Universalität für Wigner Matrizen

Benjamin Schlein, Universität Zürich

HSGYM Tag

29. Januar 2015

1. Einführung

Zufallmatrizen: sind $N \times N$ Matrizen dessen Einträge Zufallsvariablen mit gegebenen Verteilung sind.

Theorie der Zufallmatrizen: bestimme Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren von Zufallmatrizen im Limes $N \to \infty$.

Erinnerung: $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert der $N \times N$ Matrix H falls

$$\exists\, v \neq 0 \quad \text{mit } Hv = \lambda v.$$

Der Vektor v heisst dann Eigenvektor von H.

Bemerkung: hier beschränken wir uns auf $N \times N$ hermitesche Matrizen $H^\dagger = \overline{H^T} = H$. Die Eigenwerte sind also reell.

2. Ein wichtiges Beispiel

Gaussian Unitary Ensemble (GUE): die Einträge sind unabhängige und identisch verteilte Gauss'sche Variablen mit

$$\mathbb{E}h_{ij} = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}|h_{ij}|^2 = N^{-1}$$

Bemerke: Einträge skalieren mit N. Das ist nötig, damit alle Eigenwerte beschränkt bleiben, im Limes $N \to \infty$.

Wahrscheinlichkeitsdichte: ist aus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \text{const} \cdot \prod_{i,j} e^{-\frac{N}{2}|h_{ij}|^2} \\ &= \text{const} \cdot e^{-\frac{N}{2}\sum_{i,j}|h_{ij}|^2} = \text{const} \cdot e^{-\frac{N}{2}\mathrm{Sp}\, H^2}\end{aligned}$$

Invarianz: GUE ist invariant bezüglich unitären Konjugation, d.h

$$H \text{ eine GUE Matrix} \quad \Rightarrow \quad UHU^* \text{ auch eine GUE Matrix}$$

Eigenwerte W'dichte: ist explizit, gegeben aus

$$p_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = \text{const}\cdot\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2\, e^{-\frac{N}{2}\sum_{j=1}^N \lambda_j^2}$$

Marginaldichten: für $k=1,\ldots,N$, wir definieren

$$p_N^{(k)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \int d\lambda_{k+1}\ldots d\lambda_N\, p_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$$

Eigenwertedichte: für $k=1$, es gilt

$$p_N^{(1)}(\lambda)\to\rho_{\text{sc}}(\lambda) = \begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4}} & \text{für } |\lambda|\le 2\\ 0 & \text{für } |\lambda|>2\end{cases}$$

Lokale Korrelationen: Dyson zeigte (1966), dass $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\rho_{sc}^k(\lambda)}p_N^{(k)}\left(\lambda+\frac{x_1}{N\rho_{\text{sc}}(\lambda)},\ldots,\lambda+\frac{x_k}{N\rho_{\text{sc}}(\lambda)}\right) \to \det\left(\frac{\sin(\pi(x_i-x_j))}{\pi(x_i-x_j)}\right)_{1\le i,j\le N}$$

3. Anwendungen in Mathematik und Physik

Schwere Kernen: Zufallmatrizen wurden von Wigner eingeführt um das Anregungsspektrum von schweren Kernen zu beschreiben.

Anderson Modell für Halbleiter: betrachte Elektronen auf einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3$. Das Hamilton Operator ist

$$H_\omega = -\Delta + \kappa V_\omega(x)$$

mit $\{V_\omega(x) : x \in \Lambda\}$ unabhängig und identisch verteilte Variablen.

Man erwartet zwei Phasen:

- **Isolator Phase**: für κ gross, Eigenvektoren sind exp. lokalisiert, Eigenwerten unabhängig.

- **Metallische Phase**: für κ klein, Eigenvektoren sind delokalisiert, Eigenwerte zeigen Wigner-Dyson Korrelationen.

Riemann'sche Zeta-Funktion: für Re $s > 1$, sei

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Die Funktion $\zeta(s)$ kann auf $\mathbb{C}$ analytisch erweitert werden

Riemann'sche Vermutung: alle (nicht triviale) Nullstelle von $\zeta(s)$ sind auf der kritische Linie Re $s = 1/2$.

Lokale Korrelationen: Montgomery (1975) zeigte, dass Nullstelle auf der kritische Linie wie die Eigenwerten einer GUE Matrix verteilt sind.

Universalität Vermutung: lokale Eigenschaften vom Spektrum von Zufallsystemen und von kaotischen Systeme hängt aus der Symmetrie des Systems, aber nicht aus weiteren Details.

Invariante Ensembles: bestehen aus $N \times N$ hermitesche Matrizen H, mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{P}(H) = \text{const} \cdot e^{-\text{Sp}\, f(H)}$$

für eine reguläre Funktion f, mit $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$.

Bemerke: ist $f(x) = x^2$ sind wir zurück bei GUE.

Eigenwerte W'Dichte: es gilt

$$p_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \text{const} \cdot \prod_{i<j}^{N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \varepsilon^{-\sum_{j=1}^{N} f(\lambda_j)}$$

Universalität: in den '90-er Jahre wurde gezeigt, dass lokale Korrelationen von invariante Ensembles aus Wigner-Dyson Verteilung beschrieben werden, unabhängig aus f.

4. Wigner Matrizen

Ensemble von Wigner Matrizen: besteht aus $N \times N$ hermitesche Matrizen $H = (h_{ij})_{i,j \le N}$ dessen Einträge unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind, mit

$$\mathbb{E} h_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E} |h_{ij}|^2 = 1/N$$

Bemerke: Sind die h_{ij} Gauss'sche Variablen, dann sind wir zurück bei GUE.

Goal: wir möchten Aussage über Wigner Matrizen beweisen, die unabhängig aus der Verteilung von h_{ij} sind.

Halbkreis-Gesetz: in 1955 zeigte Wigner die Konvergenz der Dichte der Eigenwerten zum Halbkreis-Gesetz; für alle $\delta > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{\mathcal{N}[\lambda - \eta/2; \lambda + \eta/2]}{\eta} - \rho_{sc}(\lambda) \right| \geq \delta \right) = 0$$

Bemerkungen:

- ρ_{sc} hängt nicht aus der Verteilung der Einträge ab.

- Das Resultat von Wigner beschreibt die Dichte der Eigenwerten auf makroskopisch grosse Intervalle, die typischerweise Ordnung N Eigenwerten enthalten.

Frage: was passiert auf kleinere Intervalle?

5. Lokale Konvergenz zum Halbkreis Gesetz

Theorem [Erdős-S.-Yau]: nehme an, es existiere $\alpha > 0$ mit $\mathbb{E}\, e^{\alpha|h_{ij}|} < \infty$. Dann, für alle $\delta > 0$,

$$\lim_{K\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{\mathcal{N}\left[\lambda - \frac{K}{2N}; \lambda + \frac{K}{2N}\right]}{K} - \rho_{\text{sc}}(\lambda) \right| > \delta \right) = 0$$

Bemerkungen:

- Das Theorem zeigt Konvergenz gegen das Halbkreis Gesetz auf mikroskopische Intervalle, die typischerweise Ordnung 1 Eigenwerten enthalten.

- Das Theorem impliziert Konvergenz auf beliebige Intervalle, mit Länge $L \gg N^{-1}$.

- Das Theorem ist optimal in der Längenskala

6. Delokalisierung der Eigenwerten

Sei $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{C}^N$ mit $\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N |v_j|^2\right)^{1/2} = 1$

- Wir sagen $\mathbf{v}$ sei **vollständig lokalisiert**, falls $\mathbf{v}$ nur eine nicht-verschwindende Komponente hat, zB.

$$\mathbf{v} = (1, 0, \ldots, 0) \qquad \Rightarrow \qquad \|\mathbf{v}\|_p = 1, \text{ for all } 2 < p \leq \infty$$

- Wir sagen $\mathbf{v}$ sei **vollständig delokalisiert**, falls alle Komponenten von $\mathbf{v}$ gleich gross sind, zB.

$$\mathbf{v} = (N^{-1/2}, \ldots, N^{-1/2}) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{v}\|_p = N^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \ll 1$$

Theorem [Erdős-S.-Yau]: Sei $\kappa > 0$, $2 < p \leq \infty$. Dann

$$\mathbb{P}\Big(\exists \mathbf{v} : H\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}, \mu \in [-2+\kappa, 2-\kappa], \|\mathbf{v}\|_2 = 1, \|\mathbf{v}\|_p \geq MN^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\Big) \leq Ce^{-c\sqrt{M}}$$

7. Abstossung der Eigenwerten

Theorem [Erdős-S.-Yau, 2008]: Sei $|\lambda| < 2$, $k \in \mathbb{N}$, und die Einträge genügend regulär.

Dann es existiert eine Konstante $C = C(k)$ mit

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}\left[\lambda - \frac{\varepsilon}{2N}; \lambda + \frac{\varepsilon}{2N}\right] \geq k\right) \leq C_k \, \varepsilon^{k^2}$$

Bemerkungen:

- Das Resultat für $k > 1$ zeigt die Abstossung der Eigenwerten.

- Für GUE haben wir

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \simeq \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}_\varepsilon \geq k) \simeq \varepsilon^{k^2}$$

  D.h. der Exponent k^2 ist optimal.

8. Universalität von Wigner Matrizen

Theorem [Erdős-Ramirez-S.-Tao-Vu-Yau (2009)]:
Sei $H = (h_{ij})_{i,j\le N}$ eine Wigner Matrix mit $\mathbb{E}\, e^{\alpha|h_{ij}|} < \infty$.

Sei $|\lambda| < 2$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{1}{\varrho_{\text{sc}}^k(\lambda)}\, p_N^{(k)}\Big(\lambda + \frac{x_1}{N\varrho_{\text{sc}}(\lambda)}, \ldots, \lambda + \frac{x_k}{N\varrho_{\text{sc}}(\lambda)}\Big) \to \det\left(\frac{\sin(\pi(x_i - x_j))}{\pi(x_i - x_j)}\right)_{i,j\le k}$$

als $N \to \infty$.

Das Theorem zeigt, dass die lokale Korrelationen nicht aus Details von Verteilung von Einträge abhängt.