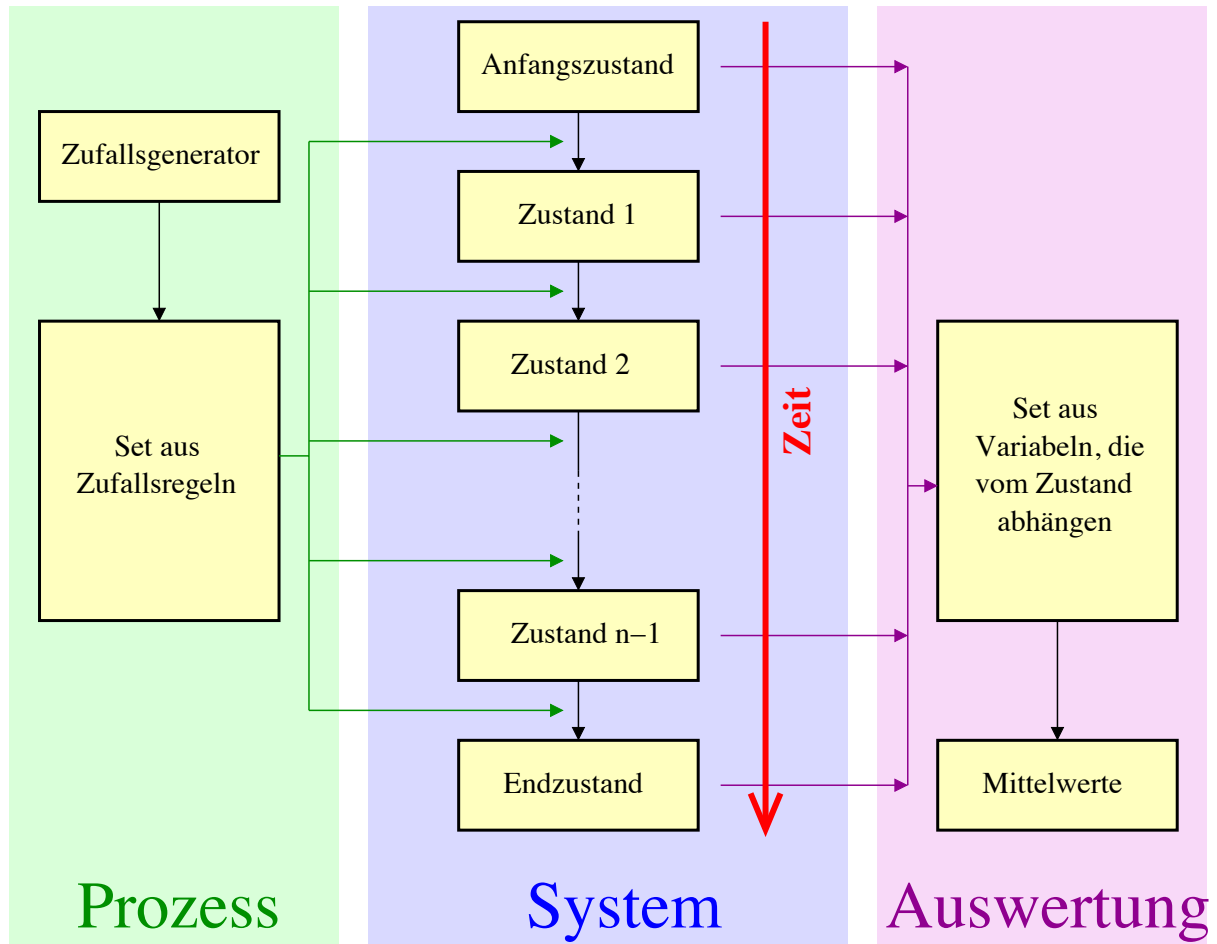


Monte-Carlo Simulationen in der Physik

S. Pilgram, Kantonsschule Frauenfeld & ETH Zürich

Schema Monte-Carlo



Code Random Walk

```
function network (n_steps)
    load Probabilities.mat NeiMat ProbMat;    # Matrizen laden
    DensVec = zeros(1,rows(NeiMat));          # Resultat initialisieren
    n_nei = columns(NeiMat);                  # Anzahl Plaetze bestimmen
    Pos = 1;                                  # Position des Random Walkers

    for k = 1:n_steps
        p = rand;                             # Zufallszahl zw. 0 und 1 erzeugen
        for i = 1:n_nei
            if(p<ProbMat(Pos,i))
                Pos = NeiMat(Pos,i);           # Falls Zufallszahl im richtigen
                break                           # Bereich, zu neuem Platz springen
            endif
            p = p - ProbMat(Pos,i);
        endfor
        DensVec(Pos) = DensVec(Pos)+1;         # Dichte am Aufenthaltsort erhöhen
    endfor

    ProfVec = (DensVec / n_steps)';           # Dichte auf eins normieren
    save Profile.dat ProfVec                  # Dichte speichern
endfunction
```

Liste mit Vorschlägen von Projekten, die mit Monte Carlo Simulationen untersucht werden können

1 Kristallwachstum

Man simuliere einen Kristallkeim, an den sich weitere Teilchen nach gewissen Regeln anlagern.

- Was für Regeln ergeben eine vierzählige/sechszählige Symmetrie?
- Welche Regeln ergeben ein reguläres Kristallwachstum, welche ein nadelförmiges Wachstum?
- Wie entstehen Fehler in der Kristallstruktur?

2 Sanddünen

Wind, dessen Geschwindigkeit von der Bodenhöhe abhängt, bläst über eine Menge aus Sandkörnern. Man simuliere, wie sich die Körner anlagern, wieder lösen und wie sie vom Wind verfrachtet werden.

- Welche Regeln führen dazu, dass sich Dünen ausbilden, welche Regeln favorisieren eine glatte Sandfläche?
- Was bestimmt die Wandergeschwindigkeit der Dünen?
- Lassen sich Dünen mit baulichen Massnahmen vom Wandern abhalten?

3 Soziologie

„Die Reichen werden immer reicher, die Armen immer ärmer“. Man simuliere eine Population aus Besitzern, die verdienen, heiraten, Nachkommen zeugen, ...

- Welchen Einfluss hat es, wenn man annimmt, dass grössere Vermögen höhere Zinssätze ergeben?
- Wie wirkt es sich auf die Verteilung aus, dass Reiche eher Reiche heiraten?
- Welchen Einfluss haben progressive Steuern?

4 Versicherungsrisiken

Man simuliere eine Menge aus Ereignissen, die mit einer gewissen Häufigkeit eintreffen und einen gewissen Schaden anrichten.

- Wie sieht ein Histogramm der totalen jährlichen Schadenssumme aus, wenn man unabhängige/untereinander korrelierte Schadensereignisse annimmt?
- Was ist die Überlebensdauer einer Versicherungsgesellschaft als Funktion ihrer Reserven?

5 Räuber/Beute

Man simuliere ein Ökosystem, in dem verschiedene Arten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten zur Welt kommen, sterben, einander auffressen.

- Für welche Parameter entwickelt das Ökosystem mit der Zeit eine stabile Population, bei welchen Parametern treten grosse Schwankungen auf?
- Wie wirkt sich das Einschleppen einer neuen Art auf das System aus?
- Wie hängen die Anteile der einzelnen Arten an der Biomasse vom Nahrungsangebot ab?

6 Epidemien

Man simuliere die Ausbreitung einer Grippewelle. Leute stecken sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an, tragen den Erreger für eine gewisse Zeit, begegnen anderen Menschen mit gewissen Wahrscheinlichkeiten.

- Wie sieht der zeitliche Verlauf einer Epidemie aus?
- Wie ändert sich der Verlauf, wenn Schulen für gewisse Fristen geschlossen werden?
- Wie ist das Gesundheitssystem belastet, wenn nur eine gewisse Anzahl Betten zur Verfügung steht und das Personal erkrankt?

7 Ising Modell

Das Ising Modell ist ein einfaches Modell, um Phasenübergänge zu beschreiben. Ein Gitter besteht aus Plätzen, die jeweils Zustand A und B einnehmen können. Benachbarte Plätze mit gleichem Zustand sind energetisch günstiger als mit verschiedenem Zustand. Energetisch am günstigsten ist es, wenn alle Plätze den gleichen Zustand haben. Dies ist der geordnete Grundzustand, der bei Temperatur null auftritt.

- Ab welcher Temperatur verliert das System seine Ordnung? (in Abhängigkeit des Gittertyps)
- Was ist der Grundzustand, wenn Nachbarn mit unterschiedlichem Zustand günstiger sind?
- Wie ändert sich das Verhalten, wenn die Plätze mehr als zwei Zustände einnehmen können?

8 Verkehrssimulation

Eine Kreuzung besteht aus verschiedenen Zufahrten und Ausfahrten sowie einer Ampelanlage. Verkehrsmittel gelangen mit gewissen Wahrscheinlichkeiten und Regelmässigkeiten an die Kreuzung. Wie muss die Ampelanlage gesteuert werden, um einen guten Verkehrsfluss zu erhalten?

- Soll dem ÖV Vorrang eingeräumt werden?
- Wie sieht die Situation zu verschiedenen Tageszeiten aus? Vergleich mit einer vorhandenen Kreuzung.
- Wie lange sollen die einzelnen Grünphasen sein?

9 Staubildung

Ab einer bestimmten Verkehrsdichte nimmt die Wahrscheinlichkeit für Staubildung zu. Man simuliere eine Autobahn mit zwei Spuren, Autos die in gewissen zufälligen Abständen eintreten und zufällig einem gewissen Fahrerprofil (vorsichtig, draufgängerisch) entsprechen.

- Ab welcher Verkehrsdichte treten Staus auf?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass innert einer gewissen Frist ein Stau auftritt?
- Welchen Einfluss haben die Fahrerprofile, die Maximalgeschwindigkeit auf die Staubildung?

10 Waldbrände

Man simuliere ein Waldgebiet, in dem Bäume wachsen und sterben. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit führen Blitzeinschläge zu Bränden, die sich ausbreiten, wenn die Bäume dicht stehen.

- Wie sieht die Altersverteilung der Bäume in einem solchen Waldgebiet aus?
- Wie sieht die Verteilung der Grösse der Waldbrände aus?
- Welche baulichen Massnahmen reichen aus, um die maximale Grösse der Brände zu beschränken?

11 Schwärme

Man simuliere einen Schwarm aus Vögeln oder Fischen. Jeder Fisch bewegt sich zufällig in verschiedene Richtungen. Dabei orientiert er sich nach gewissen Regeln an der Bewegungsrichtung seiner Nachbarn.

- Welches minimale Set an Regeln erlaubt es, typische Flugmuster von bestimmten Vogelschwärmen zu erzeugen?
- Wie bewegt sich ein Fischschwarm über einen gewellten Meeresboden?
- Wie hängen Grösse und Form eines Vogelschwarms zusammen?

12 Korrekturen bei Datenübertragungen

Binäre Datenübertragungen werden gegen Fehler abgesichert, indem Kontrollbits, Prüfsummen und andere redundante Informationen mitübermittelt werden. Man simuliere solche Datenübertragungen und erzeuge mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit falsche Bits.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die übermittelten Daten nicht rekonstruiert werden können, in Abhängigkeit der Fehlerrate für verschiedene Schutzmechanismen?
- Wie sensibel reagieren die Schutzmechanismen auf mehrere aufeinanderfolgende falsche Bits?
- Gibt es eine kritische Fehlerrate, ab der Datenübermittlungen unmöglich werden?

Random Walk

13 Wärmeleitung

Man simuliere mit einem Random Walk das Temperaturprofil in verschieden geformten Materialien.

- Profile können aus Metall nachgebaut und mit Thermometern vermessen werden.
- Wie verändert sich der Temperaturverlauf, wenn Verluste an die Umgebung berücksichtigt werden?
- Wie unterscheiden sich die thermischen Widerstände von Backsteinen ohne und mit Löchern?

14 Elektrische Leitung

Man berechne mit einem Random Walk den elektrischen Widerstand von verschiedenen geformten Gegenständen.

- Wie gross ist der Widerstand einer Kugel aus Kohle mit einem Durchmesser von 1cm? Nachmessen im Experiment
- Man berechne den Widerstand einer Lötstelle. Wie heiss würde diese, wenn ein bestimmter Strom durchfliesst (Kombination mit Wärmeleitung)?

15 Diffusion

Man simuliere mit einem Random Walk, wie sich verschiedene Teilchensorten in einem diffusiven Medium ausbreiten.

- Wie lange dauert es, bis die Konzentration überall unter ein bestimmtes Niveau fällt?
- Wie wirken sich Hindernisse auf die Diffusion aus?
- Lässt sich das Wandern eines Farbflecks einer Chromatographie nachsimulieren?

16 Reaktions-Diffusions-Problem

Die Konzentration einer Bakterienkultur wächst lokal exponentiell. Zusätzlich können Bakterien in die Nachbarschaft diffundieren.

- Welchen Einfluss hat die Diffusion auf die Zunahme der Gesamtbakterienzahl?
- Wie ändert sich das Verhalten, wenn das lokale Wachstum durch einen logistischen Term beschränkt wird?
- Welche Muster entstehen, wenn die Nährstoffe statt den Bakterien diffundieren?

17 Brüsselator

Kombiniert man oszillierende Reaktionen mit Diffusion, so entstehen räumliche Muster im Reaktionsgefäss. Diese Muster werden durch ein Set aus partiellen Differentialgleichungen beschrieben, die sich durch eine Monte Carlo Simulation abbilden lassen.

Die Variablen X und Y bezeichnen die Menge zweier verschiedener Stoffe in jeder Zelle eines zellulären Automaten. Mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten finden folgende Reaktionen statt:

$X \rightarrow X+1$ $X,Y \rightarrow X-1,Y+1$ $X,Y \rightarrow X+1,Y-1$ $X \rightarrow X-1$.

Zusätzlich können X und Y mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten in Nachbarzellen diffundieren.

Optimierungsprobleme

18 Minimale Flächen

Eine Seifenblase soll in einem Rahmen aus Draht aufgespannt werden, der eine unregelmässige Form hat. Man ersetze die Seifenblase durch ein Netz aus bestimmten Knoten und verschiebe in einer Simulation die Knoten so, dass die Netzfläche minimal wird.

- Welche Oberfläche ist ideal für einen Kühlturm?
- Wie muss ein Kabel auf einer Kühlturmoberfläche von A nach B verlegt werden, wenn es minimale Länge haben soll?

- Wie hängt eine Seifenblase durch, die in einem kreisförmigen Rahmen aufgespannt ist?

19 Stundenplan

Eine Auftragsliste beansprucht verschiedene Personen für verschiedene Zeiten in bestimmten Reihenfolgen. Wie muss die Arbeit aufgeteilt werden, damit die Aufträge in möglichst kurzer Zeit erledigt sind?

20 Partnervermittlung

Aufgrund eines Fragebogens geben verschiedene Kandidaten Präferenzen an. Nun sollen Paare gebildet werden nach verschiedenen Optimierungskriterien.

- Alle Kandidaten sollen gepaart werden, welche Lösung ist die beste?
- Nur fünfzig Prozent der Personen sollen gepaart werden, welche Lösung ist die beste?

21 Verlauf von Lichtstrahlen

Nach dem Fermat'schen Prinzip nehmen Lichtstrahlen den Weg von A nach B, für den die Zeit am kürzesten ist (eigentlich extremal ist). Man berechne einen solchen Weg eines Lichtstrahls, indem man diesen als Streckenzug aus mehreren Punkten auffasst. Die Punkte sollen so verschoben werden, dass das Fermat'sche Prinzip erfüllt ist.

- Welchen Weg nimmt das Licht, wenn es an mehreren Flächen gebrochen wird?
- Wie werden die von der Sonne kommenden Lichtstrahlen von der Atmosphäre in unser Auge gebrochen?
- Wie kann man auch Reflexion simulieren, bei der die Zeit nicht mehr minimiert werden muss, sondern ein Sattelpunkt gefunden werden muss?

22 Travelling Salesman

Ein Handelsreisender soll bestimmte Städte in freier Reihenfolge aufsuchen und dabei eine möglichst kurze Zeit brauchen. Dieses Standardproblem soll mit Zusatzbedingungen ergänzt werden.

- Gewisse Strecken können nur mit Umsteigen zurückgelegt werden.
- In den Städten gelten unterschiedliche Feiertage.
- Gewisse Städte sollen mehrmals aufgesucht werden.

23 Kettenlinie

Ein zwischen zwei Enden eingespanntes Seil hängt frei durch. Welche mathematische Funktion ergibt sich? Dieses Standardproblem wird durch die Minimierung der potentiellen Energie des Seils gelöst, allerdings muss die Nebenbedingung einer konstanten Seillänge erfüllt werden. Die Nebenbedingung kann aber umformuliert werden. Wenn die Seillänge nicht exakt stimmt, so entsteht zusätzliche Spannungsenergie, die in die Minimierung miteinbezogen wird. Das Problem lässt sich leicht verallgemeinern.

- Am Seil sollen zusätzliche Gewichte angebracht werden. Eine solche Situation kann im Experiment nachgebaut werden.
- Mehrere Seile werden miteinander verbunden.
- Das Seil ist steif, es kann nicht beliebig gekrümmt werden.

24 Wigner-Kristall

Elektronen sind negativ geladen und stossen sich darum gegenseitig ab. In Ruhe bilden sie darum ein regelmässiges Gitter, so dass die Abstände der einzelnen Elektronen untereinander möglichst gross werden.

- N Elektronen werden in eine quadratische Fläche gepackt. Wie werden sie sich anordnen?
- N Elektronen werden in einen Quader gepackt. Welche Struktur ist nun optimal?
- Wie muss man N Elektronen auf einer Kugeloberfläche verteilen, damit sie möglichst weit voneinander entfernt sind?