

## Freiheit für die Kombinatoriker

Eine geschickte Strategie holt aus einem eigentlich hoffnungslosen Spiel noch eine Gewinnchance von fast einem Drittel heraus.

Von Christoph Pöppe

Vorab ein »Disclaimer«: Es gibt keinen Anlass, dem Personal deutscher Justizvollzugsanstalten Pflichtvergessenheit, Sadismus, übermäßige Fantasie, Neigung zur Mathematik oder andere problematische Eigenschaften zu unterstellen. Aber eine Einzelperson, die eine große Gruppe vor eine schwierige Aufgabe stellt, bei der alle Mitglieder der Gruppe sorgfältig voneinander isoliert werden – da denkt man unvermeidlich an einen Gefängniswärter, dem vor lauter Langeweile nichts anderes in den Sinn kommt, als die ihm Anvertrauten mit der vagen Aussicht auf Freilassung zu quälen. In Wirklichkeit ist diese Aussicht verschwindend gering – denkt der Wärter. Aber er hat nicht mit der geballten Intelligenz der Insassen gerechnet ...

In unserem Preisrätsel »Die Erleuchtung« (4/2003, S. 108; Auflösung 6/2003, S. 110) war stoische Geduld die Voraussetzung für den Weg in die Freiheit. In dem Spiel, das ich Ihnen diesmal vorstellen möchte, geht es etwas schneller. Der (natürlich wieder sadistische) Wärter gewährt seinen hundert Häftlingen der Reihe nach und einzeln Zugang zu dem großen Schrank, in dessen Fächern die persönliche Habe jedes Gefangenen gelagert ist. Jeder von ihnen darf genau 50 Fächer öffnen und deren Inhalt in Augenschein nehmen. Da bei der persönlichen Habe auch der Personalausweis ist, kann er erkennen, wem das jeweilige Fach gehört. Wenn er dabei seine eigenen Sachen findet, ist das zwar ein persönlicher Erfolg; aber freigelassen werden entweder alle oder keiner, und die Tore des Gefängnisses öffnen sich nur, wenn jeder nach höchstens 50 Versuchen seine Sachen gefunden hat.

Das ist echter Sadismus! Jeder Einzelne hat eine faire Chance von immerhin 50 Prozent, für sich persönlich einen Erfolg zu landen. Aber die Wahrscheinlichkeit, dass das allen gelingt, ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten,

das in diesem Fall  $2^{-100}$  oder annähernd  $10^{-30}$  beträgt. Das ist ungefähr so viel wie die Chance, durch blindes Hineingreifen das einzige Duftmolekül zu erwischen, das in einem Kubikmeter Wasser enthalten ist, oder das einzige Wirkstoffmolekül in einer D-30-Verdünnung der Homöopathen – so hoffnungslos, dass man sich das Gewühle in den Fächern gleich sparen kann.

### Die einzige Chance: gekoppelte Strategien

Immerhin erlaubt der Wärter den Insassen, sich vorher abzusprechen. Allerdings macht er ihnen unmissverständlich klar, dass sie während des grausamen Spiels keine Gelegenheit zur Verständigung untereinander haben werden. Nach jedem Durchgang eines Häftlings wird er den Schrank wieder in den Urzustand versetzen und jede geheime Nachricht, die dieser seinen Nachfolgern hinterlassen haben könnte – indem er etwa die Türen einzelner Fächer offen stehen lässt oder deren Inhalt geeignet anordnet –, vernichten.

Was tun? Beim Strategietreffen wird den versammelten Insassen bald klar, dass keiner von ihnen eine Möglichkeit hat, seine persönliche Erfolgchance von 50 Prozent irgendwie zu verbessern. Man könnte untereinander absprechen, dass der erste nur die ersten fünfzig Fächer durchschaut, der zweite nur die letzten fünfzig, der dritte nur die mit ungeraden Nummern ... Aber die ganze Variation nutzt nichts, denn die Fächer sind nach dem Zufallsprinzip belegt. Da ändert irgendeine Suchregel nichts an der Erfolgchance; genauso gut könnte man seine Fächer auch auswürfeln.

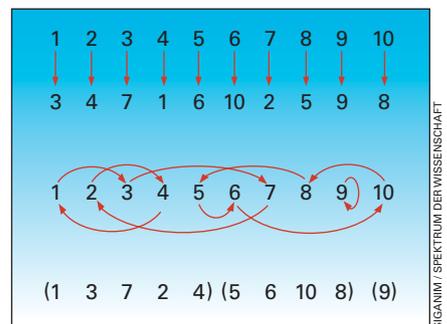
Insbesondere kann es keine Strategie geben, die einen Erfolg garantiert. Denn schon der erste Kandidat kann mit seiner Suche scheitern und damit sich und allen anderen die Chance auf Freiheit nehmen.

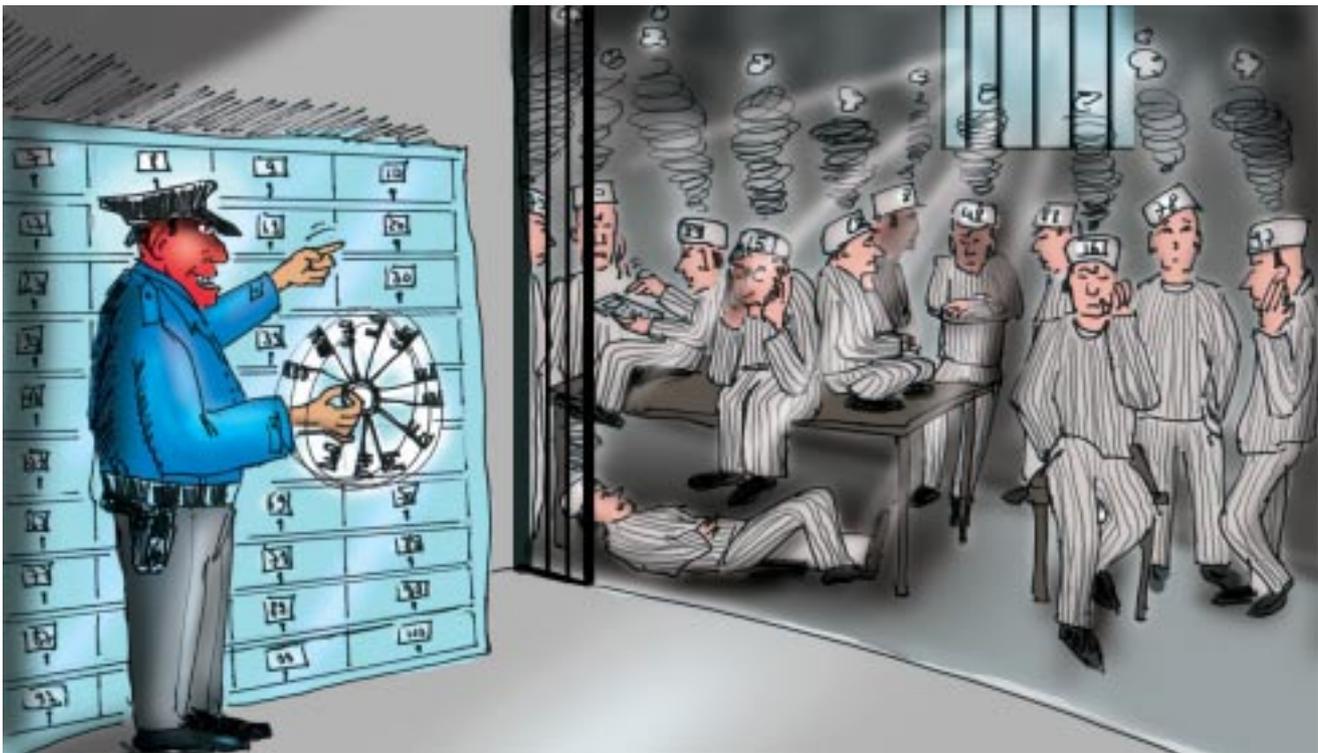
Überraschenderweise kann die Gruppe durch geschickte Koordination ihrer Strategien eine Erfolgchance von mehr als 30 Prozent erreichen. Wenn Sie wollen: Denken Sie einen Moment darüber nach, an welcher Stelle die obige Argumentation angreifbar ist.

Für das Folgende ist es hilfreich, durch ein bisschen Abstraktion dem Kern des Problems näher zu kommen. Geben wir den Gefangenen Nummern von 1 bis  $n$  (bisher war  $n = 100$ ) und den Schrankfächern auch. Denken wir uns – ohne am Problem etwas Wesentliches zu ändern –, dass der Wärter beim Präparieren des Schrankes Zettel mit den Nummern 1 bis  $n$  gut gemischt und in jedes Fach einen Zettel gelegt hat. Damit hat er die Zahlen von 1 bis  $n$  in eine neue Reihenfolge gebracht oder, mathematisch gesprochen, eine Permutation  $p$  der Zahlen von 1 bis  $n$  realisiert: eine (umkehrbar eindeutige) Abbildung, die jeder Zahl  $j$  eine andere Zahl  $p(j)$  zuordnet derart, dass unter den  $p(j)$  jede Zahl von 1 bis  $n$  genau einmal vorkommt. Jeder Gefangene hat  $n/2$  Versuche, die eigene Nummer zu finden.

Warum musste man die Einzelwahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren, wodurch das hoffnungslose Ergebnis zu Stande kam? Weil die Ereignisse »A findet seine Sachen« und »B findet

▶ **Drei mögliche Darstellungen für eine Permutation der Zahlen von 1 bis 10. Die unterste zeigt auf einen Blick, dass die Permutation aus drei Zyklen mit den Längen 5, 4 und 1 besteht.**





SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

seine Sachen« voneinander unabhängig sind. Wohlgemerkt, es geht um die Unabhängigkeit der Erfolgsereignisse, nicht der Strategien. Die Verabredung »ich durchsuche die geraden Nummern, du die ungeraden« schafft eine Abhängigkeit zwischen beiden Strategien, nutzt aber nichts. Gibt es Strategien, die nicht nur voneinander abhängig sind, sondern deren Abhängigkeit sich auch auf die Erfolgchancen überträgt?

Einen Baustein zur Lösung liefert das Hutproblem (Spektrum der Wissenschaft 9/2001, S. 100). Drei Kandidaten tragen je einen roten oder blauen Hut. Jeder kann die Farbe der anderen Hüte sehen, nicht aber die seines eigenen, wird aber genau nach der Farbe seines Hutes gefragt. Er kann »Blau« oder »Rot« sagen oder schweigen. Das ganze Team hat gewonnen, wenn kein falsches Wort fällt und wenigstens ein richtiges.

Natürlich liefern die Farben der anderen Hüte nicht den geringsten Hinweis auf die eigene Hutfarbe. Wieder hat der Einzelne nur eine Chance von 50 Prozent, richtig zu raten, und die ist mit keinem Mittel verbesserbar. Der Schlüssel zur Lösung liegt in der Kopplung der falschen – und damit auch der richtigen – Antworten: Wenn ich schon nicht vermeiden kann, falsch zu raten, dann will ich, dass meine Kollegen in diesem Fall auch falsch raten. Denn das erhöht die Chance, dass meine Kollegen ebenfalls richtig raten, wenn ich das tue.

Beim Hutproblem kommen die Kandidaten auf die erstaunliche Erfolgsquote

von 75 Prozent, indem sie sicherstellen, dass jeder dann und nur dann etwas Falsches sagt, wenn die anderen auch etwas Falsches sagen. Damit konzentriert man den unvermeidlichen Anteil der Falschaussagen auf wenige unter allen denkbaren Ereignissen, wodurch die restlichen Ereignisse fehlerfrei bleiben.

Die Option, den Mund zu halten, welche die Erfolgchance beim Hutproblem erst richtig in die Höhe treibt, steht unseren Gefangenen allerdings nicht zur Verfügung. Aber die alles entscheidende Abhängigkeit der Erfolgchancen können sie auch herstellen. Die ideale Situation »ich finde meine eigene Nummer genau dann, wenn du deine findest« ist zwar nicht immer zu realisieren, aber immer öfter, als man denkt.

### Schlüssel zum Erfolg: Permutationen

Das Rezept ist verblüffend einfach. Der Gefangene Nummer  $j$  öffnet zunächst Fach Nummer  $j$ . Wenn er darin seine Nummer vorfindet, hat er sein Teil zum Erfolg beigetragen und kann gehen (oder pro forma noch  $n/2-1$  Fächer öffnen). Wenn er eine andere Nummer  $k=p(j)$  findet, öffnet er Fach  $k$ ; findet er die Nummer  $p(k)=p(p(j))$ , öffnet er das Fach  $p(k)$  und so weiter. Wenn er im Verlauf der Aktion seine eigene Nummer findet, ist es gut; ansonsten wird er weinend den Raum verlassen.

Wenn der Gefangene  $k$  an der Reihe ist, öffnet er Fach  $k$  (alle Gefangenen folgen derselben Strategie) und ab da unvermeidlich dieselben Fächer wie sein Kol-

▲ In diesem grausamen Spiel zu gewinnen ist so wahrscheinlich, wie hundertmal hintereinander im Roulette auf die richtige Farbe – Rot oder Schwarz – zu setzen. Hoffnungslos, oder?

lege  $j$  in der serselben Reihenfolge. Wenn  $j$  Glück gehabt hat, kommt  $k$  nach spätestens  $n/2-1$  Schritten an Fach  $j$  und ist glücklich, denn darin liegt seine eigene Nummer. Dasselbe gilt für alle Gefangenen, deren Nummern  $j$  auf seinem Irrweg durch die Fächer zieht. Damit sind die Schicksale dieser Leute miteinander verknüpft, ohne dass sie sich miteinander verständigt haben: Entweder finden alle ihr Fach oder keiner.

Übersichtlicher wird die Sache durch die so genannte Zyklenschreibweise für Permutationen. Statt in einer Tabelle aufzuführen, welche Zahl durch die Permutation  $p$  auf welche abgebildet wird, schreibt man hintereinander  $1, p(1), p(p(1))$  und so weiter, bis man wieder bei der Eins angelangt ist (das muss irgendwann passieren, denn es stehen nur endlich viele Zahlen zur Auswahl). Damit ist ein Zyklus komplett. Sind noch nicht alle Zahlen verbraucht, eröffnet man mit der kleinsten verbleibenden Zahl einen neuen Zyklus und so weiter (Bild links). Die Zyklendarstellung einer Permutation ist nicht nur kompakt; sie zeigt auch übersichtlich, was geschieht, wenn man, wie unsere Gefangenen, die Permutation immer wieder anwendet. ▷

▷ Damit ist die Voraussetzung für die Freiheit aller Gefangenen schnell formuliert: Sie winkt – wenn alle sich an die genannte Strategie halten – genau dann, wenn die vom Wärter realisierte Permutation keinen Zyklus enthält, der länger als  $n/2$  ist.

Wie wahrscheinlich ist das? Welche Chance können sich die Insassen auf ein Ende ihrer Qualen ausrechnen? Das ist nicht allzu schwer zu bestimmen; rechnen wir es der Einfachheit zuliebe am Beispiel  $n = 10$  durch.

### Rechnen mit Fakultäten

Die Anzahl aller Permutationen der Zahlen von 1 bis  $n$  ist  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$  ( $n$ -Fakultät). Für einen Zyklus der Länge, sagen wir, 6 müssen wir zunächst aus den  $n = 10$  Zahlen sechs auswählen; die Anzahl der Möglichkeiten dafür (der »Binomialkoeffizient 10 über 6«) wird  $\binom{10}{6}$  geschrieben und beträgt  $10!/(6! \cdot 4!)$ . Diese sechs Zahlen gilt es dann zu einem Zyklus anzuordnen; dafür gibt es 5! Möglichkeiten.

Wieso nur 5! und nicht 6!, wo man doch die sechs Zahlen in eine beliebige Reihenfolge bringen darf? Weil zum Beispiel (4 7 3 2 8 9) und (7 3 2 8 9 4) nur zwei verschiedene Schreibweisen für ein und denselben Sechserzyklus sind. Um Zyklen nicht mehrfach zu zählen, muss man – zum Beispiel – die Festlegung treffen, dass die kleinste Zahl im Zyklus

zuerst genannt wird. Damit bleiben noch 5! Möglichkeiten für die Reihenfolge der restlichen Zykuselemente.

Es bleibt zu bestimmen, was mit den restlichen vier Zahlen geschehen soll. Dafür gibt es wieder 4! Möglichkeiten.

Alles zusammengerechnet, ergibt sich: Es gibt  $5! \cdot 4! \cdot 10!/(6! \cdot 4!) = 10!/6$  Permutationen der Zahlen von 1 bis 10, die einen Zyklus der Länge 6 enthalten. Unter allen Permutationen enthält jede sechste einen Sechserzyklus, jede siebte einen Siebenerzyklus und so weiter. Bloß auf die kurzen Zyklen kann man diese Argumentation nicht anwenden: Ein Viererzyklus in einer Permutation der Zahlen von 1 bis 10 schließt einen weiteren Viererzyklus nicht aus, also gibt es Doppelzählungen, die man aus dem Ergebnis wieder herausrechnen muss. Aber die Mühe müssen wir uns nicht machen. Der Anteil der Verliererpermutationen ist  $1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 = 1627/2520$  oder ungefähr 64,56 Prozent. Das heißt: Eine Gruppe von 10 Gefangenen kommt in reichlich 35 Prozent aller Fälle frei!

Je größer die Anzahl der Gefangenen, desto schlechter werden ihre Chancen. Aber erstaunlicherweise werden sie nicht beliebig schlecht. Bei  $n$  Gefangenen ist die Wahrscheinlichkeit, zu verlieren, gleich der Summe  $1/n + 1/(n-1) + 1/(n-2) + \dots + 1/(n/2+1)$ . Dafür gibt es zwar keine geschlossene Formel; aber

man kann die Summe durch ein Integral abschätzen. Da das Integral über die Funktion  $1/x$  gleich dem natürlichen Logarithmus  $\ln x$  ist, ergibt sich, dass selbst für beliebig große  $n$  die Misserfolgswahrscheinlichkeit nie größer wird als der natürliche Logarithmus von 2 oder auch 69,3147 Prozent. Freiheit winkt in mehr als 30 Prozent aller Fälle.

Eine weitere Überlegung beweist, dass die geschilderte Strategie optimal ist. Eine bessere Erfolgchance ist mit keinem Trick herauszuholen.

Das Ende der Geschichte ist natürlich traurig: Der Wärter ist nicht nur ein Sadist, sondern kennt sich auch noch in Kombinatorik aus. Also hat er arglistig die Zettel so gelegt, dass sich ein Zyklus der Länge 56 ergibt, und weidet sich daran, wie der Jubel der 44 glücklichen Finder – »jetzt kann doch eigentlich nichts mehr schief gehen!« – in bittere Enttäuschung umschlägt. ◀



**Christoph Pöppe** ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

The locker puzzle. Von Eugene Curtin und Max Warshauer in: The Mathematical Intelligencer, Bd. 28, Heft 1, S. 28, 2006

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei [www.spektrum.de](http://www.spektrum.de) unter »Inhaltsverzeichnis«.

## Nachtrag zu »Sudoku oder die einsamen Zahlen« (März 2006)

**Viele Leser haben zu dem Sudoku** mit den Größer- und Kleiner-Zeichen ganz ohne Zahlen die Lösung gefunden, die dem Autor Jean-Paul Delahaye noch unbekannt war:

2	7	3	4	1	6	8	9	5
5	8	4	3	9	7	2	6	1
6	1	9	2	8	5	3	4	7
7	9	5	6	4	8	1	2	3
3	2	6	5	7	1	9	8	4
8	4	1	9	2	3	7	5	6
9	3	8	1	5	4	6	7	2
4	6	7	8	3	2	5	1	9
1	5	2	7	6	9	4	3	8

**Eine der vielen verschiedenen Lösungsstrategien** war die von Jörg Knappen aus Saarbrücken:

»Es gibt ›Quellen‹, von denen nur Größerzeichen ausgehen, und ›Senken‹, auf die nur Kleinerzeichen zeigen. Die Zahl 9 kann nur auf einer Quelle platziert werden, die Zahl 1 nur auf einer Senke.

Im unteren rechten Kästchen gibt es nur eine Quelle; dort muss demnach eine Neun stehen. Mit normalen Sudoku-Methoden lassen sich insgesamt sieben Neunen unterbringen. Jede Quelle hat ein »Bewässerungsgebiet«, das ist die Menge der Felder, mit denen sie durch eine Kette von Größerzeichen verbunden ist; aus der Länge dieser Kette ergeben sich kleinstmögliche Zahlen für die Quellen. Umgekehrt haben die Senken einen »Einzugsbereich«, daraus erge-

ben sich größtmögliche Zahlen. Damit lassen sich von oben herab die Zahlen 8, 7, 6 und 5 platzieren. Für die kleinen Zahlen bleiben nur noch wenige Alternativen, die sich dann mit der Sudoku-Eigenschaft auflösen lassen.

Das geht ganz ohne Raten und Probieren.«

### Die Klassifizierung der Beispiel-Sudokus

auf S. 110 war für viele Leser nicht nachvollziehbar. Insbesondere war das als »mittel« eingestufte Sudoku schwerer zu lösen als das »höllische« (was ich bestätigen kann; meine Lösungszeiten waren von links nach rechts 18, 46, 34 und 40 Minuten). Offensichtlich erfassen die Algorithmen zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrads das menschliche Denken doch nur unvollkommen.