}$ solche Teilmengen.

Verallgemeinerung:
Aus einer n-elementigen Menge kann man $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ k-elementige Teilmengen (ungeordnete Stichproben vom Umfang k) bilden.
Der Term $\binom{n}{k}$, gelesen „n über k“, heißt ***Binomialkoeffizient***. Im Tabellenanhang (S. 409) befindet sich ein Tabelle der Binomialkoeffizienten. Auf Taschenrechnern existiert eine spezielle Berechnungstaste, die nCr-Taste (engl.: n choose r; dt.: n über r), das CAS verfügt über eine entsprechende Funktion.

Unsere Überlegungen lassen sich folgendermaßen als Abzählprinzip zusammenfassen:

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe)

Wird aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln eine ungeordnete Teilmenge von k Kugeln entnommen, so ist die Anzahl der Möglichkeiten hierfür durch folgende Formeln gegeben:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Beispiel: Wie viele verschiedene Tipps müsste man abgeben, um im Zahlenlotto „6 aus 49" mit Sicherheit „6 Richtige" zu erzielen?

Lösung:
Beim Lotto wird aus der Menge von 49 Zahlen eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 6, d. h. eine Menge mit 6 Elementen, ohne Zurücklegen entnommen.
Eine 49-elementige Menge hat $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$ verschiedene 6-elementige Teilmengen. So viele Tipps sind möglich und nur einer trifft ins Schwarze.

Übung 3

a) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten $\binom{5}{3}, \binom{7}{6}, \binom{4}{4}, \binom{5}{0}, \binom{8}{3}, \binom{9}{2}, \binom{22}{11}, \binom{100}{20}$.
b) Wie viele 5-elementige Teilmengen hat eine 12-elementige Menge?
c) Wie viele Teilmengen mit mehr als 4 Elementen hat eine 9-elementige Menge?
d) Wie viele Teilmengen hat eine 10-elementige Menge insgesamt?

Übung 4

a) An einem Fußballturnier nehmen 8 Mannschaften teil. Wie viele Endspielkombinationen sind möglich?
b) In einer Stadt gibt es 5000 Telefonanschlüsse. Wie viele Gesprächspaarungen gibt es?
c) Aus einer Klasse mit 25 Schülern sollen drei Schüler abgeordnet werden. Wie viele Gruppenzusammenstellungen sind möglich?

Übung 5

a) Aus einem Skatspiel werden vier Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um vier Asse?
b) Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden 5 zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Konsonant dabei ist?

---

* Hinweise: $\binom{n}{k}$ ist nur für $0 \leq k \leq n$ definiert. Wegen $0! = 1$ gilt $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$.