Thurgau

Name/Vorname:	
Punkte:	Note:
Datum Prüfung: 10. Juni 2009	Datum Korrektur:

Maturitätsprüfung 4mb 2009

Fach: Mathematik

Lehrer: Andy Risch

Prüfungsdauer: 3 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel:
– TI 89/TI Voyage/TI Nspire
– Formelsammlung DMK oder „Fundamentum“, ergänzt durch eigene Formeln sowie ein eigenes Blatt, A4, vorne und hinten beschrieben. Nicht gestattet sind eigene Beispiele und Aufgaben.
– ein A4-Blatt mit TR-Befehlen

Bewertung: Der ganze Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe klar ersichtlich sein.

Punktemaximum: 58 Punkte

53 Punkte ergeben die Note 6. 31 Punkte ergeben die Note 4. Die Notenskala kann nach unten angepasst werden.

Bemerkungen: Der TR ist zum Vereinfachen von Termen, zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen sowie zur Berechnung von Integralen und Ableitungen erlaubt und empfohlen. Skalar- und Vektorprodukte, Längen von Vektoren und Einheitsvektoren dürfen ebenfalls mit dem TR berechnet werden.
Geben Sie jeweils einen Hinweis wie „TR“, wenn Sie Ihren TR einsetzen.

Bitte achten Sie auf eine sorgfältige und übersichtliche Darstellung.

Sie müssen nicht für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.

Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.

Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben spielt keine Rolle. Einfache und schwierige Aufgaben sind durchmischt.

Legen Sie am Ende Ihre Lösungen in diesen Prüfungsbogen.

Viel Erfolg!

Analysis

1. 4 P. **Extrema und Flächeninhalt**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4x-3) \cdot e^{bx}$ mit $b > 0$.
a) 2 P. Berechnen Sie sämtliche Minima und Maxima der Funktion.
b) 2 P. Wie gross ist die Fläche, welche $f(x)$ mit der x-Achse einschliesst?

2. 4 P. **Hyperboloid**

Der zwischen den Geraden $x = -3a$ und $x = 3a$ liegende Teil der Hyperbel $h: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ rotiert um die x-Achse.
a) 1 P. Erstellen Sie eine Skizze der Situation.
b) 3 P. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

3. 4 P. **Polynom**

Die Polynomfunktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ hat in $x = -3$ eine Nullstelle, geht durch die Punkte A(2/–35) und B(–1/–62) und hat in $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum. B ist ein Wendepunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

4. 6 P. **Glockenkurve**

Studieren Sie die Glockenkurve $f(x) = e^{-x^2}$.
a) 3 P. Unter welchem Winkel φ schneiden sich die beiden Wendetangenten? Geben Sie das Resultat auf zwei Nachkommastellen genau an.
b) 3 P. Betrachten Sie zusätzlich die um eins nach links verschobene Glockenkurve $g(x) = e^{-(x+1)^2}$. An welcher Stelle ist der vertikale Abstand *d* zwischen den Glockenkurven maximal? Wie gross ist *d* an dieser Stelle? Geben Sie das Resultat auf vier Nachkommastellen genau an.

Stochastik

5. 4 P. **Verschiedenes**

a) 1 P. Wie oft muss man drei gewöhnliche Würfel werfen, bis man mit 99% Sicherheit mindestens eine „Tripeldrei“ (333) geworfen hat?
b) 1 P. In einer Urne liegen vier schwarze, acht grüne, zwei gelbe und drei blaue Kugeln. Sie ziehen mit einem Griff acht Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei schwarze, drei grüne, eine gelbe und zwei blaue Kugeln ziehen?
c) 2 P. Für zwei Zufallszahlen gilt: $|x| \le 6$ und $2 \le y \le 7$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $(x-1)^2 + (y-4)^2 \ge 2$?

6. 5 P. **Konzert**

Eine Gruppe Jugendlicher besteht aus acht Jungen und zwölf Mädchen. Die Gruppe erhält von einem Sponsor 15 Karten für ein Konzert geschenkt.

a) 1 P. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 15-köpfige Gruppe mit genau acht Mädchen zusammenzustellen?

b) 2 P. Wie viele 15-köpfige Gruppen gibt es, wenn die drei Freunde Peter, Hans und Claudio entweder gemeinsam oder gar nicht ans Konzert wollen? Diese Aufgabe bezieht sich *nicht* auf die Teilaufgabe a).

c) 2 P. Die Gruppe beschliesst, die Tickets zu verlosen. Dazu schreiben sie 20 Zettelchen mit 15 Treffern und fünf Nieten. Jeder zieht genau ein Los (ohne Zurücklegen). Fritz soll als Zweiter ein Los ziehen, Julia als Erste. Fritz beschwert sich, dass seine Chancen auf einen Ticketgewinn geringer als für Julia sind. Stimmt das? Begründen Sie ausführlich.

7. 4 P. **Käfer**

Ein Käfer bewegt sich in einem Koordinatensystem pro Sekunde zufällig um genau eine Einheit nach rechts oder nach oben. Mit der Wahrscheinlichkeit von 70% geht er jeweils nach rechts. Zum Zeitpunkt 0 startet der Käfer im Ursprung.

a) 1 P. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht der Käfer nach 20 Sekunden den Punkt Z(14/6)?

b) 2 P. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt der Käfer über die Punkte Q(4/2) und R(7/3) zum Punkt Z(14/6)?

c) 1 P. Welche Strecke legt der Käfer im Mittel in x-Richtung innerhalb von einer Minute zurück?

8. 5 P. **Normalverteilung und Milch**

a) 2 P. Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Berechnen Sie $P(0.2\sigma \leq X - \mu \leq 0.7\sigma)$.

b) 2 P. Ein Milchlieferant behauptet, dass seine Milch-Tetrapaks zu 99.9% einen Inhalt von wenigstens einem Liter erreichen. Wie gross ist der mittlere Inhalt in Litern, wenn der Lieferant Recht hat und der Milchinhalt normalverteilt mit $\sigma = 0.002$ Liter ist?

c) 1 P. Ein zweiter Milchlieferant stellt 5 dl (Deziliter)-Tetrapaks her. Der Inhalt ist normalverteilt mit Mittelwert 5 dl und Standardabweichung 0.002 dl. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung um höchstens einen Milliliter vom Mittelwert abweicht?

Vektorgeometrie

9. 6 P. **Grundaufgaben**

Gegeben sind die Punkte A(2/4/3), B(6/0/5) und C(2/8/6).

a) 1 P. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) 1 P. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C.

c) 2 P. Ermitteln Sie eine Gleichung der Winkelhalbierenden von $\alpha = \angle BAC$.

d) 2 P. Berechnen Sie $\beta = \angle ABC$.

10. 6 P. **Gerader Kreiskegel**
Der Grundkreis eines geraden Kreiskegels mit Spitze $S(16/-11/9)$ liegt in der Ebene $E: 9x-6y+2z+14=0$. Der Punkt $P(0/-1/z)$ liegt auf dem Grundkreis des Kegels.
a) 2 P. Berechnen Sie die Höhe des Kegels.
b) 2 P. Welchen Winkel schliessen die Mantellinie PS und die Grundkreisebene ein?
c) 2 P. Welcher Punkt des Grundkreises hat von P den grössten Abstand?

11. 6 P. **Kugel**
Gegeben ist eine Kugel mit Mittelpunkt $M(-1/1/0)$ und Radius 11.
a) 2 P. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, welche im Abstand 4 von der Kugel und am weitesten von der Ebene $E: x+2y+2z-297=0$ entfernt liegen.
b) 4 P. Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $L(11/12/22)$ aus in Richtung $R(8/9.5/14.5)$. Der Lichtstrahl wird an der Kugel reflektiert. In welchem Punkt trifft der reflektierte Lichtstrahl auf die Ebene $F: x-2y+3z-181=0$?

Verschiedenes

12. 4 P. **Teilchen im Raum**
Ein Teilchen bewegt sich im Raum. Es startet im Punkt $P(2/-5/8)$ und verschiebt sich zuerst um $\vec{v}=\begin{pmatrix}-81\\162\\-162\end{pmatrix}$. Anschliessend bewegt es sich um ein Drittel von $\vec{v}$ in die entgegengesetzte Richtung, dann wiederum um ein Drittel vom letzten Vektor in die ursprüngliche Richtung usw. Welchem Punkt Q nähert sich das Teilchen auf diese Weise an?