

Sek2Uni/Pool 1

Aus Medienvielfalt-Wiki

< Sek2Uni

Lernpfad zur Schnittstelle Sekundarstufe 2 - Universität bzw. Hochschule

Aufgabenpool 1

Startseite des Lernpfads | Aufgabenpool 2 | Didaktischer Kommentar

Inhaltsverzeichnis

- 1 Differentialgleichung versus Differenzgleichung
- 2 Integrationsverfahren vergleichen
 - 2.1 Aufgaben im pdf-Format
 - 2.2 Lösungen im pdf-Format
- 3 Logistische Abbildung/Gleichung - Ein-Lebewesen-Modell nach Verhulst
 - 3.1 Räuber-Beute-Modell
- 4 Ein bisschen Relativitätstheorie
- 5 Epidemie
- 6 Elastizität
- 7 Rekursionsverfahren

Differentialgleichung versus Differenzgleichung

[Einzelaufgaben] (Walter Wegscheider und Matthias Kittel)

siehe Lernpfad Diskret - kontinuierlich

Integrationsverfahren vergleichen

[Aufgabe für 3er-Gruppe] (Matthias Kittel)

Die Berechnung von Integralen ist eine oft notwendige Operation, die in vielen Bereichen des wissenschaftlichen Lebens Anwendung findet. Gar nicht so selten kommt es vor, dass ein Integral gar nicht analytisch lösbar ist. Das bedeutet, es gibt kein Verfahren wie die *partielle Integration*, die *Substitutionsmethode* oder die *Partialbruchzerlegung* (diese Lösungswege lernst Du in der Schule, es gibt aber noch viel mehr), um das Integral lösen zu können. Aus diesem Grund ist es notwendig alternative Integrationsmethoden zu finden. Hier werden zwei Möglichkeiten vorgestellt:

- **Die gegebene Funktion wird vereinfacht:** Sie wird durch ein beliebig genaues Taylorpolynom angenähert. Bei diesem Verfahren sind nur Kenntnisse über das Ableiten notwendig. Jede (*normale*) Funktion ist ja bekanntlich differenzierbar, auch wenn es umständlich ist und lange dauert. Es wird die Formel

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = P(x) =$$

$$\frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

verwendet. Danach wird dieses Polynom $P(x)$ an Stelle der gegebenen Funktion $f(x)$ integriert.

- **Das Integral wird durch numerische Methoden angenähert:** Man führt also keine analytische Integration durch, sondern nähert den Wert des Integrals durch Summen an. Hier gibt es einige Methoden, die je nach Aufwand zu genaueren oder weniger genaueren Ergebnissen führen. Die bekanntesten Verfahren sind:

Rechtecksformel: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$ mit einer Schrittweite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, wobei a und b

die untere und obere Grenze des Integrals darstellt. n gibt die Anzahl der Rechtecke an, in die die Fläche unterhalb der Funktion zerlegt wird. Möchte man das Intervall $[2; 3]$ in 4 Rechtecke unterteilen, erhält man

$$\Delta x = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4} \text{ und die Stützstellen } x_0 = 2, x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{7}{4}.$$

Trapezformel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \cdot (f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \dots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)) \text{ mit}$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, wobei a und b die untere und obere Grenze des Integrals darstellt. Je größer hier n ist, desto genauer wird das Ergebnis. Die einzelnen x_i werden wie oben berechnet. Das gewählte n wird dann einfach in die Formel eingesetzt.

Simpson'sche Formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) \dots + 4 \cdot f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

mit $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$, wobei a und b die untere und obere Grenze des Integrals darstellt. Für n und die x_i gilt Obiges.

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \ln x$. Es gilt $\int_1^2 f(x)dx = 0,636294261$ FE.

Bearbeitet folgende Arbeitspunkte. Jeder Schüler sucht sich zwei Punkte aus:

- Überprüfe das Ergebnis obiger Integration durch analytisches Nachrechnen.
- Nähere das Integral mit der Rechtecksformel an ($n = 3, 4$ und 5)! Welche Auswirkung hat die Erhöhung der Rechteckanzahl auf die Genauigkeit des Ergebnisses?
- Nähere das Integral mit der Trapezformel an ($n = 3$)!
- Nähere das Integral mit der Simpson'schen Formel an ($n = 3$) an!
- Entwickle für die Funktion ein Taylorpolynom dritten Grades an der Stelle $x_0 = 1$!
- Zeichne das Taylorpolynom und die gegebene Funktion in ein Koordinatensystem ein. In welchem Intervall nähert das Polynom die Funktion genügend genau an? Was bedeutet genügend genau?

Aufgaben im pdf-Format

Die Angaben zu den Aufgaben findet man unter Integrationsmethoden_mv.pdf (http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/7/7a/Integrationsmethoden_mv.pdf) (41 kb).

Lösungen im pdf-Format

Die Lösungen zu diesen Aufgaben findet man unter Lösungen zu Integrationsmethoden_mv.pdf (http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/1/1f/Integrationsmethoden_loes_mv.pdf) (117 kb).

Logistische Abbildung/Gleichung - Ein-Lebewesen-Modell nach Verhulst

[Aufgabe für 2er-Gruppe] (Matthias Kittel)

Das Verhalten einer Population von Lebewesen lässt sich mit Hilfe der **logistischen Gleichung** leicht visualisieren. Diese Gleichung lässt sich entweder analytisch oder mittels Differenzgleichung lösen. Die **logistischen Gleichung** beschreibt ein Wachstum mit einer Grenzpopulation, das bedeutet, dass sich die Population nicht auf alle Zeiten exponentiell vermehrt, sondern sich einer Maximalpopulation annähert. Neben der Geburtenrate g fließt die natürliche Sterberate s (Alter, Krankheit und Ähnliches) und die Sterberate auf Grund von Überbevölkerung su (fehlender Lebensraum, Nahrungsmittelknappheit, etc.) in die Gleichung mit ein. Die Änderung der Populationszahl $\dot{N}(t)$ mit der Zeit lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$\dot{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt} = (1 + g - s) \cdot N(t) - su \cdot N(t)^2$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + K \cdot N_0 \cdot e^{-vt}}, \text{ wobei } N_0 \text{ die Anfangspopulation ist und } K = \frac{g - s}{su} \text{ sowie } v = g - s \text{ gilt.}$$

Die entsprechende Differenzgleichung lautet:

$$N_{t+1} = (1 + g - s) \cdot N_t - su \cdot N_t^2.$$

Die analytische Lösung, sowie die Lösung der Differenzgleichung sind in dem

Excel-Arbeitsblatt zum Ein-Lebewesen-Modell nach Verhulst (http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/c/cb/Ein_lebewesen_verhulst_analyt.xls) (1,4Mb) programmiert und graphisch dargestellt. Es lassen sich die Anzahl der Individuen, sowie die Parameter g , s und su eingeben. Die Differenzgleichung wird für die ersten 10000 Schritte gelöst und gemeinsam mit der analytischen Lösung in einem Graphen für die ersten 100 Schritte dargestellt. Des Weiteren wird noch der Grenzwert der Population und der **Chaosparameter** $c = 1 + g - s$ berechnet. Es können mit diesem Excel-Arbeitsblatt auch eigene Graphen erstellt und selbstständig Rechnungen durchgeführt werden.

Die Differenzgleichung liefert je nach Wert dieses Chaosparameters von einander stark abweichende Lösungen. Folgendes Verhalten der **logistischen Gleichung** kann in Abhängigkeit des Parameters c beobachtet werden:

- $0 < c \leq 1$ - Die Population stirbt aus, die Anzahl der Individuen nimmt exponentiell ab.
- $1 < c \leq 2$ - Die Population wächst bis sie die Grenzpopulation erreicht.

- $2 < c \leq 3$ - Die Population wächst und die Anzahl der Individuen **schwingt** um die Grenzpopulation und nähert sich dieser wie eine gedämpfte Schwingung. Je näher der Parameter bei dem Wert **3**, desto länger dauert dieser Schwingvorgang.
- $3 < c \leq 4$ - Die Population pendelt zwischen mehreren Werten (im Intervall $[3, 3, 45]$ zwischen zwei Werten bei **3, 45** zwischen vier Werten usw.) und erreicht ab ungefähr **3, 57** chaotisches Verhalten. Das heißt, dass die Anzahl der Individuen nicht mehr vorhergesagt werden kann bzw. kleine Änderungen in den Parametern zu großen Änderungen in den Ergebnissen führen.

Aufgabe 1

Führt selbst eine Parameterstudie durch und überprüft oben angegebene Intervalle des Chaosparameters auf ihre Richtigkeit. Welche weiteren überraschenden Ergebnisse liefert die **logistischen Gleichung**? Experimentiert mit dem Excel-Arbeitsblatt. Verwende dazu die Angabe aus dem pdf-file Arbeitsblatt Parameterstudie zum Ein-Lebewesen-Modell nach Verhulst (http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/8/82/Parameterstudie_mv.pdf) (40kb). Fertigt ein Protokoll an, in dem eure Experimente dokumentiert sind! Fertigt so viele Graphen wie möglich an!

Unter Die logistische Differentialgleichung (<http://www.neuroinformatik.ruhr-uni-bochum.de/VDM/exercises/Logist/tex-ss/Logist/node2.html>) findet man noch weitere Übungsaufgaben und einen Graphenplotter, der online Graphen für unterschiedliche Parameterwerte zeichnet.

Link:

- Günther Ossimitz, Zwei Zugänge zum logistischen Wachstum, Univ. Klagenfurt (<http://wwwu.uni-klu.ac.at/gossimit/pap/logwachs.pdf>) - Betrachtungen und Herleitung der logistischen Differentialgleichung.

Räuber-Beute-Modell

Aufgabe 2

Als Erweiterung dieses Beispiels kann das Räuber-Beute-Modell gesehen werden. Ein Modell, das die Abhängigkeit der Population eines Beutetieres (Hase) und eines Raubtieres (Fuchs) voneinander untersucht. Hier gelten die **Lotka-Volterra-Regeln**:

1. Die Anzahl der Individuen (Populationsgröße) von Räuber und Beute schwanken periodisch. Diese beiden periodischen Vorgänge sind phasenverschoben, wobei die Räuberpopulation der Beutepopulation nachläuft.
2. Obwohl die Räuber- und Beutepopulation schwanken, ist der Mittelwert der Individuenanzahlen konstant.
3. Sollten die Populationen durch ein besonderes Ereignis (Umweltkatastrophe, Krankheit) dezimiert werden, erholt sich die Beutepopulation stets schneller als die Raubtierpopulation

Im [Excel-Arbeitsblatt zum Räuber-Beute-Modell](http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber_beute_mit_zeitschritt_und_stoerung.xls) (http://wikis.zum.de/medienvielfalt/images/9/95/Raeuber_beute_mit_zeitschritt_und_stoerung.xls) (3,6Mb) werden wiederum die Population berechnet und die Ergebnisse graphisch visualisiert. Auch hier können alle Parameter variiert werden, um obige Gesetze zu verifizieren. Alle Bedienungshinweise sind in der Datei angegeben.

Ein bisschen Relativitätstheorie

[Aufgabe für 2er-Gruppe] (Franz Embacher)

Die Funktion

$$v \mapsto \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

spielt in der Speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. Die Variable v steht für die Geschwindigkeit, mit der sich ein Körper (relativ zu einem Bezugssystem) bewegt, die Konstante c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit. Bearbeitet zunächst *getrennt* folgende Fragestellungen:

- a.) Wie verhält sich die gegebene Funktion für Geschwindigkeiten v , deren Betrag sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind ($|v| \ll c$)? Erstelle eine Näherungsformel $\gamma(v) \approx \dots$ (Reihenentwicklung bis zur Ordnung v^2)! Wie sieht der Graph der Funktion in diesem Bereich aus?
- b.) Wie verhält sich die gegebene Funktion für Geschwindigkeiten v , die in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit liegen ($v \approx c$, wobei aber $v < c$ sein soll)? Erstelle eine Näherungsformel $\gamma(v) \approx \dots$! Hier ein Tipp:
 $1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$.
 Wie sieht der Graph der Funktion in diesem Bereich aus?

Setzt euch danach wieder *zusammen*, diskutiert eure Ergebnisse und führt sie zusammen:

- Wie sieht der Graph der gesamten Funktion aus? (Welche Definitionsmenge wird man sinnvollerweise für sie wählen?)
- Wie passt dieser Graph mit den Graphen der (von euren getrennt erhaltenen) Näherungsfunktionen zusammen? Stellt alle drei Graphen in *einem* Diagramm dar! Verwendet als Tool einen Funktionsplotter oder ein Programm, das einen solchen enthält! Überlegt euch, wie ihr die Einheiten auf den Achsen wählt, damit das Diagramm möglichst aussagekräftig wird!
- Illustriert anhand einiger Werte von v (z.B. die Geschwindigkeit eines Fußgängers, eines Flugzeugs, 90% der Lichtgeschwindigkeit, 99% der Lichtgeschwindigkeit...) wie gut eure Näherungsformeln sind!

Wenn das alles geklärt ist, könnt ihr ein bisschen Relativitätstheorie betreiben:

- Die (relativistische) Gesamtenergie eines Körpers der Masse m , der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist durch $E(v) = m c^2 \gamma(v)$ gegeben. Wie verhält sich E für kleine Geschwindigkeiten? erinnert euch das Ergebnis an etwas, das ihr in eurem Physikunterricht gelernt habt? Wie verhält sich E für große Geschwindigkeiten? (Damit könnt ihr argumentieren, dass kein Körper auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann!)
- Zwillingsparadoxon: Alice und Bob sind gleich alt. Alice unternimmt eine Reise durchs All mit Geschwindigkeit v , während Bob auf der Erde zurückbleibt. Als Alice zurückkehrt, stellen die beiden fest, dass Alice jünger geblieben ist. Ist für Bob die Zeit ΔT_{Bob} vergangen und für Alice die Zeit ΔT_{Alice} , so sagt die Relativitätstheorie die Beziehung

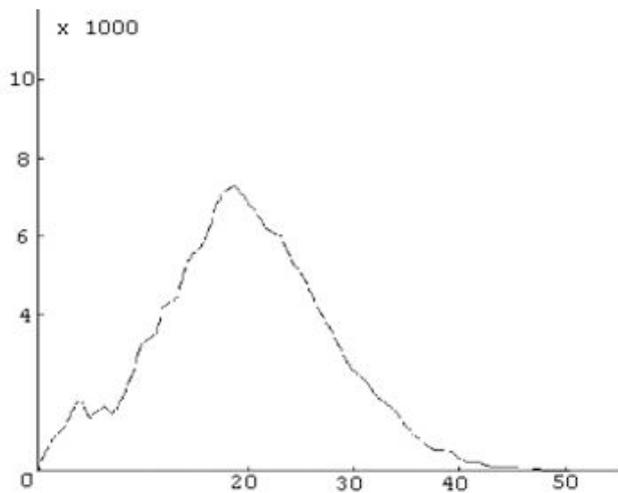
$$\frac{\Delta T_{\text{Bob}}}{\Delta T_{\text{Alice}}} = \gamma(v)$$
 zwischen den beiden Zeiten voraus. Wie sieht die Formel für diesen Zusammenhang aus, wenn Alice *fast* mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs war? Wie sieht sie aus, wenn sich Alice sich - vergleichsweise - nur recht langsam bewegt hat? Formuliert Faustregeln, wie die Größe des Effekts für kleine und für große v abgeschätzt werden kann!

Epidemie

[Aufgabe für 2er-Gruppe] (Peter Hofbauer)

Jährlich wird Europa von Grippewellen überrollt, die trotz der Möglichkeit der Grippeimpfung immer wieder zahlreiche Todesfälle fordern. In der nachfolgenden Abbildung seht ihr den Tagesreport der Grippefälle einer

Kleinstadt. Waagrecht sind die Tage ab Ausbruch der Grippewelle aufgetragen, senkrecht die Anzahl der an der Grippe erkrankten Personen an diesem Tag:



Setzt euch zusammen und überlegt vorerst ganz allgemein (d.h. ohne jetzt schon Berechnungen anzustellen), wie sich die folgenden Fragen mathematisch behandeln und beantworten lassen:

- Welche Funktionen könnten geeignet sein, um den Epidemieverlauf zu modellieren?
- Welche Aussagekraft hat die 1. Ableitung dieser Modellfunktion?
- Wie lässt sich das Integral dieser Funktion aus volkswirtschaftlicher Sicht interpretieren?
- Zu welchem Zeitpunkt verbreitete sich die Krankheit am stärksten?
- Wann begann die Anzahl der Neuinfektionen rückläufig zu werden?

Geht jetzt auseinander und versucht jeder alleine eine Modellfunktion zu finden und die oben gestellten Fragen mithilfe dieser Funktion zu beantworten. Die Daten müsst ihr aus der Grafik ablesen.

Vergleicht anschließend eure Ergebnisse. Wahrscheinlich werdet ihr nicht zu denselben Ergebnissen gekommen sein, dennoch solltet ihr zu ähnlichen Schlüssen kommen.

Diskutiert abschließend die Frage, welche Informationen notwendig wären um mithilfe des Integrals die Frage beantworten zu können, ob eine kostenlose Grippeimpfung volkswirtschaftlich sinnvoll wäre.

Elastizität

[Aufgabe für 2er- oder 3er-Gruppe] (Peter Hofbauer)

Der **Begriff der Elastizität** ist in der Ökonomie von entscheidender Bedeutung.

Die Elastizität einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist definiert durch: $\varepsilon(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$

Eine **Motivation für diesen Begriff** und einige Erklärungen dazu findest du unter anderem auf folgenden Seiten:

- Wikipedia ([http://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4t_\(Wirtschaft\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%C3%A4t_(Wirtschaft))) (betrachte dabei nur den Fall mit einer Variablen!)
- Foliensatz von Josef Leydold (Wirtschaftsuniversität Wien) (<http://statmath.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node103.html>) (kannst du das Beispiel am Ende der Seite nachvollziehen?)
- Powerpoint-Präsentation der Johannes Gutenberg-Universität Mainz (http://www.financial-economics.vwl.uni-mainz.de/downloads/vergangene%20Semester/Einf_VWLVGR%20WiSe%200506/VWLVGR05065.pdf)
- Eine ausgezeichnete Erklärung dafür, warum Cola an Flughäfen so teuer ist, liefert die Frankfurter Allgemeine Zeitung (<http://www.faz.net/s/RubB8DFB31915A443D98590B0D538FC0BEC/Doc~E05AF144BD89D49D6B1CFAF9FC198F369~ATpl~Ecommon~Scontent.html>) mithilfe der Elastizität .

Aufgabe 1

Macht euch zuerst anhand der oben angeführten Links alleine mit dem Begriff der Elastizität ein wenig vertraut und setzt euch anschließend zusammen und versucht folgende Fragen zu beantworten:

1. Angenommen die Funktion $n(p)$ beschreibt die Nachfrage nach einem Produkt beim Verkaufspreis p (dh. welche Menge des Produkts lässt sich beim Preis p absetzen). Was sagt dann die Elastizität (genauer: die Preiselastizität der Nachfrage) bei einem bestimmten Preis p_0 aus?
2. Worin besteht der Unterschied zwischen $n'(p_0)$ und $\epsilon(p_0)$?
3. Was ist generell der Unterschied zwischen der Ableitung einer Funktion und der Elastizität der Funktion?
4. In einem Land wurde die Preiselastizität für Butter auf -1 geschätzt, während die Preiselastizität für Kartoffel auf $-0,2$ geschätzt wurde (aus Sydsæter, Hammond: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler). Was könnte der Grund dafür sein, dass die Nachfrage nach Kartoffel unelastischer ist als jene nach Butter?
5. Ein Wirtschaftsmathematiker hat bei einer Diskussion folgende Behauptung aufgestellt: "Meine Preiselastizität der Nachfrage nach meiner bevorzugten Whiskymarke ist null!" Was wollte er damit eigentlich sagen?
6. In welchem Zahlenbereich sollte sich die Preiselastizität der Nachfrage normalerweise bewegen? Können ihr Gründe nennen, warum die Preiselastizität in Einzelfällen auch Werte außerhalb dieses Bereichs annehmen kann?
7. Die Nachfrage nach Netbooks einer bestimmten Marke beträgt $n(p)=60000-80p$. Bestimme die Preiselastizität der Nachfrage für die Preise von 1 Euro, 100 Euro, 350 Euro, 700 Euro und 750 Euro. Was bedeuten diese Ergebnisse?
8. Bisher haben wir nur über die Preiselastizität der Nachfrage gesprochen. Was versteht man vermutlich unter der Preiselastizität des Angebots und der Einkommenselastizität der Nachfrage?

Rekursionsverfahren

[Einzelaufgaben] (Walter Wegscheider und Matthias Kittel)

siehe Lernpfad Diskret - kontinuierlich

Von „http://wikis.zum.de/medienvielfalt/index.php/Sek2Uni/Pool_1“

- Diese Seite wurde zuletzt am 16. September 2010 um 13:03 Uhr geändert.
- Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons: Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland“ verfügbar; zusätzliche Bedingungen können anwendbar sein. Siehe die Nutzungsbedingungen für Einzelheiten.