Lehrkunstdidaktik Mathematik:

Tartaglia und die Gleichung 3. Grades

Philipp Spindler (KS Alpenquai Luzern)

TMU Chur 2013

Lehrkunstdidaktik

J. Wiechmann, „Zwölf Unterrichtsmethoden“
eine der zwölf gängigsten und wichtigsten Unterrichtsmethoden

H. Meyer, R. Demuth, „Unterricht weiterentwickeln und beurteilen“
eine von neun Allgemeindidaktiken

Lehrkunstdidaktik-Reihe im hep-Verlag

Martin Wagenschein (1896-1988)

Vater der Lehrkunstdidaktik
Methodentrias genetisch – sokratisch - exemplarisch

Wolfgang Klafki

Theorie der **kategorialen Bildung** (1959)
an einem Wagenschein-Exempel entwickelt

Christoph Berg / Theodor Schulze

Erprobung von Unterrichtsexempeln Wagenscheins

Hinzufügung von Eigenkompositionen im Sinne von Wagenschein / Klafki (1995)

Lehrstücke

Einheiten von 10 – 25 Lektionen

Exemplarisch:
Gewonnene Einsichten sowie Verfahren können auf analoge Probleme / Phänomene übersetzt werden.

Genetisch:
Kein Zwang treibt an, nur das Problem.

Dramat(urg)isch:
Lernende ringen mit dem Lerngegenstand, Gegenstand ringt mit den Lernenden.

Lehrstücke in Mathematik

Euklids Primzahlenbeweis
Beweisen mit Euklid (Sechsstern)
Dreiecksquadrate (Pythagoras)
Platonische Körper
Kreiszahl Pi
Wurzel 2
Vom Würfel zur Kugel
Ähnlichkeit und Strahlensätze
Logarithmen mit Bürgi
Kegelschnitte
Tartaglia und die kubische Gleichung
Achilles und die Schildkröte
Pascals Wahrscheinlichkeitsrechnung

Schweizer Gymnasien mit Lehrkunst

Trogen

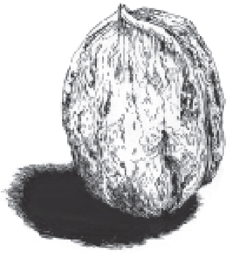
Bern Neufeld

Basel St. Leonhard

Luzern Alpenquai

Lehrstücke

Mathematik



Kantonsschule

Alpenquai Luzern

Bild von Canaletto

Prolog: Die Aufforderung zum Duell

Hiermit fordere ich,

Antoniomaria Fior,

den Rechenmeister

Niccolò Tartaglia

zum Duell heraus.

Der Herausgeforderte möge sich am 10. Januar 1535 a.D. bei Notar Zambelli in der Foscarigasse melden.

Niccolò Tartaglia

(~1500 – 1557)

ursprünglich wohl Niccolò Fontana

1512 in Brescia schwer verwundet, stottert

→ Übername Tartaglia („Stotterer“)

arbeitet als Rechenlehrer

hilft Kaufleuten beim Berechnen von Zinsen

berechnet Brotpreise für die Stadt Verona

1534 Umzug nach Venedig

1. Akt: Die Duellaufgaben

Duellbedingungen

30 Aufgaben für den Kontrahenten

1 Monat Zeit

Sieger ist, wer mehr Aufgaben korrekt lösen kann

Preis: Ehre, 1 Abendessen für jede nicht gelöste Aufgabe

Lernende erfinden ihre eigenen Duellaufgaben

Mathematik zur Zeit Tartaglias

Euklid
(4. Jh.v.Chr.)

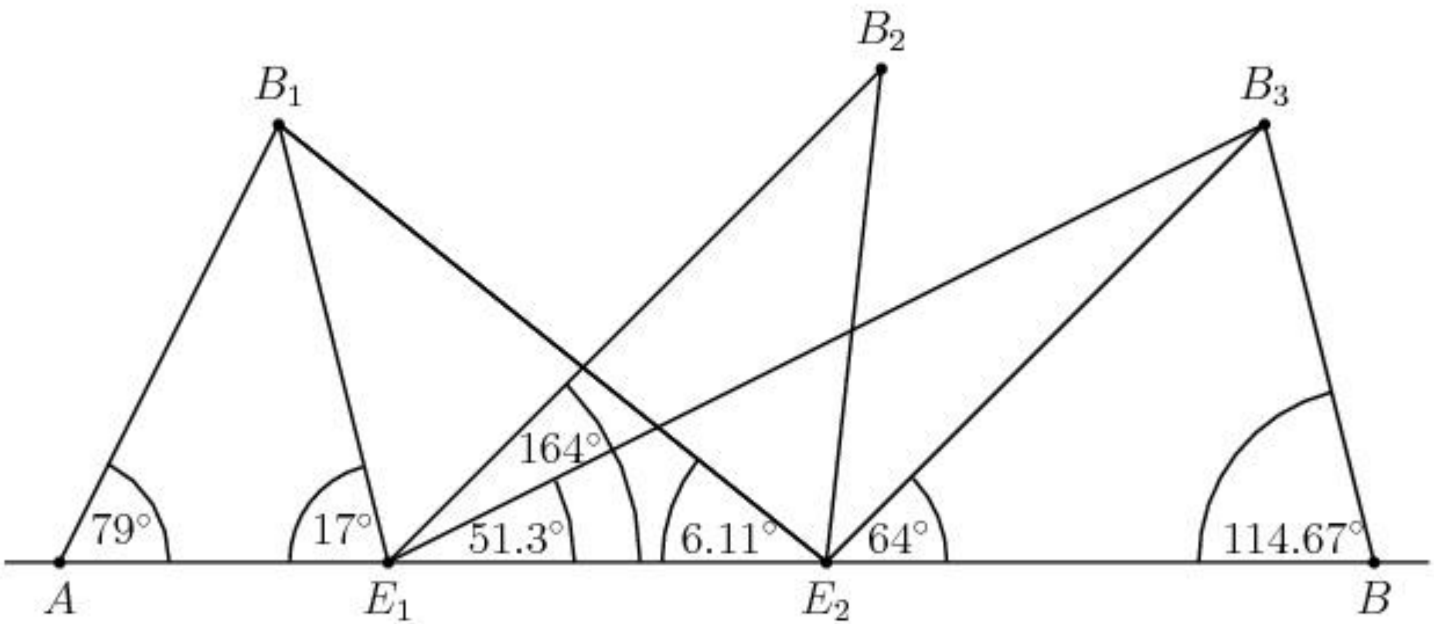
Al-Chwarizmi
(9. Jh.)

Fibonacci
(13. Jh.)

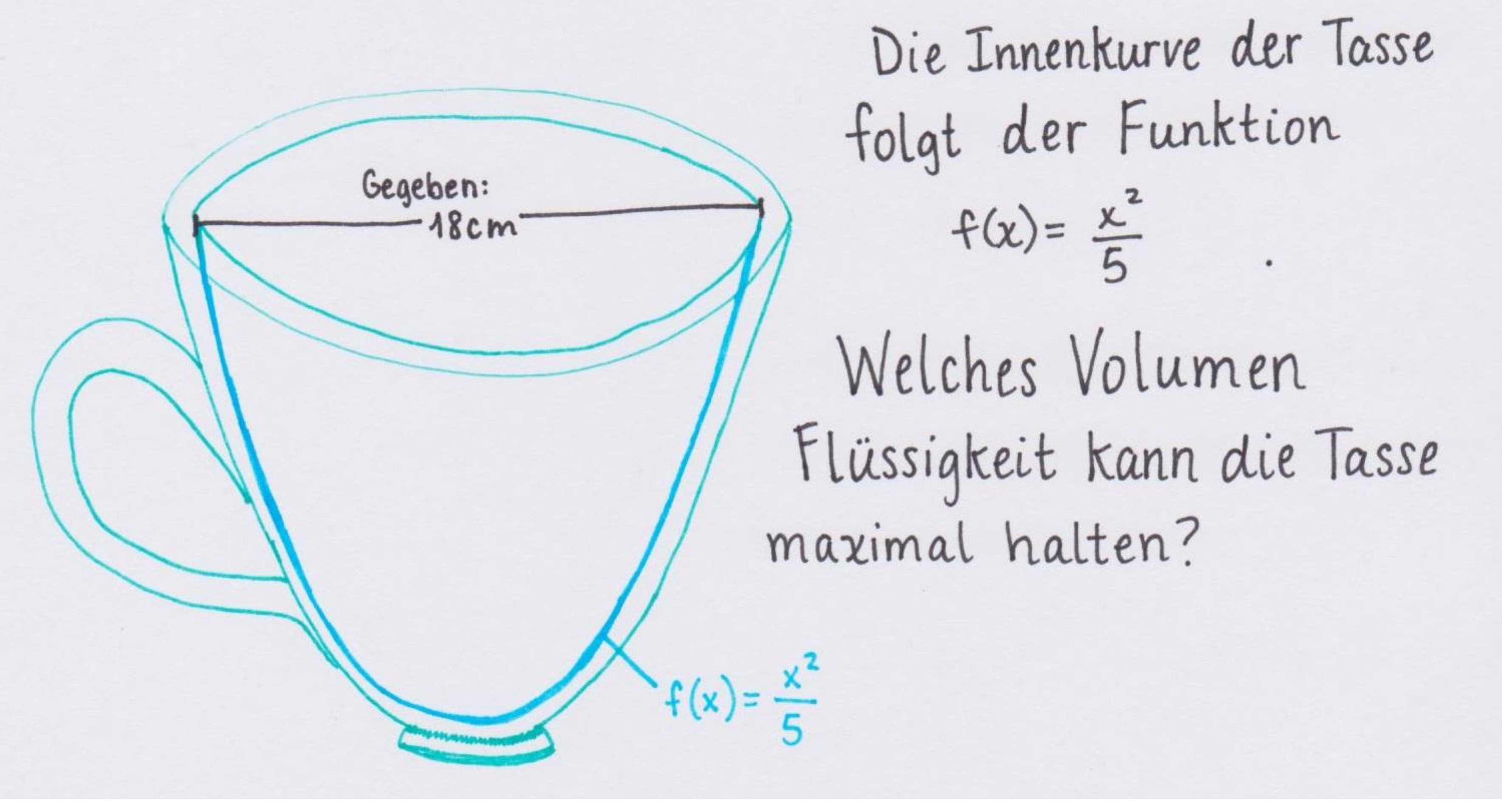
Pacioli
(15. Jh.)

Beispiele erfundener Duellaufgaben (1)

Ein Bauer fährt mit seinem Wagen vom Feld nach Hause. Er bewältigt den Weg in drei Etappen. Auf der ersten Etappe hat er ein Tempo von 2 m/s. Auf der zweiten Etappe beträgt seine Geschwindigkeit 1.5 m/s. Er braucht für diese Strecke 233.3 s. Für die letzte Etappe braucht er 7 s. Zwischen den Etappen misst er jeweils die Winkel zu den Bäumen, wie in der Zeichnung angegeben. Wie lange braucht er für die gesamte Strecke, wenn er für jede Winkelberechnung 2 min braucht?



Beispiele erfundener Duellaufgaben (2)



2. Akt: Das Ringen um die kubische Gleichung

Die Aufgaben von Fior

5. Zwei Männer gründen eine Gesellschaft, wobei die beiden zusammen 900 Dukaten Kapital einbringen müssen, mit der Bedingung, dass der eine die Kubikwurzel des anderen einbringt. Ich frage, wie viel jeder in die besagte Gesellschaft einbringen muss.

12. Ein Juwelier verkauft zwei Schmuckstücke für zweitausend und neunhundert Dukaten, nämlich einen Diamanten und einen Rubin, und der Rubin wurde zur Kubikwurzel des Wertes des Diamanten verkauft. Ich frage, wie viel der Rubin wert war.

22. Es sind zwei gleichseitige Sechsecke, deren Flächen zusammen 27 Ellen ergeben, und das kleinere Sechseck ist die Kubikwurzel des grösseren. Ich frage nach der Fläche des kleineren.

Algebraische Übersetzungen

5. $x^3 + x = 900$

12. $x^3 + x = 2900$

22. $x^3 + x = 27$

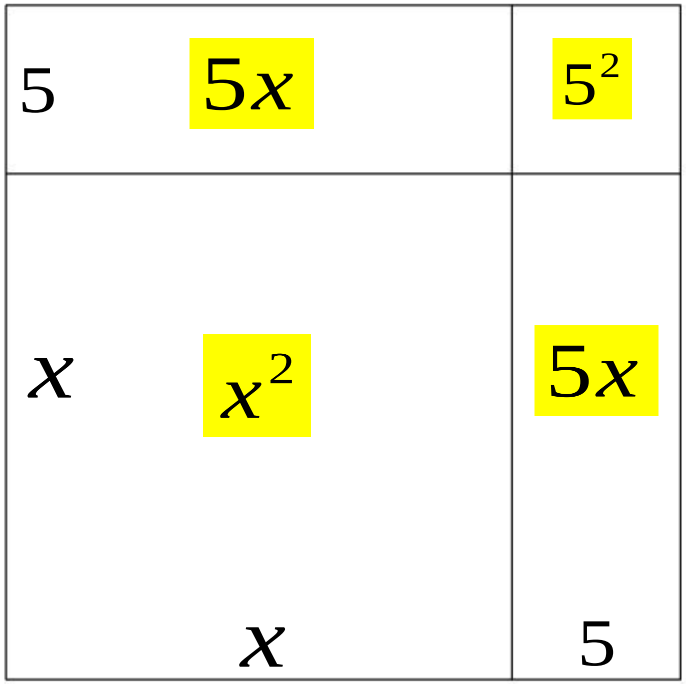
23. $x^3 + x = 29$

24. $x^3 + x = 34$

Alle Aufgaben sind vom gleichen Typ: $x^3 + px = q$

noch 21 Tage

Al-Chwarizmis Gnomon



$$x^2 + 10x = 96$$

$$x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x = 96$$

$$x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = 96 + 5^2$$

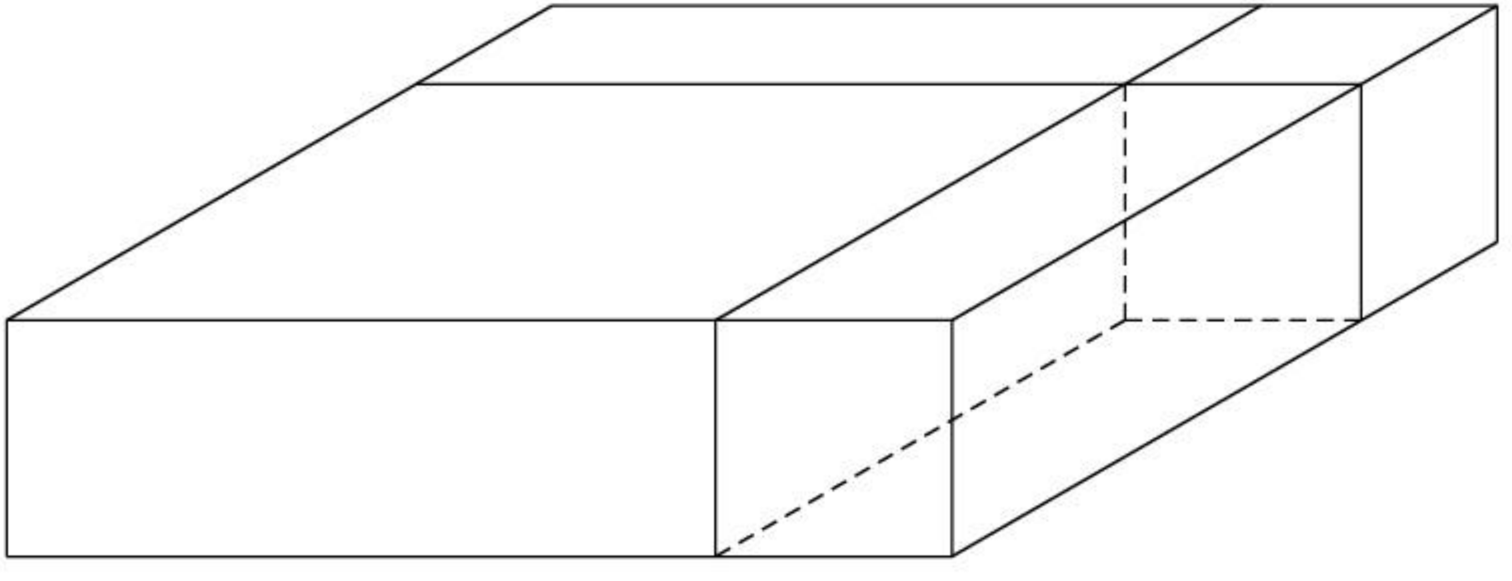
$$(x+5)^2 = 121$$

$$x + 5 = 11$$

$$x = 6$$

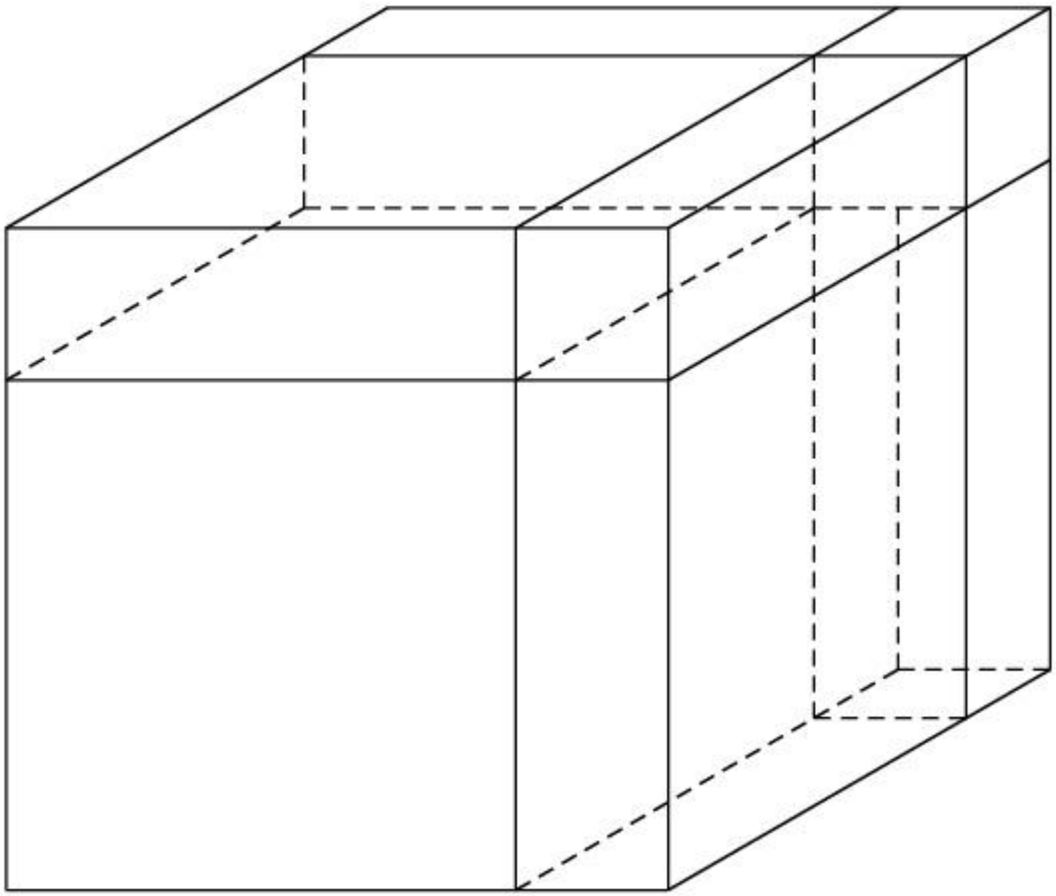
noch 17 Tage

Regiomontans Gnomon



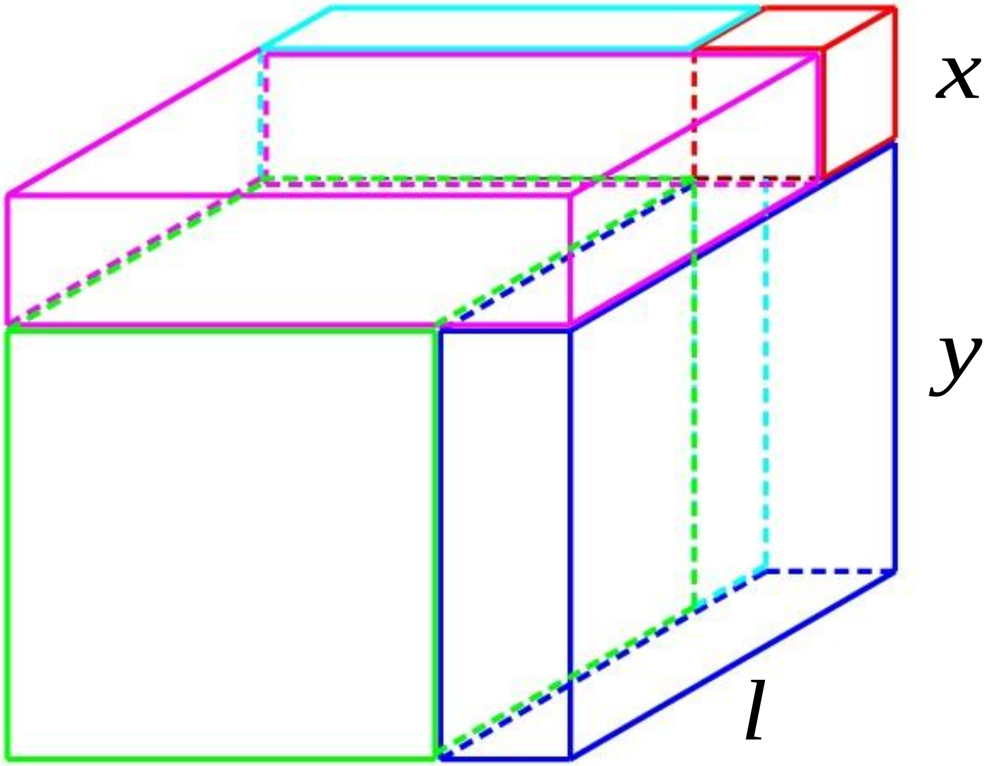
noch 16 Tage

Tartaglias Gnomon



noch 8 Tage

Tartaglias Gnomon



$$x^3 + px = q$$

$$px = 3lyx \Leftrightarrow y = \frac{p}{3l}$$

$$l^3 - y^3 = q$$

$$l^3 - \left(\frac{p}{3l}\right)^3 = q$$

$$l^6 - ql^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

$$u^2 - qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Mit Lösungsformel:

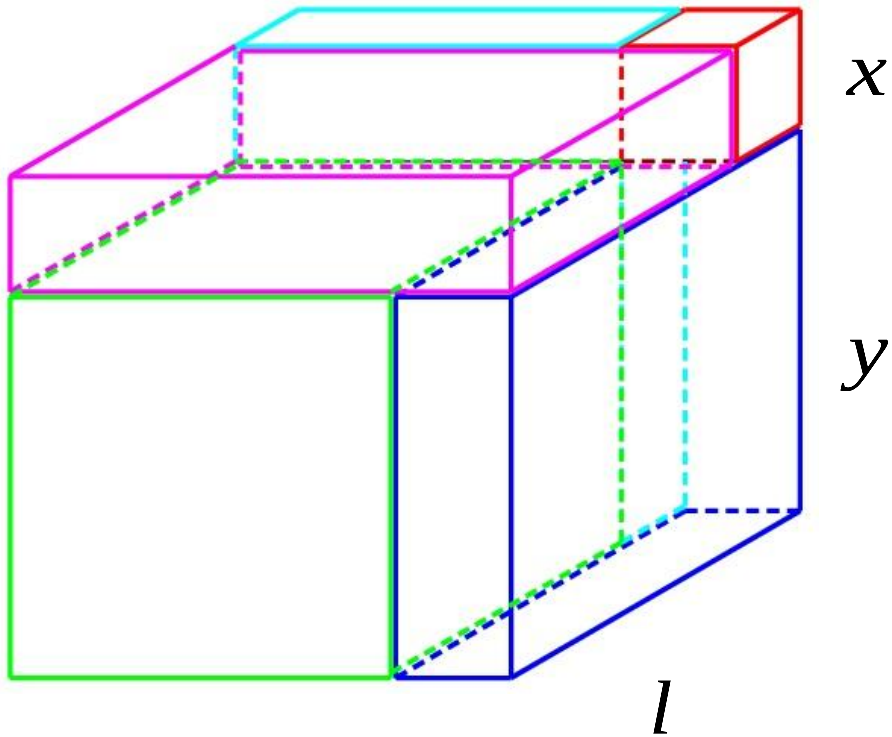
$$u = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Aus geometrischen Gründen:

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Aus $u^3 = l$ resultiert:

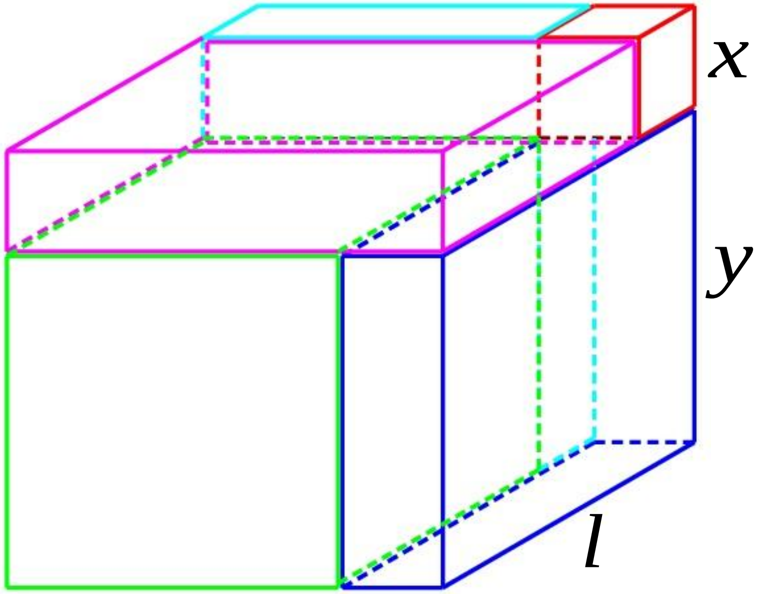
$$l = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$



Einsetzen von $l = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

in $y^3 = l^3 - q$ ergibt

$$y = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$



Aus $x = l - y$ folgt die Cardanische Formel:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

3. Akt: Allgemeine kubische Gleichung

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Substitution:

$$x = y - \frac{b}{3}$$

Ergibt kubische Gleichung des „Fiorschen“ Typs:

$$y^3 - \frac{b^2 - 3c}{3} y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d \right) = 0$$

4. Akt: Ziehen von Kubikwurzeln

Gleichung eines Schülers:

$$x^3 + 2x = 12$$

Diese Gleichung hat die offensichtliche Lösung 2.
Die Cardanische Formel liefert jedoch ein „erschreckendes“ Ergebnis:

$$x = \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}} + \sqrt[3]{6 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

Ist dieser Ausdruck gleich 2?
Wie können Kubikwurzeln gezogen werden?

Zitat von Tartaglia: Berechnung von $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$

... man muss die besagte 10 so in zwei Teile zerlegen, dass der eine von diesen eine Kubikzahl ist und der andere in drei gleiche Teile ohne Brüche geteilt werden kann, und um sie zu finden, subtrahiere ich von der besagten 10 jede von den in der besagten 10 enthaltenen Kubikzahlen, das sind 1 und 8, und schaue, welche von ihnen mir einen Rest gibt, der (wie gesagt) in drei gleiche Teile teilbar ist, und wir werden finden, dass es die 1 ist und nicht die 8. Nun sage ich, dass die Kubikwurzel aus 1, welche ebenfalls 1 ist, der kleinere Teil der besagten binomischen Kubikwurzel ist, und der andere Teil ist die Quadratwurzel aus dem Ergebnis, das herauskommt, wenn man den dritten Teil des obengenannten Restes durch den besagten kleineren Teil dividiert, das heisst, wenn man die besagte Kubikzahl 1 von 10 subtrahiert hat, bleibt 9, von welcher 9 man ihren dritten Teil nimmt, welcher 3 ist, und diesen dividieren wir durch die Kubikwurzel aus unserer Kubikzahl 1, welche ebenfalls 1 ist; aus der besagten Division wird sich ebenfalls 3 ergeben, und die Quadratwurzel aus 3 wird der grössere Teil unseres Wurzelbinoms sein, das heisst, die Kubikwurzel aus
wird gleich $\sqrt{3}+1$ sein, was zu zeigen war.

Von Schülern gefundene Näherungsverfahren

„Kubischer Heron“ am Beispiel $\sqrt[3]{10}$

$$10 = u \cdot u \cdot v$$

u	v
2	2.5
2.16667	2.13018
2.15451	2.15428
2.15443	2.15444

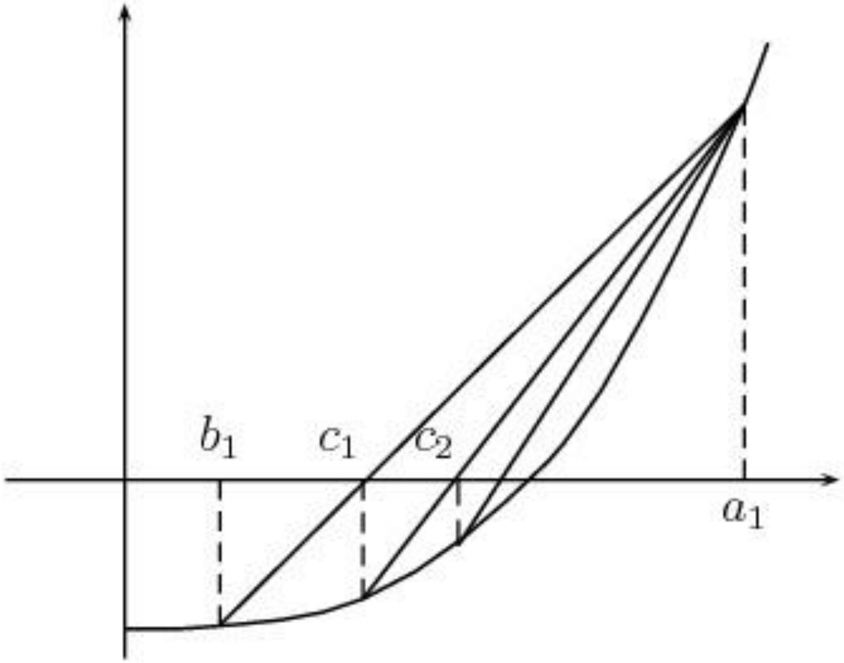
$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n + v_n}{3}$$

Graphische Näherungsverfahren

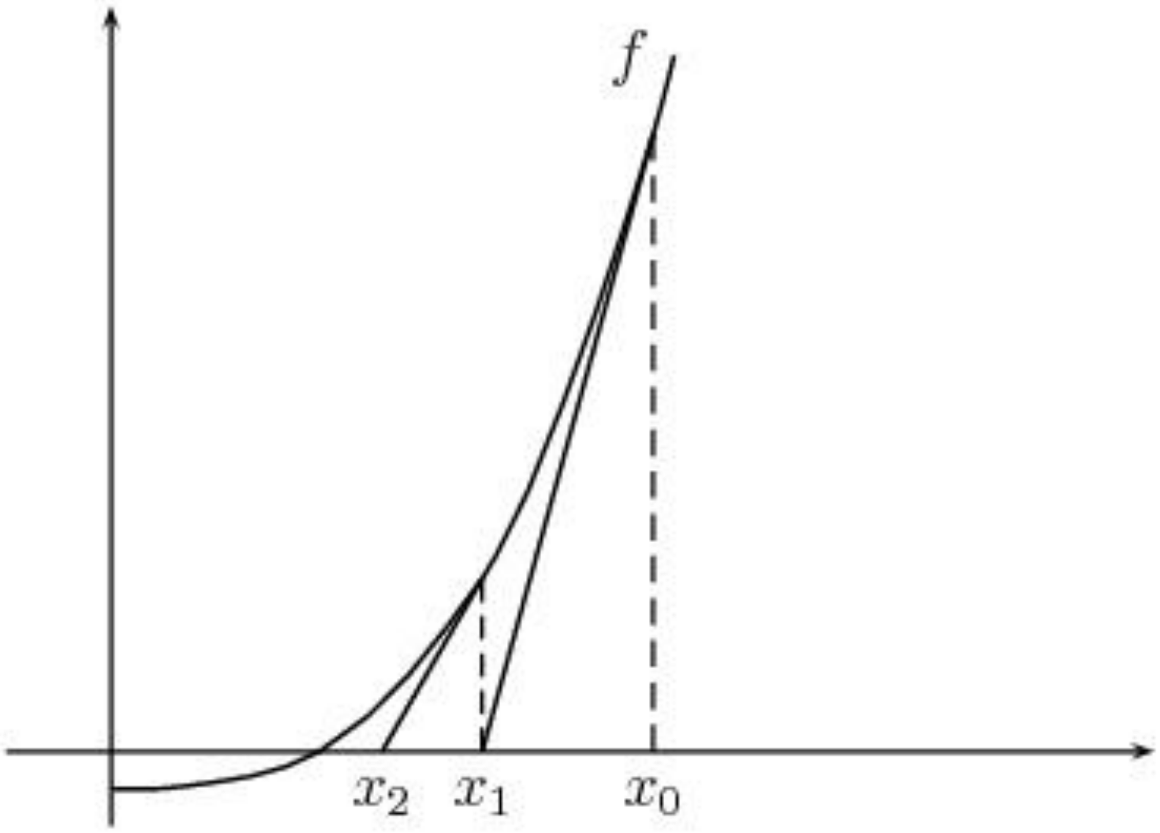
Die Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = a$ und damit eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^3 - a$$

Regula falsi (Methode des doppelten falschen Ansatzes)



Newtonverfahren

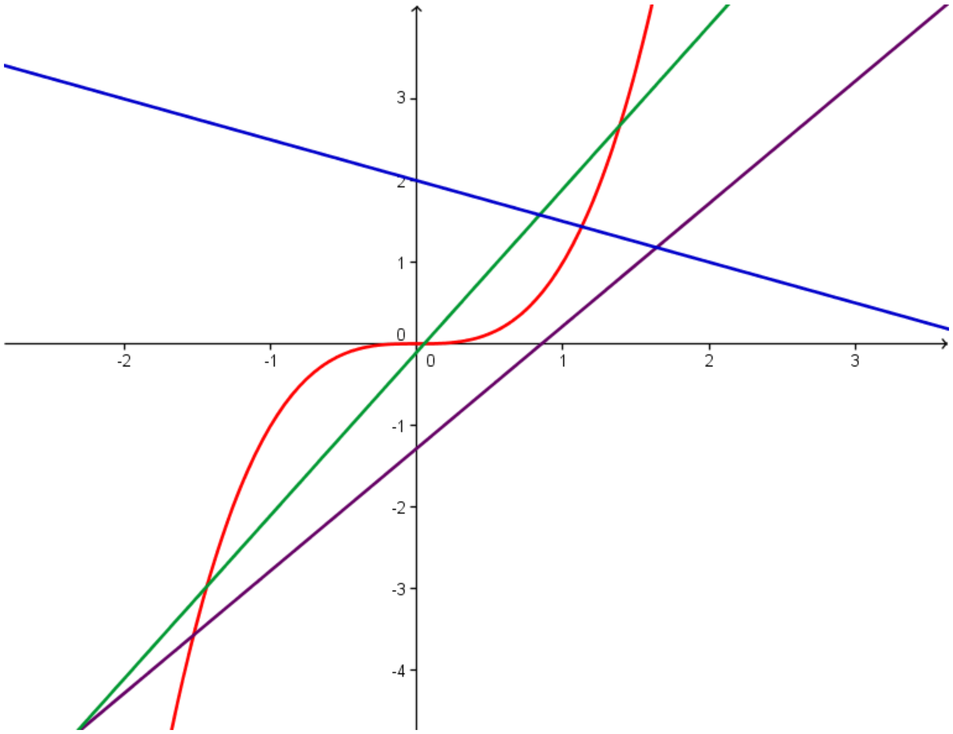


5. Akt: Bombellis „wilder Gedanke“

Vorüberlegung: Jede kubische Gleichung des „Fiorschen Typs“ kann in die Form

$$x^3 = mx + q$$

gebracht werden. Graphisch führt diese Gleichung auf ein Schnittproblem.



Es existiert immer ein Schnittpunkt!

Eine kubische Gleichung hat immer eine reelle Lösung!

Rafael Bombelli, „L‘Algebra“, 1572

$$x^3 = 15x + 4$$

Diese Gleichung hat die Lösung x = 4.

Die Cardanische Formel liefert jedoch:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Bombellis „wilder Gedanke“ ist die Einführung einer Zahl *i*, deren Quadrat gleich -1 ist.

Die Auflösungsformel führt dann auf

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

Bombelli vermutet, dass

$$\sqrt[3]{2+11i} = 2+ni \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{2-11i} = 2-ni$$

Mit $(2+ni)^3 = 2+11i$ und $i^2 = -1$ leitet Bombelli

$$\sqrt[3]{2+11i} = 2+i \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{2-11i} = 2-i$$ her.

Für die Lösung

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

aus der Cardanischen Formel ergibt sich in der Tat

$$x = (2+i)+(2-i) = 4$$

Wir erleben hier die Geburtsstunde der komplexen Zahlen!

Epilog

Nachdem Tartaglia die Formel für die Gleichung 3. Grades gefunden hatte, konnte er alle Aufgaben Fiors „innerhalb zweier Stunden“ lösen. Fior hingegen fand zu Tartaglias Aufgaben kein einziges korrektes Resultat. Damit ging Tartaglia als Sieger aus dem Duell heraus.

Tartaglia zögerte die Publikation seiner Formel zu lange heraus. 1539 gab er sie dem Mailänder Arzt und Mathematiker Girolamo Cardano in Form eines Sonetts bekannt, nachdem er ihm das Ehrenwort abgerungen hatte, sie nicht weiterzusagen. Trotzdem veröffentlichte Cardano die Formel, die seither den Namen „Cardanische Formel“ trägt, in seinem Buch „Ars Magna“ (1545) und nannte Scipione dal Ferro, den Lehrer Fiors, sowie Tartaglia als ihre Entdecker. Tatsächlich hatte dal Ferro bereits um 1510 herausgefunden, wie die Gleichung 3. Grades ohne quadratisches Glied gelöst werden kann. Tartaglia war somit nicht der Erste gewesen. Darauf berief sich Cardano.

Nun forderte Tartaglia seinerseits Cardano zum mathematischen Duell heraus. Dieses fand 1548 in Mailand statt. Cardano trat nicht selber an, sondern schickte seinen begabten Schüler Ludovico Ferrari. Gegen ihn zog Tartaglia den Kürzeren, da Ferrari in der Zwischenzeit nicht nur die Gleichung 3. Grades viel besser beherrschte, sondern auch herausgefunden hatte, wie die Gleichung 4. Grades gelöst werden kann.

Schülerzitat

Ich habe gehört, dass Sie mit unserer Nachfolgerklasse wieder die kubische Gleichung behandeln. Das dürfen Sie nicht!
Schliesslich haben wir die Cardanische Formel mit unserem eigenen Schweiss und Fleiss erarbeitet.
Jetzt gehört sie doch uns?

Literatur zu Tartaglia / Quellen

Dieter Jörgensen, Der Rechenmeister

Renato Acampora, Die „Cartelli di matematica disfida“

Girolamo Cardano, Ars Magna

Michel Serfati, Tartaglia versus Cardan

Literatur zu Lehrkunstdidaktik

Christoph Berg et al., Die Werkdimension im Bildungsprozess

Susanne Wildhirt, Lehrstückunterricht gestalten

Martin Wagenschein, Naturphänomene verstehen

Hans Brüngger, Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal

Interessante Website: www.lehrkunst.ch

philipp.spindler@edulu.ch