

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2007

Fach: Mathematik

Lehrer: Prof. J. Züger

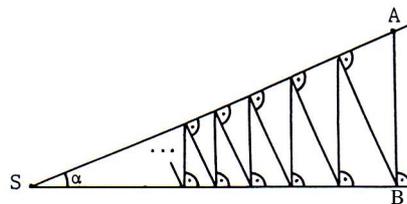
Als Hilfsmittel sind ein nicht grafikfähiger Taschenrechner und die Formelsammlung erlaubt.
Die Bearbeitungszeit beträgt 4 Stunden.
Die Ausrechnungen sind vollständig zu dokumentieren.
Die Aufgaben sind, sofern nichts anderes vermerkt ist, exakt zu lösen!
Beginne jede Aufgabe auf einem neuen Blatt!

Viel Erfolg!

1) Gegeben sind in nebenstehendem Bild die Strecke

$\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ und $\alpha < 90^\circ$.

- Berechne die Gesamtlänge aller Lote für $\alpha = 60^\circ$!
- Bestimme α so, dass die Gesamtlänge $l = 80 \text{ cm}$ wird! Gib die Lösung in $^\circ$ auf zwei Stellen nach dem Komma an!



- Beweise: Die Zahlenfolge $a_n = \int_n^{n+1} e^x dx$ ist eine geometrische Folge!

- Bestimme den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{3n}{n+4}$. Wie viele Glieder der Folge sind weiter als $\varepsilon = 0.01$ vom Grenzwert entfernt?

10 Punkte

2) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{p \cdot x - 20}{x^2 - 4}$ mit dem reellen Parameter p .

- Bestimme p so, dass einer der Extrempunkte die x -Koordinate 1 hat.

Falls Dir a) nicht gelungen ist, so arbeite mit $p = 6$ weiter!

- Führe mit dem ermittelten p eine teilweise Kurvendiskussion durch: Bestimme die Nullstellen, die Extrempunkte und die Asymptoten. Stelle den Graphen in einem Koordinatensystem mit der Einheit 2 Häuschen dar.
- Der Graph, die x -Achse und die Vertikale $x = 10$ umschliessen eine Fläche. Bestimme ihren Inhalt.
- Der Graph und die Horizontale $y = 5$ umschliessen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt!

15 Punkte

- 3) Gegeben sind die beiden Parabeln $p_1 : y = \frac{x^2}{a} - a$ und $p_2 : y = x^2 - a^2$ mit

dem positiven Parameter a .

- Zeichne die Situation für $a = 3$, indem du die Nullstellen und die Extrempunkte bestimmst.
- Wie gross ist für $a = 3$ der Schnittwinkel der beiden Parabeln (in $^\circ$ auf zwei Stellen nach dem Komma)?
- Bestimme für $a = 3$ den Inhalt des Flächenstücks, das von den beiden Kurven umschlossen wird.
- Bestimme den Inhalt des umschlossenen Flächenstücks allgemein für den Parameterwert a . (Achtung: Grenzen auch allgemein bestimmen!)
- Für welchen Parameterwert a zwischen 0 und 1 wird der umschlossene Flächeninhalt maximal?

13 Punkte

- 4) Drei voneinander unabhängige Aufgaben:

- Berechne den Inhalt der Fläche, die (im Endlichen) von den beiden Kurven $y = e^x$ und $y = x^2 \cdot e^x$ umschlossen wird.
- Für welche Punkte auf der Kurve $y = 2x^{-2}$ ist der Abstand zum Ursprung minimal?
- Das von der Kurve $y = 3x \cdot (x^3 - 1)^4$ und der x -Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

13 Punkte

- 5) Beim Tennis werden mehrere *games* gespielt (Dass es dabei auch noch um *sets* und *matches* geht, betrachten wir hier nicht). Dabei servieren die beiden Spieler abwechselnd (servieren = aufschlagen, den Ball ins Spiel bringen), d.h. das erste *game* serviert Spieler 1, das zweite serviert Spieler 2, das dritte wieder Spieler 1 etc.

Rafaele Pluma gewinnt gegen Roger Noël ein *game* bei dem er selbst serviert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ und ein solches bei dem Noël serviert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Im ersten *game* serviert Pluma.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den ersten vier *games* Pluma genau eines verliert?
- Bei den ersten vier *games* hat Pluma genau eines verloren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschah dies bei eigenem Service?
- Pluma und Noël spielen so lange, bis Pluma ein *game* verliert, dann hören sie auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit geschieht dies bei einem Spiel in dem Pluma serviert?

Die Lösung folgender Aufgabe kann in Dezimalzahlen angegeben werden. Das Resultat ist zu runden!

- Noël behauptet, dass über 80% seiner ersten Aufschläge gelingen. Tatsächlich sind von seinen 30 ersten Aufschlägen 28 gelungen. Entscheide, ob dies signifikant für seine Behauptung spricht!
 - Formuliere die Nullhypothese und die Alternativhypothese. Lege eine Testgrösse und den sich daraus ergebenden Verwerfungsbereich fest.
 - Auf welchem Niveau kann die Behauptung von Noël bestätigt werden?

9 Punkte