1. Kugelaufgabe 20 Punkte

5P a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen einer Kugel mit Radius 9cm.

4P b) Vergraben Sie diese Kugel bis zur Hälfte im Sand. Die noch sichtbare Oberfläche werde nun durch die vier Himmelsrichtungen in vier gleichgrosse Quadranten geteilt und jeder Quadrant mit einer der Farben rot, grün oder blau gefärbt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Himmelsrichtungen berücksichtigt werden müssen? Bei wie vielen Möglichkeiten werden genau 2 Farben verwendet?

11P c) Schneiden Sie nun aus dieser Kugel denjenigen geraden Kreiskegel mit dem grössten Volumen heraus und berechnen Sie, wie viele Prozente vom Kugelvolumen der Abfall und wie viele Prozente der Kegel ausmacht.

2. Summe trigonometrischer Funktionen 28 Punkte

Auf vier verschiedene Zettel sind je eine der vier Funktionen geschrieben. Sie ziehen blindlings zwei Zettel und müssen die gezogenen Funktionen addieren.

$$y_1 = 4\cos x\,; \quad y_2 = \sin 4x\,; \quad y_3 = \sin 8x\,; \quad y_4 = \sin 9x$$

4P a) Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Ziehen? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwei Sinusfunktionen addieren müssen? Geben Sie Ihre Überlegungen in einem kurzen Text wieder.

11P b) Sie ziehen y_1 und y_2. Durch welche geometrischen Abbildungen können Sie den Graphen der Funktion y_1 auf den Graphen der Funktion y_2 bringen? Zeichnen Sie y_1 und y_2 einzeln sowie ihre Summe im Intervall $[-\frac{\pi}{2}; 2\pi]$. Berechnen Sie weiter die Fläche zwischen den Graphen von y_1 und y_2, links begrenzt durch $x = -\frac{\pi}{2}$ und rechts begrenzt durch $x = \frac{\pi}{2}$.

7P c) Sie ziehen y_2 und y_3. Wo schneidet der Graph der Summenfunktion die x-Achse? (geben Sie alle Lösungen an!)

Tipp: Schreiben Sie die Summenfunktion als Produktfunktion mit Hilfe der entsprechenden goniometrischen Formel.

6P d) Sie ziehen y_3 und y_4. Ermitteln Sie von beiden Funktionen die Periode im Bogenmass. Ist die Summenfunktion auch eine periodische Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie die Summenfunktion als Produktfunktion an und skizzieren Sie diese ganz grob. Nehmen Sie als Einheit in y-Richtung 2Häuschen und in x-Richtung π = 6 Häuschen. Wo kommt dieser Fall in der Natur vor?

3. Logarithmusfunktion 17 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \ln |x|$

3P a) Geben Sie Definitionsmenge, Art allfälliger Definitionslücken und allfällige Symmetrien des Graphen an.

6P b) Geben Sie, falls vorhanden, die Extrema der Funktion an.

4P c) Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [-3; +3], indem Sie zuerst die beiden Teilfunktionen und erst dann die Produktfunktion zeichnen. Wählen Sie auf beiden Achsen 1E = 6 Häuschen.

4P d) Ermitteln Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$

4. Wachstum von Bakterien 20 Punkte

Eine Bakterienkultur wird am 1. Februar um 08:00 mit 1500 Bakterien angesetzt. Die Bakterien vermehren sich exponentiell gemäss der Funktion $f(t) = a \cdot b^t$.
Die Verdoppelungszeit betrage 30 Stunden. Setzen Sie t = 0h zu Beginn des Experimentes.

6P a) Bestimmen Sie die Parameter a und b. Nehmen Sie den Parameter b auf drei Kommastellen genau. Ermitteln Sie nun für den 2. Februar um 14:00 die prozentuale Abweichung vom theoretischen Wert, die Sie erhalten, wenn Sie mit dem auf 3 Stellen gerundeten b rechnen.

Wenn Sie die Parameter a und b nicht bestimmen konnten, nehmen Sie a = 1200 und b = 1.032 (beachten Sie aber, dass in diesem Fall die Verdoppelungszeit nicht mehr 30 Stunden beträgt).

4P b) Wie viele Bakterien hat es am 2. Februar um 01:00? Wann hat sich die Anfangszahl verdreifacht?

3P c) Am 4. Februar um 08:00 wird das Experiment abgebrochen. Begründen Sie mit Worten und ohne genaue Rechnung, ob sich die Bakterienzahl bis am Schluss etwa verfünffacht oder verneunfacht hat.

7P d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den ersten10 Stunden und in den letzten 10 Stunden des Experimentes. Lassen Sie anschliessend das Zeitintervall gegen 0 streben und ermitteln Sie die momentane Änderungsrate als Funktion der Zeit. Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Formel die momentane Änderungsrate 1 Stunde nach Beginn sowie 1 Stunde vor Ablauf des Experimentes.

5. Würfeln 15 Punkte

Sie machen mit einem Kollegen folgendes Glücksspiel: Für 1 Franken würfeln Sie einmal mit zwei Oktaedern (8-Flächner), auf welchen die Ziffern 0,1,2,3,4,5 sowie ☺ und ☻ stehen. Sie machen ab:

- wenn Sie zwei ☺ würfeln, erhalten Sie neben Ihrem Franken noch 12 zusätzliche Franken;
- wenn Sie einen ☺ und eine Zahl würfeln, erhalten Sie den Franken zurück und zusätzlich noch das Doppelte in Franken der Zahl auf dem andern „Würfel";
- wenn Sie zwei gleiche Zahlen oder zwei verschiedene Smiley würfeln, erhalten Sie ihren Franken zurück;
- wenn Sie ein ☻ und eine Zahl würfeln, zahlen Sie zusätzlich noch einen Zweifränkler;
- wenn Sie zwei ☻ würfeln, zahlen Sie zusätzlich noch einen Fünflieber.
- in allen anderen Fällen verlieren Sie den eingesetzten Franken.

Die Zufallsvariable X gebe Ihren Gewinn bzw. Verlust an.

6P a) Erstellen Sie die Tabelle für X und P(X).

6P b) Wie gross ist für Sie die Wahrscheinlichkeit bei diesem Spiel zu gewinnen? Wie oft müssen Sie spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 80% mindestens einmal zu gewinnen?

3P c) Ist dieses Spiel fair? Wenn ja, warum; wenn nein, wie müssten Sie die Spielregeln ändern, damit es fair wird?