

Designerkurven - Bézierkurven im Unterricht

Baoswan Dzung Wong

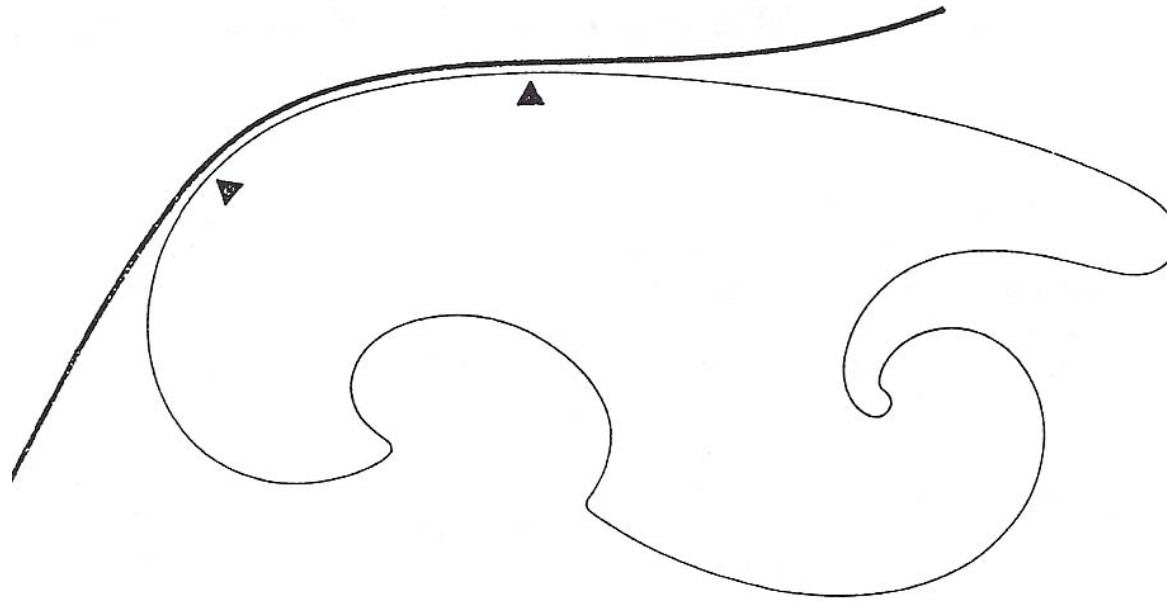
Tag über Mathematik und Unterricht

MNG Rämibühl, 12. September 2012

Übersicht

- Geschichtliches
- Arten von Bézierkurven
- Analytischer Zugang (nach Bézier)
- Geometrischer Zugang (nach de Casteljau)
- Eigenschaften von Bézierkurven
- Bézierflächen

Geschichtliches: das Kurvenlineal



Geschichtliches: Pierre Bézier



Geschichtliches: Paul Faget de Casteljau

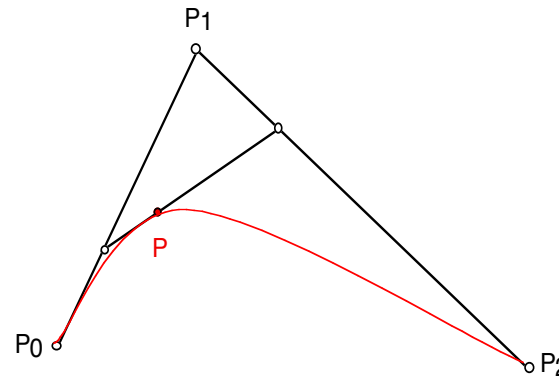


Arten von Bézierkurven: Mit gegebenen Endpunkten

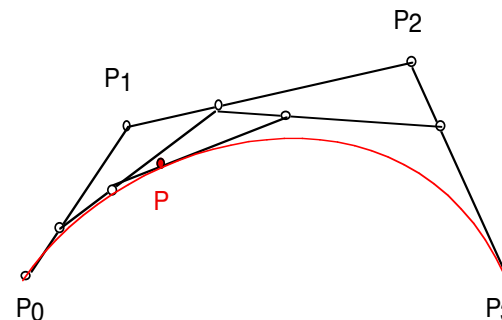
- 1. Ordnung



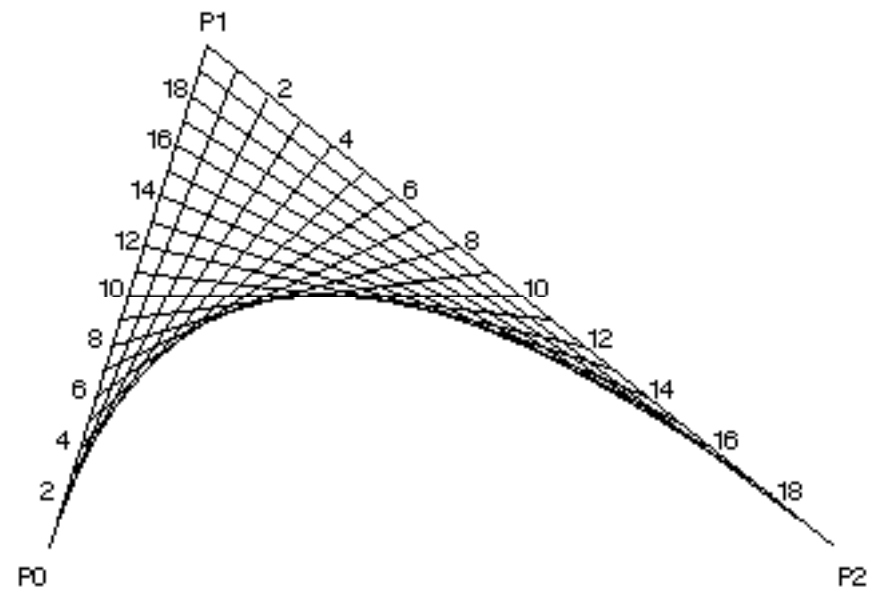
- 2. Ordnung



- 3. Ordnung

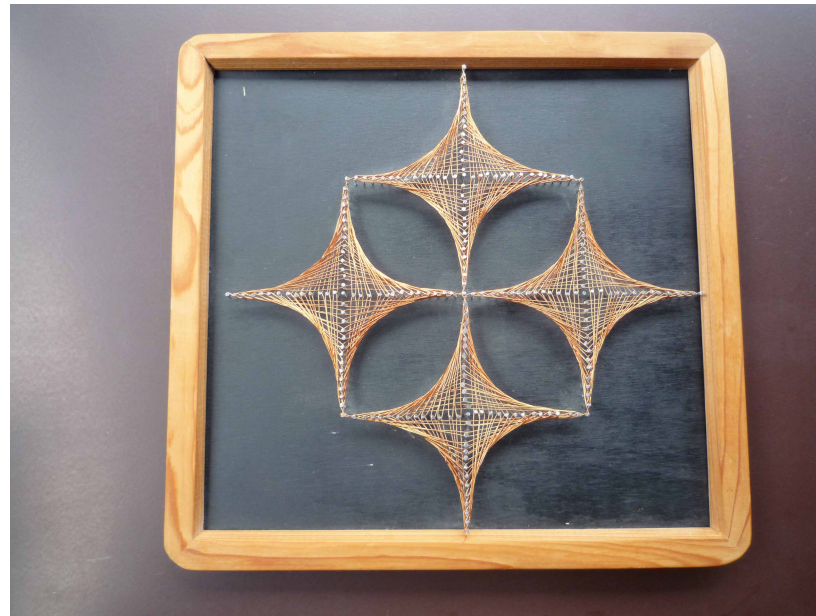
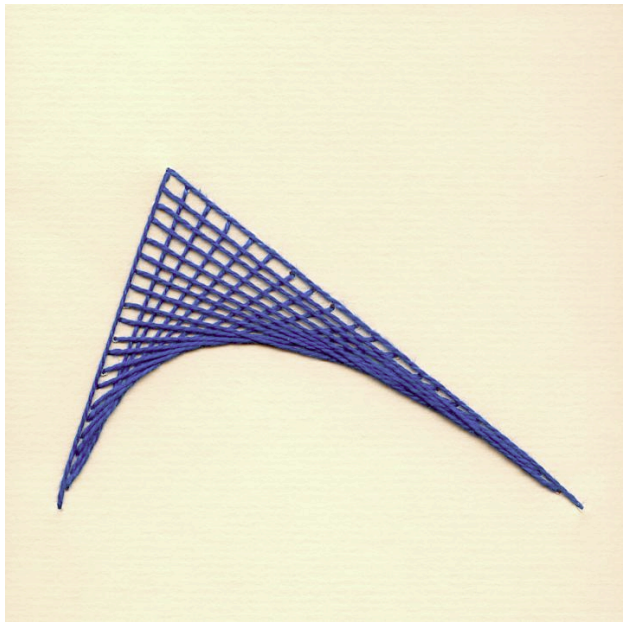


Arten von Bézierkurven: 2. Ordnung



Arten von Bézierkurven

2. Ordnung: Fadenspannbilder

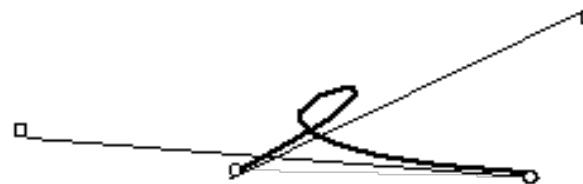


Bézierkurve 2. Ordnung in der Architektur



Fussgängerbrücke in Seoul, Korea

Arten von Bézierkurven 3. Ordnung

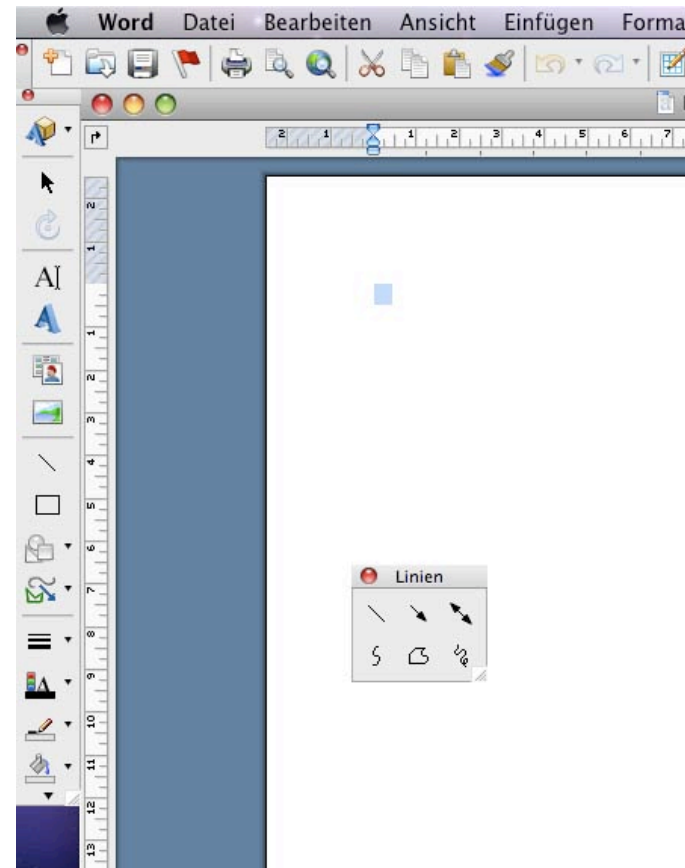


- bezeichnet Endpunkte der Kurve (P_0 und P_3)
- bezeichnet Endpunkte der Griffe (P_1 und P_2)

Bézierkurven in Zeichenprogrammen

Schritt 1:

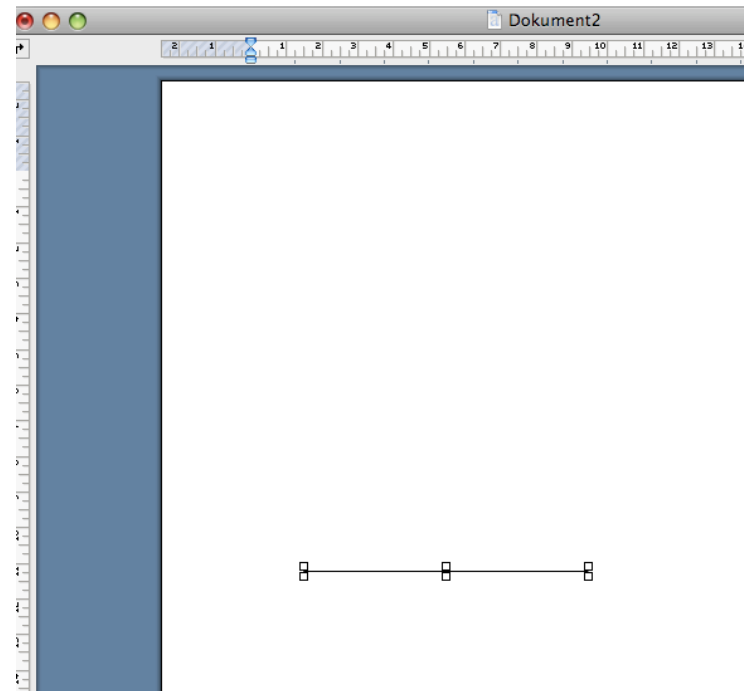
Werkzeugpalette/Linien/
S-förmige Linie anklicken



Bézierkurven in Zeichenprogrammen

Schritt 2:

Grundlinie P_0P_3 definieren:
Anfangspunkt 1x anklicken
Endpunkt 2x anklicken



Bézierkurven in Zeichenprogrammen

Schritt 3:

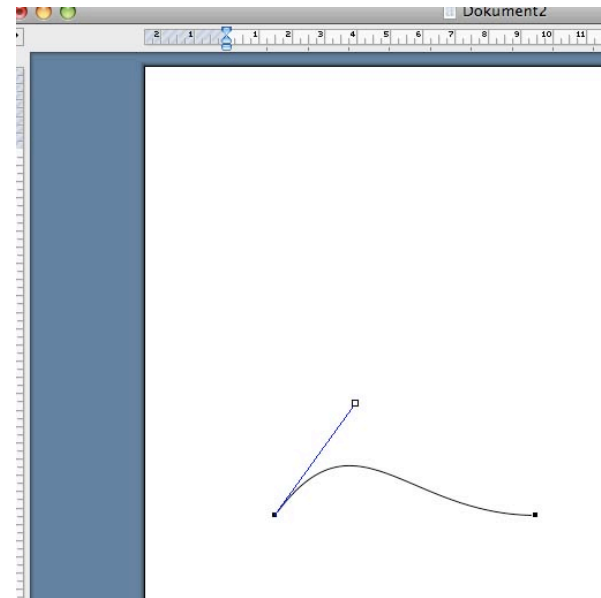
Grundlinie anklicken:

ctrl+Maustaste/Punkte bearbeiten/

Anfangspunkt P_0 anklicken:

ctrl+Maustaste/Eckpunkte/

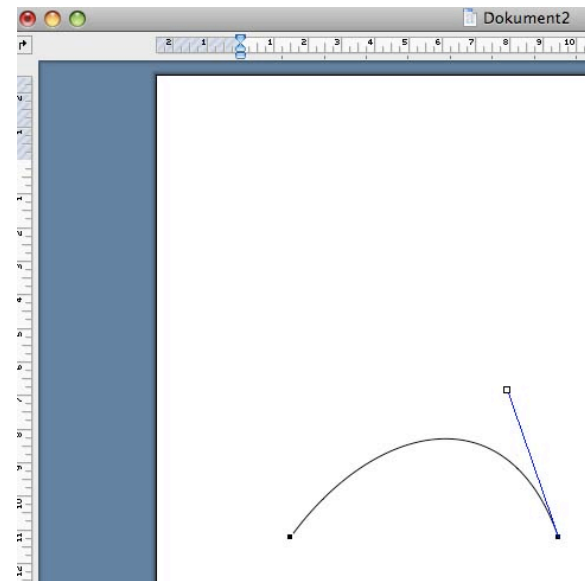
Blauen Griff zu P_1 ziehen



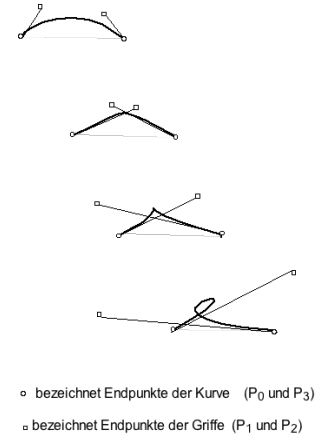
Bézierkurven in Zeichenprogrammen

Schritt 4:

Endpunkt P_3 anklicken:
ctrl+Maustaste/Eckpunkte/
blauen Griff zu P_2 ziehen



Eigenschaften von Bézierkurven 3. Ordnung



- Kurve beginnt in P_0 : $P(0) = P_0$
- Kurve endet in P_3 : $P(1) = P_3$
- Kurve startet in Richtung P_0P_1 : $P'(0) = 3 P_0 P_1$
- Kurve kommt aus Richtung P_2P_3 : $P'(1) = 3 P_2 P_3$

Analytischer Zugang (Bézier)

- Ansatz: $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
- Bedingungen: $P(0) = P_0$, $P(1) = P_3$
 $P'(0) = 3 P_0 P_1$, $P'(1) = 3 P_2 P_3$
- Gleichungssystem nach a_i auflösen
- a_i in Ansatz einsetzen und nach P_i ordnen
- Resultat:
$$P(t) = \sum_{k=0}^3 B_k(t) \cdot P_k$$

Analytischer Zugang (Bézier)

Kurvengleichung $P(t) = \sum_{k=0}^3 B_k(t) \cdot P_k$

wobei

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3 (1-t)^2 t$$

$$B_2(t) = 3 (1-t) t^2$$

$$B_3(t) = t^3$$

die bekannten Bernsteinpolynome sind.

Analytischer Zugang (Bézier)

Die Gleichung der Bézierkurve lautet also

$$P(t) = \sum_{k=0}^3 B_k(t) \cdot P_k$$

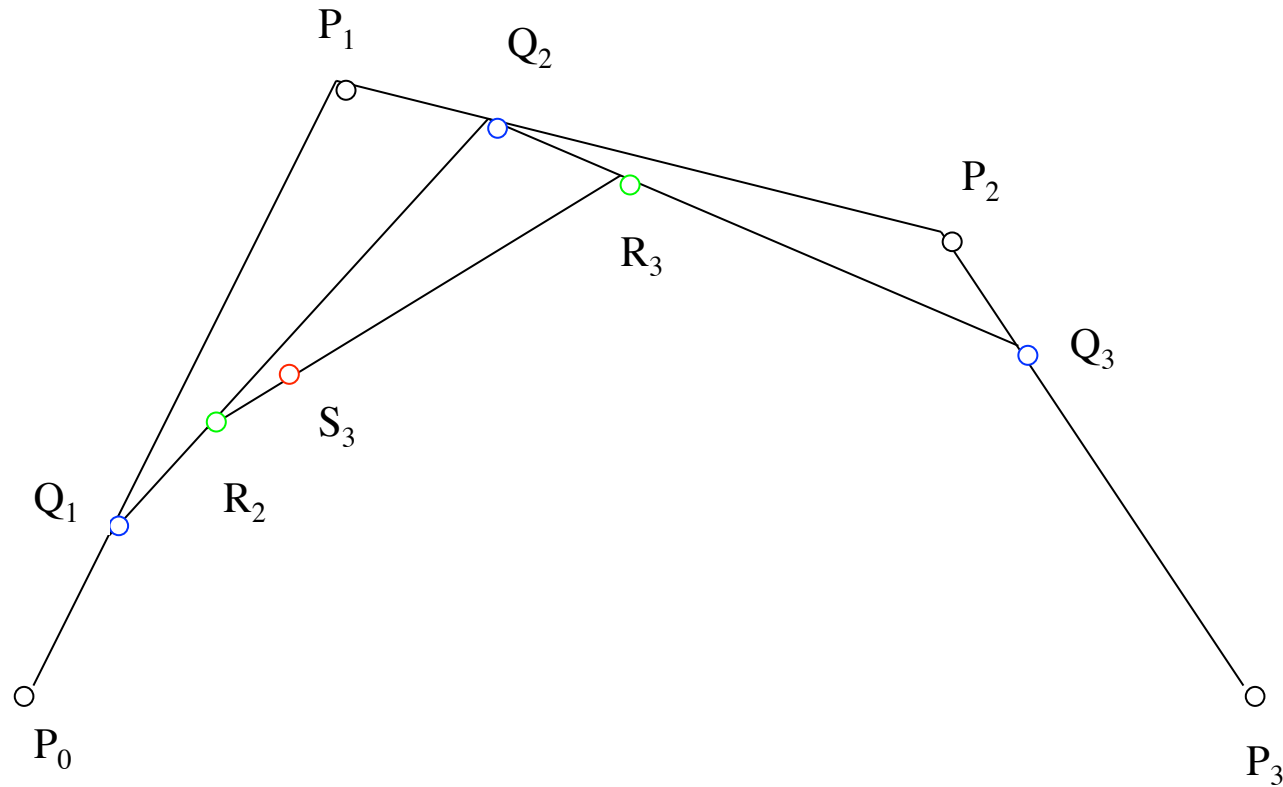
wobei

$$B_k(t) = \binom{3}{k} \cdot t^k (1-t)^{3-k}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Geometrischer Zugang (de Casteljau)



Konstruktion eines Kurvenpunktes

Geometrischer Zugang: Herleitung der Formel

Die Q_i , R_i und S_i sind konvexe Kombinationen der P_i , Q_i und R_i :

$$Q_i = (1-t) P_{i-1} + t P_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$R_i = (1-t) Q_{i-1} + t Q_i, \quad i = 2, 3$$

$$S_i = (1-t) R_{i-1} + t R_i, \quad i = 3 \quad \text{wobei } 0 < t < 1.$$

$S_3 = P(t)$ durch die ursprünglich gegebenen Kontrollpunkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ ausgedrückt ergibt

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3(1-t)^2 t \cdot P_1 + 3(1-t) t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

Geometrischer Zugang: Bedeutung der Formel

Ein Punkt der Bézierkurve ist das gewichtete Mittel der Kontrollpunkte

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3(1-t)^2 t \cdot P_1 + 3(1-t) t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$$

$$P(t) = B_0(t) \cdot P_0 + B_1(t) \cdot P_1 + B_2(t) \cdot P_2 + B_3(t) \cdot P_3$$

wobei $0 < t < 1$ und

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3(1-t)^2 t$$

$$B_2(t) = 3(1-t) t^2$$

$$B_3(t) = t^3$$

Eigenschaften von Bézierkurven

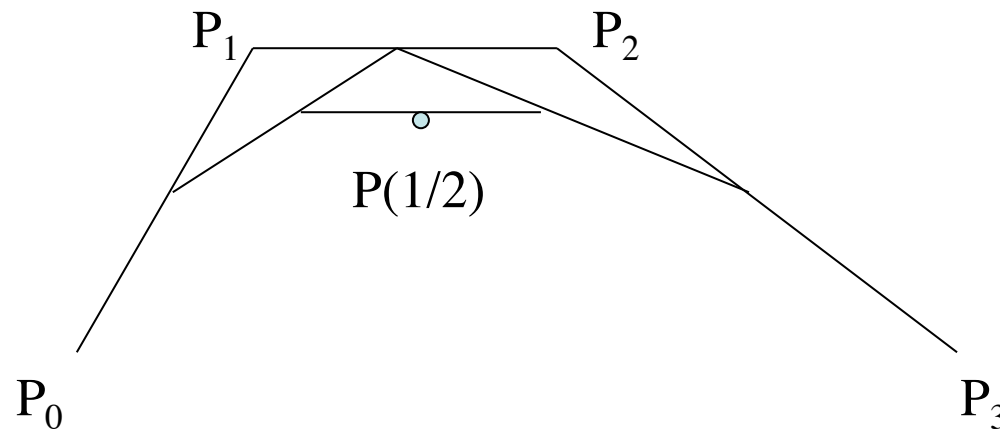
- Konvexe Hülle
- Symmetrie
- Variationsverminderung
- „Selbstähnlichkeit“
- Schnelle Berechnung
- Lokale Kontrolle bei Zusammensetzung

Weitere Eigenschaft von Bézierkurven:

Trapezhöhe = $\frac{4}{3}$ Kurvenhöhe

Bei trapezförmigem Kontrollpolygon:

- a) Kurvenhochpunkt bei $t = 1/2$
- b) Kurvenhochpunkt auf $3/4$ der Trapezhöhe



Schülerarbeiten: Bézierkurven

Schülerarbeiten: Piktogramme



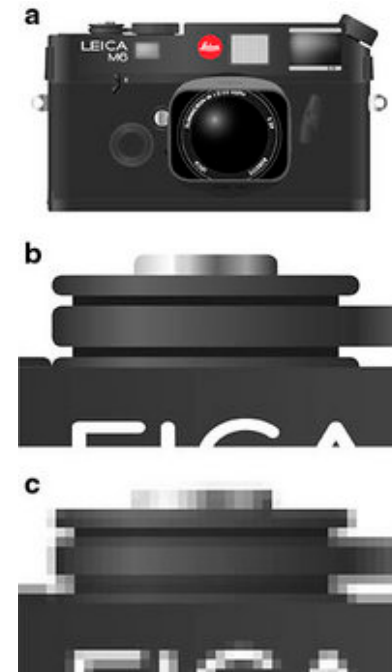
Bézierkurven in der Typographie



Vektorgraphik vs. Pixelgraphik

Vektorgraphik eignet sich für:

- Vergrößerung ohne Qualitätsverlust (vgl. nebenstehendes Bild)
- sparsamen Speicherplatz



Pixelgraphik eignet sich für:

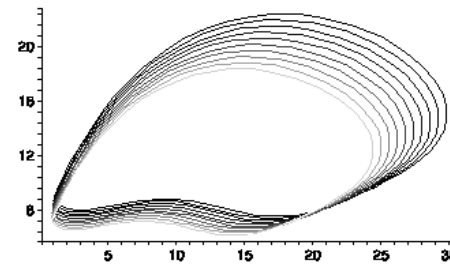
- Wiedergabe von Fotografien

Vektorgraphik

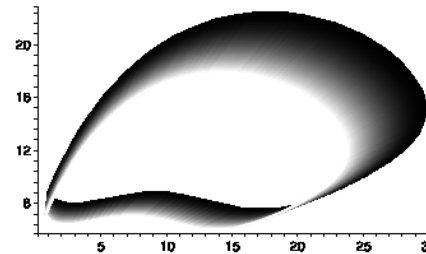
Wolke aus Bézierkurven

10 Linien, Liniendicke=1

- 10 Bézierkurven
(12. Ordnung)



- 200 Bézierkurven
(12. Ordnung)



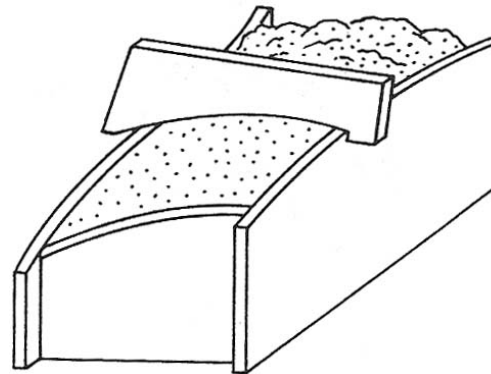


Vektorbild: Wäsche im Schnee

Bézierflächen

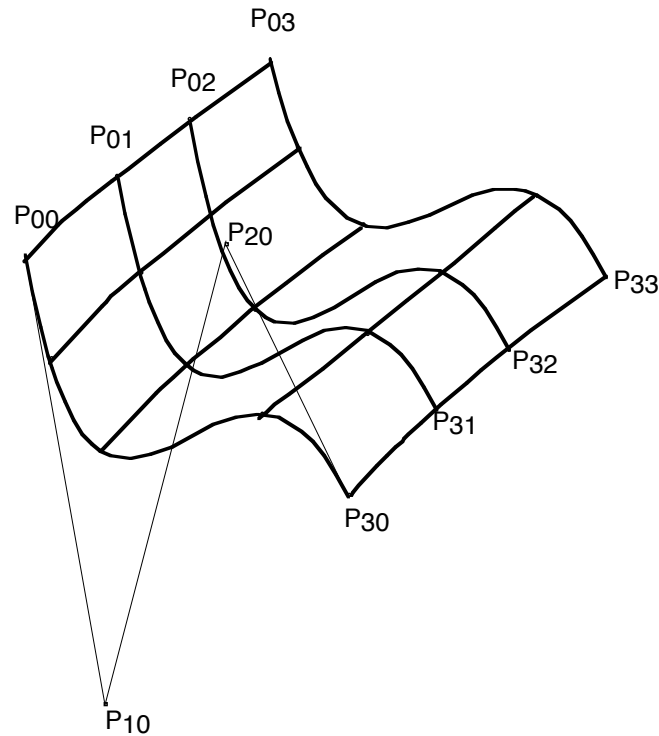
Methode beim Modellieren mit Ton:

Überflüssiges
Material abstreichen



Bézierflächen: Rechteckige Flächenstücke

Erzeugung durch Aneinanderreihen von Bézierkurven

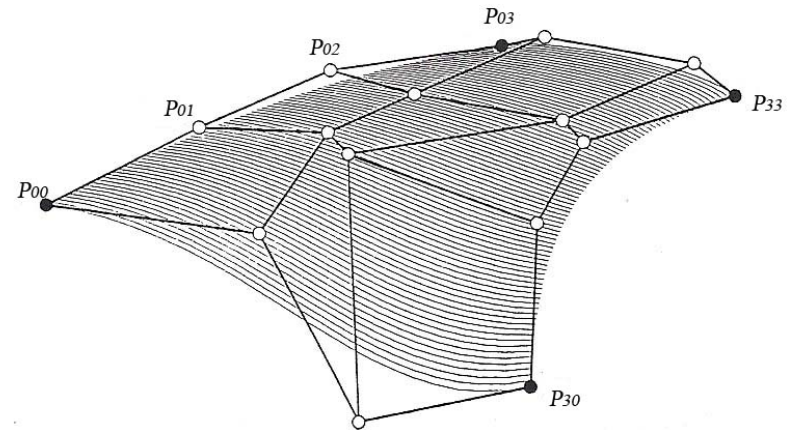


Bézierflächen: Rechteckige Flächenstücke

Kontrollnetz aus 4+4+4+4=16 Kontrollpunkten

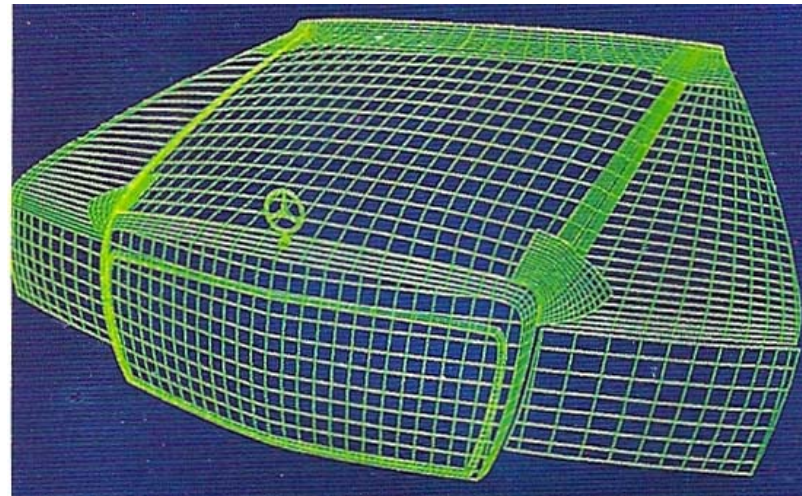
$$P(s,t) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \sum_{k=0}^3 B_k(t) P_{kj}$$

$$P(s,t) = \sum_{j,k} B_j(s) B_k(t) P_{kj}$$



Bézierflächen: Anwendungen rechteckiger Flächenstücke

Äussere Karosserieteile,
wie Dach, Türe,
Motorhaube, usw.



Bézierflächen:

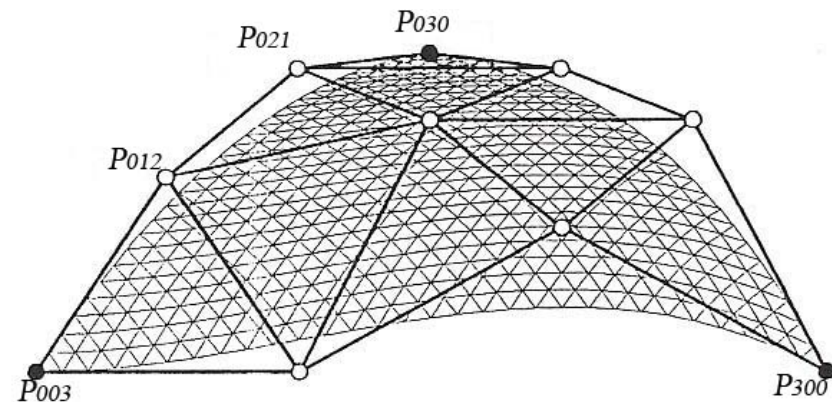
Dreieckige Flächenstücke

- Kontrollnetz aus $4+3+2+1=10$ Kontrollpunkten
- Baryzentrische Koordinaten $\beta_0, \beta_1, \beta_2$

$$P(s,t) = \sum_{i+j+k=3} B_{ijk}(s,t) P_{ijk}$$

$$B_{ijk}(s,t) := \binom{3}{ijk} \beta_0^i(s,t) \cdot \beta_1^j(s,t) \cdot \beta_2^k(s,t)$$

$$\binom{3}{ijk} := \frac{3!}{i! \cdot j! \cdot k!}$$



Bézierflächen: Anwendungen dreieckiger Flächenstücke

Für kompliziertere Formen:

innere Teile der Automobilkarosse, Lancôme-Werbung, usw.

