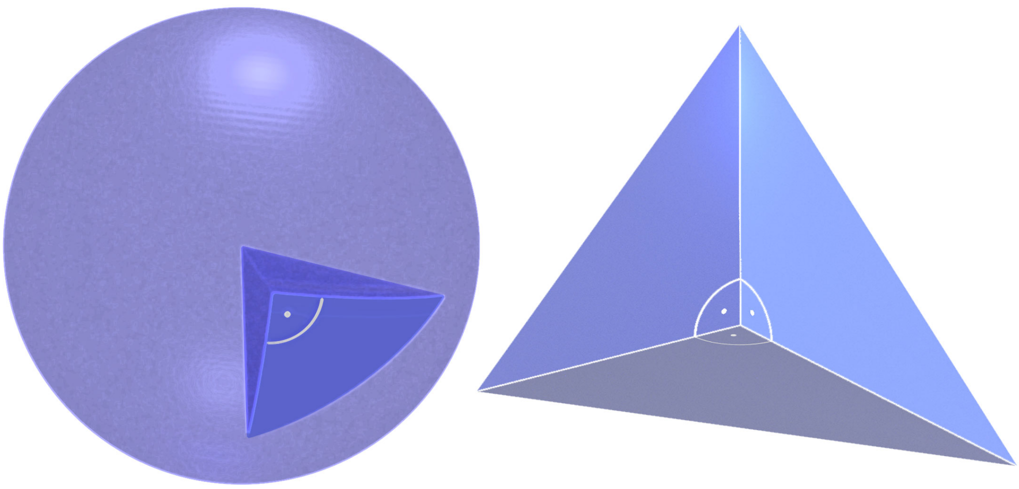
Maturaarbeit

Verallgemeinerungen des Satzes von Phytagoras



Quirin Reding, 6d

23. September 2015

Betreuung: Franz Meier
Fachschaft Mathematik

Abstract. Die vorliegende Maturaarbeit versucht folgende Fragestellung zu beantworten: «Inwiefern lassen sich der Satz des Pythagoras und ihm naheliegende Sätze auf das Dreidimensionale, sowie auf die Kugeloberfläche verallgemeinern?»

Hierfür ist es notwendig, sich auf einige Sätze und Themengebiete einzugrenzen. Betrachtet werden deshalb der Satz des Pythagoras, die Umkehrung des Satzes von Pythagoras, der Cosinussatz, der Höhen- sowie der Kathetensatz und die sogenannten babylonischen Formeln. Bei letzteren handelt es sich in der Planimetrie um drei Gleichungen, mithilfe deren man mit zwei natürlichen Zahlen m und n, wobei $m > n$ vorausgesetzt wird, beliebig viele pythagoreische Zahlentripel bilden kann. Diese Zahlentripel enthalten nur natürliche Komponenten und erfüllen die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$.

Bezüglich der Verallgemeinerungen im Raum werden für den Satz des Pythagoras, den Cosinussatz, die babylonische Formeln, sowie für drei Lemmata im Gebiet der babylonischen Formeln entsprechende Aussagen bewiesen. Hingegen wird die Verallgemeinerung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras in Tetraedern mittels eines Gegenbeispiels widerlegt. Für den Höhen- und für den Kathetensatz, bleiben beweisbare Aussagen für den Raum leider aus.

Bezüglich dem sphärischen Dreieck lassen sich für den Satz des Pythagoras, die Umkehrung davon, den Cosinussatz, sowie für den Höhen- und den Kathetensatz entsprechende Sätze formulieren und beweisen. Zudem werden für die genannten Sätze auch sehr kleine sphärische Dreiecke betrachtet, um approximativ die Gleichungen der Planimetrie zu erhalten. In allen Fällen ist dies erfolgreich. Das Gebiet der babylonischen Formeln erwies sich als einziges schwerwiegendes Problem. Wohingegen aber alle möglichen pythagoreischen Zahlentripel erfasst werden.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Ein passendes Thema für meine Maturaarbeit zu finden war nicht gerade leicht, zumal ich dies auch erwartet habe. Nach einiger Zeit intensiver Überlegungen entschied ich mich für eine mathematische Aufgabe. Für meine Wahl sprachen folgende Gründe: Zum einen interessiere ich mich schon seit Jahren für Mathematik und zum anderen sagte mir eine theoretische Arbeit mehr zu als eine experimentelle.

Mit dieser Begrenzung auf ein Fachgebiet war die Themenwahl jedoch noch lange nicht erledigt. Auf meiner weiteren Suche notierte ich mir etwa beispielsweise Pythagoras, dem diese Arbeit gewidmet sein sollte. Der Satz des Pythagoras an sich, sowie dessen Satzgruppe, interessierten mich schon einige Jahre zuvor. Dies mag wohl an der Einfachheit und der doch sehr grossen Aussagekraft und Anwendbarkeit liegen. Einige Zeit später erhielt ich von meinem Betreuer Kopien von einigen Seiten des Buches [Von Fall zu Fall Schneebeli, 1991], in denen die Thematik der Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ins Dreidimensionale angesprochen wird. Neben einer Handvoll anregender Fragestellungen bzw. Aufgaben sind jedoch nur einige Ideen und Definitionsvorschläge enthalten.

Die Idee der Verallgemeinerung hat mich so fasziniert, dass sie Gegenstand dieser Maturaarbeit wurde. Dabei konnte ich aus den vorgeschlagenen Definitionen einen Grossteil meiner Untersuchungen erarbeiten. Im Laufe meiner Beschäftigung zeigte sich die Möglichkeit die Idee der Verallgemeinerung auch auf ganz andere Dreiecke anzuwenden. Glücklicherweise konnte ich den so gefassten Ansatz bezüglich sphärischen Dreiecken weiterverfolgen und ihn als zweiten Teil meiner Arbeit zu Papier bringen.

Ganz alleine hätte ich diese Maturaarbeit unmöglich so zustandegebracht. Deshalb möchte ich hier meinen herzlichsten Dank an folgende Personen aussprechen, welche mich tatkräftig bei meinem Vorhaben unterstützt haben.

So ist dies als erstes mein Mathematiklehrer Herr Franz Meier, der mir bei Themenwahl und Umsetzung der ganzen Maturaarbeit beistand und so dieses Vorhaben überhaupt möglich machte. Weiter danke ich meinen Eltern Aurelia und Anton Reding sowie meinem Bruder Felix für das Gegenlesen und die hilfreichen Hinweise zur Verbesserung meiner hauptsächlich zu Hause geschriebenen Arbeit.

2. Einleitung

Um zu verallgemeinern brauchen wir erst einmal etwas verallgemeinerbares. Hierfür betrachten wir die Planimetrie, also die Geometrie in der Ebene. Da dies aber ein immens grosses Themengebiet darstellt, schränken wir uns hier auf das folgende ein. Die Aufgabe soll darin bestehen, den Satz des Pythagoras, die Umkehrung dieses Satzes, den Cosinussatz, sowie den Höhen- und Kathetensatz zu verallgemeinern. Zudem sollen auch die babylonischen Formeln, sowie zwei Sätze aus dem Buch [Hoehn u. Huber, 2005] verallgemeinert werden.

Bei den babylonischen Formeln handelt es sich um drei Gleichungen, mithilfe deren man pythagoreische Zahlentripel (a, b, c) finden kann. Pythagoreisch heisst hier, dass a, b und c natürliche Zahlen sind und $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Die Verallgemeinerung an sich muss aber zwingendermassen auch eingeschränkt werden. So sind die genannten Sätze samt Definitionen auf den Raum und auf die Kugeloberfläche zu verallgemeinern.

In einem ersten Teil betrachten wir die Verallgemeinerungen im Raum. Dies geschieht mittels Tetraedern. Im Kapitel 3.1.1 auf Seite 4 wird der Satz des Pythagoras verallgemeinert. Damit wird der Grundstein für die darauffolgenden auf den Raum bezogenen Kapitel gelegt. Im Gegensatz dazu lässt sich die Umkehrung des Satzes von Pythagoras im darauffolgenden Kapitel mithilfe eines Gegenbeispieles widerlegen.

Der Cosinussatz wies die ersten grösseren Schwierigkeiten auf. In der Planimetrie verwendet er einen Winkel. Um diesen zu verallgemeinern gibt es aber mehrere Möglichkeiten. Es bietet sich zum Beispiel an, in der verallgemeinerten Form den entsprechenden Raumwinkel zu betrachten. Dies erweist sich allerdings nicht als sonderlich hilfreich. Es liess sich aber, wie in Kapitel 3.1.3 auf Seite 7 festgehalten ein vektorieller Beweis mit Kantenwinkeln durchführen.

Der Höhen- sowie der Kathetensatz konnten leider nicht verallgemeinert werden. Das Vorhaben scheiterte an einer geeigneten Definition der Höhe im Tetraeder.

Im Kapitel 3.1.5 auf Seite 9 finden sich zum Gebiet der babylonischen Formeln diese selbst, sowie drei Lemmata in verallgemeinerter Form. Für den ersten Satz werden Beobachtungen aufgestellt, welche zum Teil aber nachfolgend widerlegt werden. Da der zweite Satz den ersten Satz bedingt, ist es unter diesen Voraussetzungen leider unmöglich ihn zu verallgemeinern.

Der zweite Teil dieser Arbeit befasst sich mit den Verallgemeinerungen auf das sphärische Dreieck. Um Aussagen auf der Kugeloberfläche zu beweisen ist es sehr hilfreich zuerst den Seitencosinussatz zu beweisen. Er entspricht der Verallgemeinerung des Cosinussatzes. Im Kapitel 3.2.2 auf Seite 15 ist es dann möglich den Satz des Pythagoras zu verallgemeinern.

In der sphärischen Geometrie gibt es einige interessante Beobachtungen, die man macht, wenn man sich mit ihr befasst. So können zum Beispiel alle Strecken als Winkel aufgefasst werden. Zudem ist es auch möglich die Ebene als Kugel mit unendlich grossem Radius zu verstehen. Bei allen Verallgemeinerungen habe ich deshalb versucht für diesen

Spezialfall approximativ die Sätze aus der Planimetrie zu erhalten, was in allen Fällen funktionierte.

Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras lässt sich im Gegensatz zur Verallgemeinerung im Raum ohne weiteres beweisen. Dies gilt auch für Höhen- und Kathetensatz, wobei hier der Beweis ein wenig länger wird.

Bezüglich den babylonischen Formeln lässt sich aber im Vergleich zum Ansatz mit Tetraedern kläglich wenig aussagen. Im Bogenmass entfallen hier jegliche pytagoräischen Zahlentripel. Im Gradmass lassen sich aber die endlich vielen pythagoreischen Zahlentripel erfassen.

3. Untersuchungen

3.1. Tetraeder

Um den Satz des Pythagoras und ihm naheliegende Sätze auf das Dreidimensionale zu verallgemeinern, bietet sich der nachfolgende Ansatz zu Tetraedern an, welcher auch in [Schneebeli, 1991, S.53ff.] zu finden ist.

Um sich mit den folgenden Abschnitten seriös befassen zu können, ist es unerlässlich den gleichen Begriff von einem Tetraeder zu haben. Ein Tetraeder bezeichne deshalb in dieser Arbeit einen durch vier Punkte im Raum bestimmten Körper. Das Tetraeder ist der durch die vier Dreiecke, welche die vier Punkte aufspannen, begrenzte Körper.

3.1.1. Satz des Pythagoras

Um den Satz des Pythagoras auf ein Tetraeder zu verallgemeinern, müssen Begrifflichkeiten wie Kathete, Hypotenuse und Rechtwinklichkeit bezüglich Tetraedern neu und eindeutig definiert werden. Folgende Definitionen sind möglich und von mir als sinnvoll erachtet.[1]

rechtwinkliges Tetraeder bezeichnet ein Tetraeder, bei welchem in einem Eckpunkt die Seiten jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. An dieser Ecke soll der rechte Winkel des Tetraeders liegen.

Kathetenfläche bezeichnet eines der ein rechtwinkliges Tetraeder begrenzenden Dreiecke. Es handelt sich dabei um ein am rechten Winkel liegendes Dreieck. In einem solchen Tetraeder gibt es immer genau drei Kathetenflächen, welche dementsprechend rechtwinklige Dreiecke sind.

Hypotenusenfläche bezeichnet das das rechtwinklige Tetraeder begrenzende Dreieck, welches keine Kathetenfläche ist und somit nur spitze Winkel[2] besitzt.

Es soll nun für eine sinnvolle Verallgemeinerung einen Zusammenhang zwischen den Katheten- und Hypotenusenflächen geben, der an den Satz des Pythagoras aus der Planimetrie erinnert. Die Definitionen sind so gewählt, dass es naheliegt folgende Hypothese zu beweisen:

«Die Summe der Quadrate der Flächeninhalte der Kathetenflächen ist dem Quadrat des Flächeninhaltes der Hypotenusenfläche gleich.»

Seien A, B, C und D vier Punkte, sodass diese ein rechtwinkliges Tetraeder bilden, bei dem der Punkt D der Hypotenusenfläche $\mathscr{D}$ gegenüberliegt. Die Dreiecke BCD, ACD und ABD erhalten die Namen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$. a, b und c bezeichnen dabei die paarweise senkrechten Seiten wie in Abbildung 1 auf der nächsten Seite dargestellt.

[1] Vgl. auch [Schneebeli, 1991, S.53]

[2] folgt aus der rechtwinkligen Eigenschaft des Tetraeders

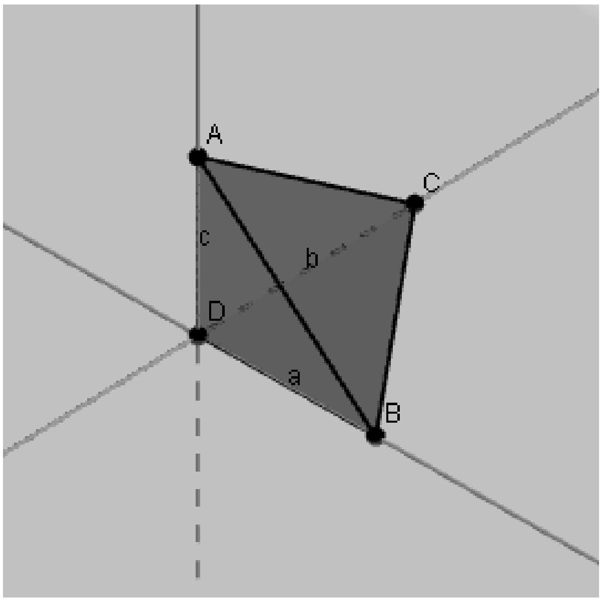


Abbildung 1: rechtwinkliges Tetraeder

Für die Kathetenflächen gilt also:

$$\mathscr{A} = \frac{a * b}{2}$$

$$\mathscr{B} = \frac{b * c}{2}$$

$$\mathscr{C} = \frac{a * c}{2}$$

Mithilfe des Vektorproduktes lässt sich auch die Hypotenusenfläche berechnen:

$$\mathscr{D} = \frac{\mid \vec{BC} \times \vec{BA} \mid}{2} = \frac{\sqrt{a^2 * b^2 + b^2 * c^2 + a^2 * c^2}}{2}$$

Wenn wir jetzt die Quadrate bilden erhalten wir folgende immer gültige Gleichung:

$$\mathscr{A}^2 + \mathscr{B}^2 + \mathscr{C}^2 = \frac{a^2 * b^2 + b^2 * c^2 + a^2 * c^2}{4} = \mathscr{D}^2$$

Somit haben wir die obige Hypothese bewiesen und eine mögliche gültige Verallgemeinerung gefunden. □

Tetraeder, die diese Gleichung erfüllen werde ich in dieser Arbeit pythagoreische Tetraeder nennen. Dies ist angelehnt an den Begriff der pythagoreischen Dreiecke. Dieser Begriff wird insbesondere im nächsten Kapitel von Bedeutung sein.

pythagoreisches Tetraeder bezeichnet ein Tetraeder, bei dem die Summe der Quadrate der Flächeninhalte dreier Seitenflächen dem Quadrat des Flächeninhaltes der vierten Seitenfläche gleich ist.

3.1.2. Umkehrung des Satzes

In der Ebene gilt die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.[3] Dementsprechend ist ein Dreieck rechtwinklig, wenn für die drei Seiten a, b und c gilt: $a^2+b^2=c^2$ Die Seite c liegt dann dem rechten Winkel gegenüber. Für die Verallgemeinerung bezüglich Tetraedern müsste nun gelten: «Alle pythagoreischen Tetraeder sind rechtwinklige Tetraeder».

Dies gilt aber nicht. Um das mit einem Gegenbeispiel zu beweisen, seien $A(2,2,3)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ und $D(0,0,0)$ vier Punkte im Raum. Diese bilden, wie man einfach sieht, ein nicht rechtwinkliges Tetraeder, wie in Abbildung 2 dargestellt.

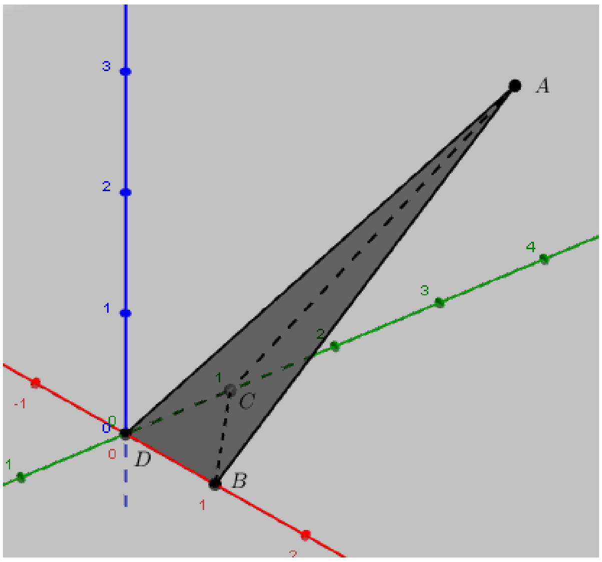


Abbildung 2: nicht rechtwinkliges, aber pythagoreisches Tetraeder

Die Flächeninhalte der vier Seitenflächen lassen sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2}\\
\mathscr{B} &= \frac{1}{2} * \left| \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\\2\\3 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}\\
\mathscr{C} &= \frac{1}{2} * \left| \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\\2\\3 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}\\
\mathscr{D} &= \frac{1}{2} * \left| \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\\1\\3 \end{pmatrix} \right| = \frac{3*\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

[3]Beweis siehe A.2 auf Seite 25

Quadrieren aller und Addieren der ersten drei Werte ergibt schliesslich:

$$\mathscr{A}^2 + \mathscr{B}^2 + \mathscr{C}^2 = \frac{13 + 13 + 1}{4} = \frac{27}{4} = \mathscr{D}^2$$

Somit haben wir ein nicht rechtwinkliges, aber pythagoreisches Tetraeder gefunden. Damit ist gezeigt, dass die Umkehrung dieser Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras nicht gültig ist. □

An dieser Stelle ergibt sich die Fragestellung, wie die pythagoreischen Tetraeder charakterisiert werden können, da sie, wie oben gezeigt, nicht rechtwinklig zu sein haben. Um dies zu untersuchen, bietet sich folgender Ansatz an: Die Punkte A, B und C eines rechtwinkligen Tetraeders werden festgehalten und für den Punkt D bestimmt man den geometrischen Ort.

Leider war es mir aber nicht möglich diesen Ort qualitativ oder einfach in Worten zu beschreiben. Mithilfe der Ausgangsgleichung $\mathscr{A}^2 + \mathscr{B}^2 + \mathscr{C}^2 = \mathscr{D}^2$ und den Punkten $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ sowie $D(x, y, z)$ konnte ich aber eine Gleichung in a, b, c, x, y und z aufstellen. Die Werte a, b und c sind in diesem Zusammenhang Parameter, für welche sich beliebige Werte ($\neq 0$) einsetzen lassen. Wenn $x = y = z = 0$ gilt ist das Tetraeder ein rechtwinkliges. Die gefundene Gleichung erinnerte mich an eine Gleichung eines Ellipsoides. Mir war es aber nicht möglich sie in eine Form zu bringen, mit der dies gezeigt wäre. Gemäss [Schneebeli, 1991, S.58] ist die beschriebene Fläche aber effektiv ein Ellipsoid.

3.1.3. Cosinussatz

Den Cosinussatz und somit ein allgemeinerer Satz als der von Pythagoras bereitete mehr Schwierigkeiten. Im Gegensatz zum Satz von Pythagoras ist nun auch ein Winkel gefragt. Da ich beim Schritt vom Dreieck zum Tetraeder Seiten zu Seitenflächen werden liess, versuchte ich in einem ersten Anlauf Raumwinkel zu verwenden. Gemäss [Schneebeli, 1991, S. 56] ist ein Raumwinkel «der Flächeninhalt des Kugeldreiecks auf der Einheitskugel über der Spitze des Dreikants, das zu einer Ecke gehört». Leider konnte ich dadurch nichts Nützliches finden.

In einem zweiten Anlauf, den ich ungeachtet der Winkelfrage in Angriff nahm, scheiterte ich an der Verallgemeinerung der Höhe, welche ich für den Beweis des Cosinussatzes zu brauchen glaubte.[4]

Dies stellte sich aber nicht als notwendig heraus. Denn mithilfe eines vektoriellen Beweises für den Cosinussatz[5] konnte ich schliesslich doch eine Verallgemeinerung für Tetraeder finden.

Seien hierfür $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ die auf die Seitenflächen des Tetraeders senkrecht stehenden Vektoren, wobei diese nach aussen gerichtet sein sollen. Ihre Länge soll jeweils dem Flächeninhalt der Seitenfläche entsprechen, zu der sie senkrecht stehen. Dabei sei $\vec{d}$ der

[4]vgl. auch Kapitel 3.1.4 auf der nächsten Seite zu Höhen- und Kathetensatz

[5]siehe A.3 auf Seite 25

zur Hypotenusenfläche senkrechtstehende Vektor. Die zugehörigen Kathetenflächen zu den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$.

Seien weiter α der kleinste Schnittwinkel zwischen $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$, β der kleinste Schnittwinkel zwischen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{C}$, sowie γ der kleinste Schnittwinkel zwischen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Da die obigen Vektoren jeweils senkrecht zu einer Seitenfläche stehen, gelten folgende Gleichungen:[6]

$$\angle\vec{a},\vec{b} = \pi - \gamma$$

$$\angle\vec{a},\vec{c} = \pi - \beta$$

$$\angle\vec{b},\vec{c} = \pi - \alpha$$

Es gilt nun[7]

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \tag{1}$$

Woraus folgt:

$$-\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Das Skalarprodukt von $-\vec{d}$ mit sich selber gebildet ergibt:

$$(-\vec{d}) \cdot (-\vec{d}) = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Ausmultipliziert und zusammengefasst ergibt das:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 * (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c})$$

Dies kann wie folgt umgeformt werden:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 * (a * b * \cos(\pi - \gamma) + a * c * \cos(\pi - \beta) + b * c * \cos(\pi - \alpha))$$

Was äquivalent ist zu:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab\cos\gamma + ac\cos\beta + bc\cos\alpha) \tag{2}$$

Somit ist eine Verallgemeinerung des Cosinussatzes für Tetraeder gefunden, welche sich zyklisch vertauschen lässt und an den Cosinussatz aus der Planimetrie erinnert.[8]

3.1.4. Höhen- und Kathetensatz

Der Höhen- und der Kathetensatz brauchen die Höhe zur Hypotenuse. Dies auf Tetraeder zu verallgemeinern, ist jedoch nicht so einfach. Zum einen muss die Höhe nun eine Fläche sein, damit man eine Gleichung der Form $h^2 = p * q$ aufstellen kann. Ein anderes Problem erweist sich in den Hypotenusenabschnitten p und q. Von diesen muss es nun drei geben, damit es entsprechende Gleichungen für die drei Kathetenflächen geben kann. Eine Höhenfläche zu definieren, welche die Hypotenusenfläche in drei Flächen aufteilt, ist aber unvorstellbar. Aus diesen Gründen und vielen gescheiterten Versuchen muss ich dieses Kapitel leider bei dieser Kürze belassen.

[6] Erläuterungen in A.4 auf Seite 25

[7] Beweis siehe A.5 auf Seite 26

[8] Gleichung 2 findet sich auch bei [Schneebeli, 1991, S.59], jedoch ohne Herleitung

3.1.5. Babylonische Formeln

Mithilfe der sogenannten babylonischen Formeln lassen sich aus zwei natürlichen Zahlen m und n natürliche Zahlen a, b und c bilden, für welche $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Es handelt sich dabei um folgende Gleichungen

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2 * m * n$$

$$c = m^2 + n^2$$

mit den Bedingungen $m, n \in \mathbb{N}$ und $m > n$.[9] Beispielsweise erhält man für die Werte $m = 2$ und $n = 1$ das Tripel $(3, 4, 5)$. Diese Tripel nennt man **pythagoreische Zahlentripel (PZT)**, da alle Komponenten natürliche Zahlen sind und die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist.

Ein pythagoreisches Zahlentripel (a, b, c) nennt man **primitiv**, wenn a, b und c teilerfremd sind. Mit den babylonischen Formeln kann man jedoch nicht alle pythagoreischen Zahlentripel bilden. Es gelten aber folgende Sätze:[10]

Lemma 1 Somit ist ein pythagoreisches Zahlentripel (a, b, c) genau dann primitiv, wenn irgend zwei seiner Komponenten teilerfremd sind.[11]

Lemma 2 Ist (a, b, c) ein beliebiges primitives PZT, so ist c ungerade, und a und b haben verschiedene Parität.[12] [13]

Satz 1 Gegeben sind die natürlichen Zahlen m und n, wobei $m > n$ vorausgesetzt wird. Sind die Zahlen m und n teilerfremd und haben sie verschiedene Parität, so ist das pythagoreische Zahlentripel $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ primitiv.[14]

Satz 2 Zu jedem primitiven pythagoreischen Zahlentripel (a, b, c) mit ungeradem a gibt es zwei teilerfremde natürliche Zahlen m und n mit $m > n$ und von verschiedener Parität, so dass die babylonischen Formeln erfüllt sind, das heisst: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$
Zudem ist das Paar (m, n) durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt.[15]

---

[9] Beweis siehe A.6.1 auf Seite 27
[10] Aus [Hoehn u. Huber, 2005, S. 39]
[11] Beweis siehe A.6.2 auf Seite 27
[12] Zwei Zahlen haben verschiedene Parität, wenn eine von ihnen gerade und die andere ungerade ist.
[13] Beweis siehe A.6.3 auf Seite 28
[14] Beweis siehe A.6.4 auf Seite 28
[15] Beweis siehe A.6.5 auf Seite 28

Eine mögliche Verallgemeinerung der obigen babylonischen Formeln fand ich in diesen Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= m^2 + n^2 - p^2 \\ b &= 2mp \\ c &= 2np \\ d &= m^2 + n^2 + p^2 \end{aligned}$$

Mit m, n und $p \in \mathbb{N}$ und $m^2 + n^2 > p^2$. Um die Richtigkeit zu beweisen bilden wir zuerst die Quadrate:

$$\begin{aligned} a^2 &= m^4 + n^4 + p^4 + 2m^2n^2 - 2n^2p^2 - 2m^2p^2 \\ b^2 &= 4m^2p^2 \\ c^2 &= 4n^2p^2 \\ d^2 &= m^4 + n^4 + p^4 + 2m^2n^2 + 2n^2p^2 + 2m^2p^2 \end{aligned}$$

Und es gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Womit die Gleichungen ihren Zweck erfüllen. □

Als nächstes werden wir uns ein wenig genauer mit primitiven[16] pythagoreischen Zahlenquadrupeln (PZQ) (a, b, c, d) auseinandersetzen. Vorerst heisst es, eine Aussage ähnlich obigem Lemma 1, zu beweisen. Angesichts der Beweisführung[17] liegt folgende Behauptung nahe:

Lemma 3 Ein pythagoreisches Zahlenquadrupel (a, b, c, d) ist genau dann primitiv, wenn irgend drei seiner Komponenten teilerfremd sind.

Unter der Annahme, dass drei der Komponenten teilerfremd sind, gilt auch, dass alle vier Komponenten teilerfremd sind. Haben drei Komponenten hingegen einen gemeinsamen Teiler $t \neq 1$, und seien dies beispielsweise a, b und d so gilt gemäss $c^2 = d^2 - a^2 - b^2$, dass t auch c^2 teilt. Somit gibt es auch einen Primteiler r, der c teilt. Womit klar ist, dass in diesem Fall alle Komponenten einen gemeinsamen Teiler besitzen. □

Für eine Aussage bezüglich Lemma 2 bietet sich die folgende an:

Lemma 4 Ist (a, b, c, d) ein primitives PZQ, so ist d ungerade und genau zwei der übrigen Komponenten sind gerade.

Für den Beweis verwenden wir Lemma 3, nach dem das primitive PZQ höchstens zwei gerade Komponenten enthält. Nun wollen wir annehmen, dass a, b und c ungerade sind. Folglich gibt es natürliche Zahlen k, l und m, sodass

$$\begin{aligned} a &= 2k - 1 \\ b &= 2l - 1 \\ c &= 2m - 1 \end{aligned}$$

[16]analog zu den PZT müssen alle Komponenten teilerfremd sein

[17]siehe A.6.2 auf Seite 27

Da es sich um ein pythagoreisches Zahlenquadrupel handelt dürfen wir folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (2k-1)^2 + (2l-1)^2 + (2m-1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 + 4l^2 - 4l + 1 + 4m^2 - 4m + 1 \\ &= 4k^2 + 4l^2 + 4m^2 - 4k - 4l - 4m + 3 \end{aligned}$$

Folglich ist d^2, wie auch d ungerade. Somit sind $d^2 - 1$, $d - 1$ und $d + 1$ gerade. Es gilt weiter:

$$\begin{aligned} d^2 - 1 &= 4k^2 + 4l^2 + 4m^2 - 4k - 4l - 4m + 2 \\ (d-1)(d+1) &= 4k^2 + 4l^2 + 4m^2 - 4k - 4l - 4m + 2 \end{aligned}$$

Da aber das Produkt zweier gerader Zahlen immer eine durch 4 teilbare Zahl ergibt, kann $d^2 - 1$ und folglich auch d^2, sowie d keine ganze Zahl sein. Somit ist die Annahme, dass a, b und c ungerade seien, falsch.

Nehmen wir also an, zwei dieser Zahlen seien ungerade, und eine sei gerade. In diesem Beispiel sei c gerade. Folglich gibt es natürliche Zahlen k, l und m, sodass

$$\begin{aligned} a &= 2k - 1 \\ b &= 2l - 1 \\ c &= 2m \end{aligned}$$

Es lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (2k-1)^2 + (2l-1)^2 + (2m)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 + 4l^2 - 4l + 1 + 4m^2 \\ &= 4k^2 + 4l^2 + 4m^2 - 4k - 4l + 2 \end{aligned}$$

d^2 muss also gerade sein, jedoch ist d^2 nicht durch 4 teilbar, also kann d keine ganze Zahl sein. Was die Annahme, dass genau eine der Komponenten a, b und c gerade sei, widerlegt. Es bleibt nun nur noch die Möglichkeit, dass genau zwei der Komponenten a, b und c gerade sind, sowie dass d ungerade ist. $\square$

An dieser Stelle möchte ich noch ein weiteres Lemma einfügen, welches für pythagoreische Zahlentripel in der Literatur[18] zwar bewiesen, jedoch nicht als Lemma formuliert wurde.

Lemma 5 Ist (a, b, c, d) ein primitives PZQ, welches mit den obigen babylonischen Formeln gebildet wurde, so sind die Zahlen m, n und p teilerfremd.

[18] [Hoehn u. Huber, 2005, S.37]

Wir beweisen die Kontraposition und nehmen an, m, n und p haben einen gemeinsamen Teiler $t \neq 1$. Wegen den babylonischen Formeln für PZQ

$$\begin{aligned} a &= m^2 + n^2 - p^2 \\ b &= 2mp \\ c &= 2np \\ d &= m^2 + n^2 + p^2 \end{aligned}$$

teilt dann t auch a, b, c und d, was bedeutet, dass das PZQ (a, b, c, d) nicht primitiv ist. Somit ist Lemma 5 bewiesen. □

Um eine Varallgemeinerung des Satzes 1 zu finden, notierte ich mir vorerst eine Menge Beispiele. Diese untersuchte ich dann auf eine Gesetzmässigkeit, wie sie der Satz 1 bei pythagoreischen Zahlentripeln beschreibt. Für die untersuchten Werte für m, n und p, sowie die daraus resultierenden Zahlenquadrupel (a, b, c, d) galten die folgenden Beobachtungen.

- Sind m, n und p ungerade, teilerfremde, natürliche Zahlen mit $m^2 + n^2 > p^2$, so ist $(m^2 + n^2 - p^2, 2mp, 2np, m^2 + n^2 + p^2)$ ein primitives pythagoreisches Zahlenquadrupel.

- Sind m, n und p teilerfremde, natürliche Zahlen mit $m^2 + n^2 > p^2$, wobei genau eine der drei ungerade ist, so ist $(m^2+n^2-p^2, 2mp, 2np, m^2+n^2+p^2)$ ein primitives pythagoreisches Zahlenquadrupel.

Entsprechend dem Satz 1 aus der Literatur formulierte ich für die erste Beobachtung die Kontraposition: Hierfür sei $(m^2+n^2-p^2, 2mp, 2np, m^2+n^2+p^2)$ ein nicht primitives pythagoreisches Zahlenquadrupel. Es gilt nun zu zeigen, dass mindestens eine der Zahlen m, n und p gerade ist oder dass diese nicht teilerfremd sind.

Sei also $t \neq 1$ der grösste gemeinsame Teiler der Komponenten des PZQs. Falls t gerade ist so ist die Komponente $m^2 + n^2 + p^2$ zwingendermassen auch gerade. Folglich können nicht alle drei Summanden ungerade sein. Zudem ist dann auch mindestens eine der Zahlen m, n und p gerade, wie zu zeigen ist.

Ähnlich verhält es sich bei der zweiten Beobachtung: Es sei wiederum $(m^2 + n^2 - p^2, 2mp, 2np, m^2+n^2+p^2)$ ein nicht primitives pythagoreisches Zahlenquadrupel. Es gilt nun zu zeigen, dass nicht genau eine der Zahlen m, n und p ungerade ist oder dass diese nicht teilerfremd sind.

Sei also $t \neq 1$ der grösste gemeinsame Teiler der Komponenten des PZQs. Falls t gerade ist so ist die Komponente $m^2 + n^2 + p^2$ zwingendermassen auch gerade. Folglich sind alle oder genau eine der Zahlen m, n und p gerade. Es kann also nicht genau eine ungerade sein, wie zu zeigen ist.

Es ist aber unerlässlich, dass die Beobachtung auch für ein ungerades t stimmt. Dies gelang mir aber leider nicht zu zeigen. Hingegen war es mir möglich für die erste Beobachtung ein Gegenbeispiel zu finden.

Es seien hierfür $m = 13$, $n = 9$ und $p = 5$. Wie man einfach sieht, sind das drei ungerade, natürliche und teilerfremde Zahlen. Das zugehörige pythagoreische Zahlenquadrupel $(m^2+n^2-p^2, 2mp, 2np, m^2+n^2+p^2)$ ist also $(225, 130, 90, 275)$. Der grösste gemeinsame Teiler der Komponenten ist aber 5 und somit offensichtlicherweise $\neq 1$. Folglich handelt es sich nicht um ein primitives pythagoreisches Zahlenquadrupel. Womit die Behauptung widerlegt ist. $\square$

3.2. Sphärik

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit einer anderen Verallgemeinerungsvariante. Es handelt sich dabei um sphärische Dreiecke. Das Ziel ist es, ähnlich wie beim Abschnitt 3.1 auf Seite 4, Sätze im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras bezüglich Dreiecken auf der Kugeloberfläche zu verallgemeinern.

Die sphärischen Dreiecke sind, falls nicht anders vermerkt, auf den Einheitskugel. Alle Winkel sind der Einfachheit halber im Bogenmass angegeben.

3.2.1. Seitencosinussatz

Um sich einer Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf der Kugeloberfläche anzunähern, empfiehlt es sich zuerst den Seitencosinussatz zu beweisen.

Ein sphärisches Dreieck ABC lässt sich auf der Kugeloberfläche so verschieben, dass die Ecke C auf den Punkt $(0, 0, 1)$ zu liegen kommt und dass die Ecke A in der xz-Ebene zu liegen kommt, wie in Abbildung 3 dargestellt.

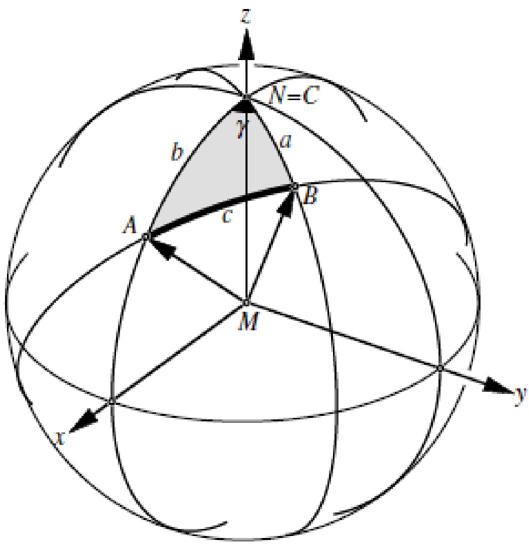


Abbildung 3: sphärisches Dreieck

A hat nun die Koordinaten $(\sin b, 0, \cos b)$. Für den Punkt B lässt sich Koordinate für Koordinate $(\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a)$ finden. Mithilfe des Skalarproduktes lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\cos c = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{MB}}{\overline{MA} * \overline{MB}} = \frac{\begin{pmatrix} \sin b \\ 0 \\ \cos b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin a \cos \gamma \\ \sin a \sin \gamma \\ \cos a \end{pmatrix}}{1 * 1}$$

Ausmultiplizieren gibt den Seitencosinussatz:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \tag{3}$$

Die Ebene kann als Grenzwert einer Kugel mit gegen unendlich gehendem Radius aufgefasst werden. Wenn wir nun den Radius gegen unendlich gehen lassen, gehen die Seiten a, b und c unseres sphärischen Dreiecks gegen 0. Also stellt sich nun die Frage was aus dem Seitencosinussatz wird, wenn wir ganz kleine Werte für die Seiten verwenden.

Gemäss Taylor-Reihe verhalten sich die Sinus- und Cosinusfunktionen für ganz kleine Werte folgendermassen:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Seitencosinussatz (vgl. Gleichung 3) erhalten wir:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx (1 - \frac{a^2}{2})(1 - \frac{b^2}{2}) + a * b * \cos \gamma$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx 1 - \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4} + ab \cos \gamma$$

Der Term vierten Grades kann vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2} &\approx \frac{a^2 + b^2}{2} - ab \cos \gamma \\ c^2 &\approx a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Und wir erhalten den Cosinussatz aus der Planimetrie, der sich noch beliebig zyklisch vertauschen lässt.[19]

3.2.2. Satz des Pythagoras

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras im sphärischen Dreieck lässt sich mit dem Seitencosinussatz herleiten. Hierfür setzen wir $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \frac{\pi}{2} = \cos a \cos b$$

$$\cos c = \cos a \cos b \tag{4}$$

Und schon ist ein sphärischer Pythagoras gefunden.[20] □

[19] Idee aus [Walser, 2015, S.1f.]
[20] Idee aus [Walser, 2015, S.9]

Für die Ebene als Kugel mit sehr grossem Radius erhalten wir approximativ:

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx (1 - \frac{a^2}{2})(1 - \frac{b^2}{2}) = 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2b^2}{4}$$

Was, nachdem wir den Term vierten Grades wegen Vernachlässigbarkeit entfernt haben, dem Satz des Pythagoras aus der Planimetrie entspricht:[21]

$$c^2 \approx a^2 + b^2$$

3.2.3. Umkehrung des Satzes

Es gelte $\cos c = \cos a \cos b$ in einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c. Nach dem Seitencosinussatz gilt:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Aus den Gegebenheiten folgt nun:

$$0 = \sin a \sin b \cos \gamma$$

Da es sich um ein sphärisches Dreieck handelt liegen die Werte für a und b im Intervall $]0, \pi[$ und es folgt daraus $\cos \gamma = 0$, was in diesem Fall nur für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ möglich ist. □

3.2.4. Höhensatz

Für die Verallgemeinerung des Höhensatzes auf die Kugeloberfläche, sei ABC ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b, sowie der Hypotenuse c. H sei der Höhenfusspunkt auf der Seite c. Es sei weiter h die Strecke von H nach C, p die Strecke von A nach H und q die Strecke von B nach H.

Aufgrund des sphärischen Satzes des Pythagoras (vgl. Gleichung 4 auf der vorherigen Seite) gilt:

$$\cos b = \cos p * \cos h$$
$$\cos a = \cos q * \cos h$$

Multiplizieren der beiden Gleichungen ergibt:

$$\cos q * \cos h * \cos p * \cos h = \cos a * \cos b = \cos c = \cos(p + q)$$

Mithilfe des Additionstheorems für die Cosinusfunktion erhalten wir:

$$\cos p * \cos q - \sin p * \sin q = \cos p * \cos q * \cos^2 h$$

Was äquivalent ist zu:

$$\cos^2 h = 1 - \frac{\sin p * \sin q}{\cos p * \cos q}$$

[21] Idee aus [Walser, 2015, S.9f.]

Oder besser:

$$\frac{\sin p * \sin q}{\cos p * \cos q} = 1 - \cos^2 h = \sin^2 h$$

Wenn wir das jetzt noch mithilfe der Tangensfunktion ausdrücken, erhalten wir schliesslich:

$$\tan p * \tan q = \sin^2 h \tag{5}$$

Was der Verallgemeinerung des Höhensatzes im sphärischen Dreieck entspricht. □

Dieser Satz lässt sich wie die vorherigen auch für ganz kleine sphärische Dreiecke betrachten, um so die Ebene anzunähern. Dabei werden p, q und h sehr klein. Gemäss Taylor-Reihe gilt approximativ:

$$\tan x \approx x$$

Woraus folgt:

$$p * q \approx h^2$$

Was auch dem Höhensatz aus der Planimetrie entspricht.

3.2.5. Kathetensatz

Für die Verallgemeinerung des Kathetensatzes verwenden wir das Dreieck ABC aus Kapitel 3.2.4 auf der vorherigen Seite.

Gemäss sphärischem Pythagoras (vgl. Gleichung 4 auf Seite 15) gilt:

$$\cos a = \cos q * \cos h$$

Quadrieren ergibt:

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \cos^2 q * \cos^2 h \\ \cos^2 a &= \cos^2 q * (1 - \sin^2 h) \end{aligned}$$

Unter Verwendung des sphärischen Höhensatzes (vgl. 5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \cos^2 q * (1 - \tan p \tan q) \\ \cos^2 a &= \cos^2 q - \cos^2 q \frac{\sin p \sin q}{\cos p \cos q} \\ \cos^2 a &= \frac{\cos^2 q \cos p - \sin p \sin q \cos q}{\cos p} \\ \cos^2 a &= (\cos p \cos q - \sin p \sin q) \frac{\cos q}{\cos p} \end{aligned}$$

Nach Additionstheorem können wir das wie folgt umformen:

$$\cos^2 a = \cos(p + q) \frac{\cos q}{\cos p}$$

Und wir erhalten folgende Gleichung, welche dem Kathetensatz einigermassen ähnlich sieht:

$$\cos^2 a = \frac{\cos q}{\cos p} \cos c$$

Analog erhält man:

$$\cos^2 b = \frac{\cos p}{\cos q} \cos c$$

Für ganz kleine sphärische Dreiecke lässt sich auch hier approximativ der Kathetensatz aus der Planimetrie herleiten. Dabei gehen alle vorhandenen Strecken gegen 0. Wir haben also gemäss Taylor-Reihe:

$$\begin{aligned}(1 - \frac{a^2}{2}) &\approx (1 - \frac{c^2}{2})\frac{(1 - \frac{q^2}{2})}{(1 - \frac{p^2}{2})} \\ 1 - a^2 + \frac{a^4}{4} &\approx (1 - \frac{c^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{c^2 q^2}{4})\frac{1}{1 - \frac{p^2}{2}}\end{aligned}$$

Die Terme vierten Grades können wiederum vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}1 - a^2 &\approx \frac{2 - c^2 - q^2}{2 - p^2} \\ (1 - a^2)(2 - p^2) &\approx 2 - c^2 - q^2 \\ 2 - 2a^2 - p^2 + a^2p^2 &\approx 2 - c^2 - q^2 \\ 2a^2 &\approx c^2 + q^2 - p^2 + a^2p^2\end{aligned}$$

Die Terme vierten Grades können wiederum vernachlässigt werden und c kann als $p + q$ ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}2a^2 &\approx (p + q)^2 + q^2 - p^2 \\ 2a^2 &\approx 2q^2 + 2pq \\ a^2 &\approx q^2 + pq \\ a^2 &\approx q(p + q) \\ a^2 &\approx c * q\end{aligned}$$

Analog dazu findet man:

$$b^2 \approx c * p$$

Was dem Kathetensatz aus der Planimetrie entspricht.

3.2.6. Babylonische Formeln

Als grösstes Problem beim Finden von Gleichungen im Sinne der babylonischen Formeln stellt sich die Begrenztheit der Grösse eines sphärischen Dreiecks heraus. Die Fläche eines solchen Dreiecks auf der Einheitskugel, bleibt stets kleiner als 2π.

Im Bogenmass machen deshalb pythagoreische Zahlentripel keinen Sinn, da die Zahlen natürlich zu sein bräuchten.

Im Gradmass lässt sich da schon etwas mehr machen, trotzdem bleibt die Ausbeute gering. Als brauchbare Cosinuswerte von natürlichen Gradzahlen, welche ja beim sphärischen Pythagoras gebraucht werden, stellen sich nur die folgenden heraus:

$$\begin{aligned}
\cos(30^\circ) &= \sqrt{3}/2 \\
\cos(45^\circ) &= \sqrt{2}/2 \\
\cos(60^\circ) &= 1/2 \\
\cos(90^\circ) &= 0 \\
\cos(120^\circ) &= -1/2 \\
\cos(135^\circ) &= -\sqrt{2}/2 \\
\cos(150^\circ) &= -\sqrt{3}/2
\end{aligned}$$

Nun gibt es die folgenden möglichen PZT in Grad, wobei die ersten beiden Werte noch ausgetauscht werden können:

$$\begin{gathered}
(45, 45, 60) \\
(45, 135, 120) \\
(135, 135, 60) \\
(n, 90, 90)
\end{gathered}$$

Wobei bei letzterem für n natürliche Zahlen aus dem Intervall $[1, 179]$ eingesetzt werden können.

Jedoch sind das auch schon alle 361 PZT gewesen, was eine Suche nach Formeln wenig interessant macht.

4. Diskussion und Schlussfolgerung

Die Untersuchungen, welche in Kapitel 3 auf Seite 4 präsentiert wurden, haben Verschiedentstes aufgezeigt. So waren gewisse Ansätze ohne weitere Probleme umsetzbar und wiederum andere konnten schlichtwegs nicht umgesetzt werden. Die untersuchten Sätze und Gebiete sind die folgenden: Satz des Pythagoras, Umkehrung des Satzes von Pythagoras, Cosinussatz, Höhensatz, Kathetensatz und die babylonischen Formeln. Zum Kapitel 3.1 auf Seite 4, welches sich mit den Verallgemeinerungen ins Dreidimensionale, genauergesagt bezüglich Tetraedern befasst, können folgende Ergebnisse festgehalten werden:

Für den Satz des Pythagoras, die babylonischen Formeln, sowie drei Lemmata im Gebiet der babylonischen Formeln konnte ich ohne grössere Schwierigkeiten, gemäss dem gewählten Ansatz bezüglich Tetraedern, Verallgemeinerungen finden und beweisen. Im Gebiet der babylonischen Formeln konnte ich zudem Beobachtungen aufstellen, welche an den ersten Satz aus dem Buch [Pythagoras. Erinnern Sie sich? Hoehn u. Huber, 2005] erinnern. Jedoch konnte die erste der beiden Beobachtungen daraufhin widerlegt werden. Während meiner Arbeit in diesem Gebiet meinte ich aber für einen längeren Zeitraum beide Beobachtungen als Sätze, entsprechend dem besagten Satz 1 gefunden und bewiesen zu haben. Beim Überarbeiten stellte sich der Beweis aber als falsch heraus. Woraufhin ich ein Gegenbeispiel suchte, um den scheinbaren Satz wie schon erwähnt zu widerlegen. Dies gelang mir für den ersten der beiden Teile des Satzes. Der zweite Teil ist zurzeit weder bewiesen noch widerlegt und möglicherweise auch falsch.

Weiter ist es mir gelungen in einem dritten Anlauf, nachdem die Verallgemeinerung des Winkels zu einem Raumwinkel und eine Beweisidee mithilfe der Höhe keinen Erfolg versprachen, den Cosinussatz mittels Vektoren zu verallgemeinern.

Im Gegensatz dazu konnte ich mithilfe eines Gegenbeispieles die Verallgemeinerung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras auf der Basis eines Tetraeders widerlegen. Beim Höhen- und Kathetensatz hatte ich wiederum dasselbe Problem mit der Höhe, wie ich dies schon beim Versuch den Cosinussatz zu beweisen gehabt hatte. Da aber zumindest für den Höhensatz das Umgehen der Höhe - unabhängig von der Frage wie dies umgesetzt werden sollte - undenkbar ist, musste ich diesen Abschnitt leider bei einigen Erklärungen belassen.

Im sphärischen Dreieck war es aufgrund der Literatur nicht sehr schwer den Satz des Pythagoras, den Cosinussatz und die Umkehrung des Satzes von Pythagoras zu verallgemeinern. Bei Höhen- und Kathetensatz musste ich etwas mehr Zeit investieren, jedoch hatte ich auch da keine grösseren Schwierigkeiten. Zudem habe ich für diese Sätze - von der Literatur angeregt - eine Annäherung für sehr kleine sphärische Dreiecke gemacht, um dadurch den entsprechenden Satz aus der Planimetrie zu finden. Dies hat mithilfe der Taylorreihe und einem Beispiel aus der Literatur problemlos geklappt.

Abschliessend ist festzuhalten, dass die vorliegende Maturaarbeit eine Antwort auf die Leitfrage, welche an dieser Stelle noch einmal wiederholt sein mag: «Inwiefern lassen sich der Satz des Pythagoras und ihm naheliegende Sätze auf das Dreidimensionale, sowie auf die Kugeloberfläche verallgemeinern?», gibt, wobei diese nicht einfach so in einem Satz festgehalten werden kann, sondern aus den Untersuchungen in Kapitel 3 auf Seite 4 zu folgen hat. Es sei jedoch angemerkt, dass diese Arbeit nicht vollständig alles Mögliche aufzeigen kann und dass an verschiedensten Stellen noch weitere Ansätze und Überlegungen möglich sind.

5. Reflexion und Ausblick

Für mich war es das erste Mal, mich mit einem Thema so intensiv zu beschäftigten, um damit eine Maturaarbeit zu schreiben. Es war für mich ein ebenso interessantes, wie auch herausforderndes Unterfangen. Vor allem die intensive Beschäftigung mit der Materie in der Frühlingsstudienwoche war für mich sowohl eine enorm wertvolle, wie auch spannende Erfahrung. Glücklicherweise fand ich während diesen Tagen immer genügend neue Ansätze, sodass ich die Arbeit immer irgendwie fortsetzen konnte.

Während sich das Erarbeiten von Inhalt in der Frühlingsstudienwoche als gut machbar herausstellte, erwies sich das Schreiben der endgültigen Fassung um einiges schwieriger. Dank der zeitlichen Reserven in meiner Planung, war es aber nicht so schlimm, dass ich für diesen Teil etwas mehr Zeit benötigte.

Bezüglich des Inhaltes sind auch noch an einigen Stellen Erweiterungen möglich. So können weitere Verallgemeinerungen der betrachteten Sätze und Themengebiete auf den n-dimensionalen Raum für $n > 3$ formuliert werden. Es wäre auch denkbar den verwendeten Ansatz zu den babylonischen Formeln durch einen anderen auszutauschen, um weitere interessante Ergebnisse zu erzielen.

Literaturverzeichnis

[Hoehn u. Huber 2005] HOEHN, Alfred ; HUBER, Martin: *Pythagoras. Erinnern sie sich?* Orell Füssli Verlag AG, Zürich, 2005

[Schneebeli 1991] SCHNEEBELI, Hans R.: *Geometrie von Fall zu Fall.* sabe Verlagsinstitut für Lehrmittel, Zürich, 1991

[Thaer 2005] THAER, Clemens: *Die Elemente von Euklid.* Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005

[Walser 2015] WALSER, Hans: *Sphärische Trigonometrie. Berechnungen.* http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:25629/eth-25629-07.pdf. Version: Juli 2015

[Wikipedia 2015] WIKIPEDIA: *Satz des Pythagoras.* https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras. Version: Juli 2015

Abbildungsverzeichnis

Bis auf Abbildung 3 auf Seite 14 aus[Walser, 2015, S. 1] sind alle Abbildungen vom Autor selbst erstellt.

Redlichkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe, dass ich auf eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise, dass ich vorgängig die Schulleitung und die betreuende Lehrperson informiere, wenn ich diese Maturaarbeit bzw. Teile oder Zusammenfassungen davon veröffentlichen werde sowie Kopien dieser Arbeit zur weiteren Verbreitung an Dritte aushändigen werde.

Honau, 23. September 2015

Quirin Reding

Anhang

A. Beweise und Erläuterungen

A.1. Satz des Pythagoras

«Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.[22]»

Um dies zu zeigen, sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC gegeben, wie es Abbildung 4 zeigt.

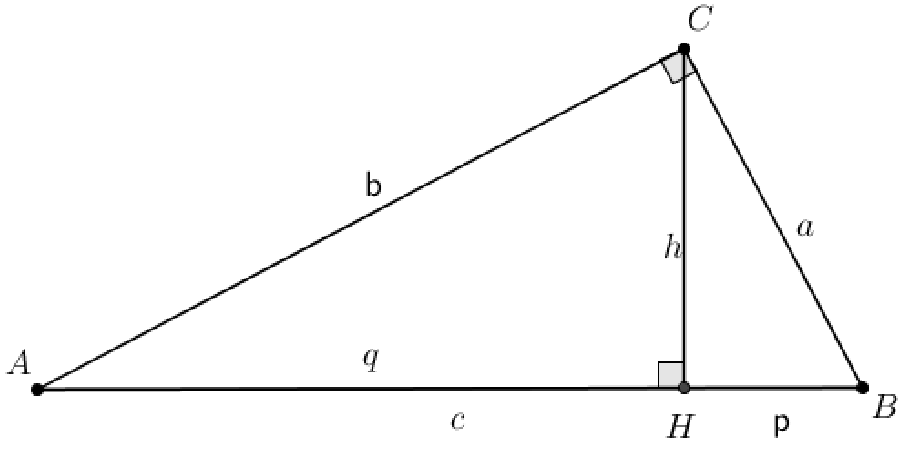


Abbildung 4: rechtwinkliges Dreieck

Wegen gleicher Winkel ist $\triangle ABC \sim \triangle BCH \sim \triangle AHC$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{p} = \frac{c}{a} &\Rightarrow a^2 = cp \\ \frac{b}{q} = \frac{c}{b} &\Rightarrow b^2 = cq \\ a^2 + b^2 = cp + cq &= c(p+q) = c^2 \end{aligned}$$

Womit der Satz von Pythagoras bewiesen ist.[23] $\square$

[22] Aus [Thaer, 2005, (I, 47)]

[23] Beweisidee aus [Wikipedia, 2015, Beweis mit Ähnlichkeit]

A.2. Umkehrung des Satzes von Pythagoras

«Wenn an einem Dreieck das Quadrat über einer Seite den Quadraten über den beiden übrigen Seiten zusammen gleich ist, dann ist der von diesen beiden übrigen Seiten des Dreiecks umfasste Winkel ein Rechter.[24]»

Es sei hierfür ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c gegeben. Diese erfüllen die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$. Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b. Seine Hypothenuse sei c'. Da deshalb $a^2 + b^2 = (c')^2$ gilt ist $c^2 = (c')^2$, was bedeutet, dass die beiden Dreiecke kongruent und somit beide rechtwinklig sind.[25] $\square$

A.3. Vektorieller Beweis des Cosinussatzes

Es sei ABC ein Dreieck mit $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ und $\vec{CB} = \vec{a}$. Es gilt deshalb $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Wenn man nun das Skalarprodukt von $\vec{c}$ mit sich selbst bildet erhält man:

$$c^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

Das kann noch ausmultipliziert werden zu:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 * \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Mithilfe der Definition des Skalarproduktes erhält man:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 * (a * b * \cos(\pi - \angle ACB))$$

Sei nun $\angle ACB = \gamma$ so erhalten wir:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2(ab \cos \gamma)$$

Womit der Cosinussatz vektoriell bewiesen ist. $\square$

A.4. Erläuterungen zum Kapitel 3.1.3 auf Seite 7

Es ist zu zeigen, dass der kleinste Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau $\pi - \gamma$ ist. Analog dazu folgen dann die weiteren Gleichungen zu den übrigen Vektoren und Winkeln.

Wir betrachten hierfür einen Querschnitt durch die Ebenen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$, wie in Abbildung 5 auf der nächsten Seite dargestellt. Dementsprechend finden wir die genannten Ebenen nun als Strecken vor. Die Repräsentanten der dazu senkrechten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen im gemeinsamen Punkt der Strecken $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ beginnen. An diesem gemeinsamen Punkt sind nun alle Winkel, mit Ausnahme des kleinsten Winkels zwischen den beiden Vektoren gegeben.

[24] Aus [Thaer, 2005, (I, 48)]
[25] Beweisführung gemäss [Thaer, 2005, (I, 48)]

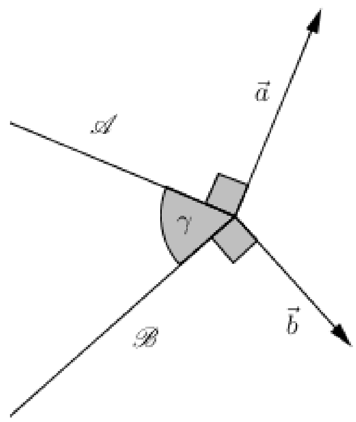


Abbildung 5: Skizze zur Berechnung des Zwischenwinkels

Folglich lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}\angle\vec{a},\vec{b} &= 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \gamma \\ &= \pi - \gamma\end{aligned}$$

Somit ist der kleinste Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau $\pi - \gamma$ und es lässt sich analog zeigen, dass $\angle\vec{a},\vec{c} = \pi - \beta$ und $\angle\vec{b},\vec{c} = \pi - \alpha$. $\square$

A.5. Beweis für die Gleichung 1 auf Seite 8

Es seien $A(a,0,0)$, $B(z,b,0)$, $C(x,y,c)$ und $D(0,0,0)$ vier Punkte, welche ein Tetraeder aufspannen. An dieser Stelle ist anzumerken, dass jedes Tetraeder im Koordinatensystem so verschoben werden kann, dass seine Eckpunkte auf den hier gegebenen Punkten liegen. Wir bilden nun die vier Vektoren, deren Summe gemäss Behauptung $\vec{0}$ sein soll:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\vec{DC} \times \vec{DB}}{2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -bc \\ cz \\ bx - yz \end{pmatrix} \\ \vec{b} = \frac{\vec{DA} \times \vec{DC}}{2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -ac \\ ay \end{pmatrix} \\ \vec{c} = \frac{\vec{DB} \times \vec{DA}}{2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ab \end{pmatrix} \\ \vec{d} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} bc \\ -cz + ca \\ -bx + yz - ay + ab \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Und die Summe davon:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -bc+0+0+bc \\ cz-ac+0-cz+ac \\ bx-yz+ay-ab-bx+yz-ay+ab \end{pmatrix}=\vec{0}$$

Womit Gleichung 1 auf Seite 8 bewiesen ist. □

A.6. Beweise zum Kapitel 3.1.5 auf Seite 9

Die folgenden Beweise befassen sich mit den babylonischen Formeln und sind aus [Hoehn u. Huber, 2005, Kapitel 2] entnommen.

A.6.1. Beweis der babylonischen Formeln

Es seien m, n zunächst zwei beliebige positive reelle Zahlen mit $m > n$. Nun setze man

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Also sind - nach dem Satz von Pythagoras - a, b die Katheten und c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Sind nun m und n natürliche Zahlen, so sind wegen $m > n$ auch $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$ natürliche Zahlen.

In diesen Fällen ist

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

ein pythagoreisches Zahlentripel. □

A.6.2. Lemma1

Wir zeigen, dass die Komponenten a, b, c eines PZT dann, und nur dann, teilerfremd sind, wenn irgend zwei dieser Komponenten teilerfremd sind. Seien dies etwa a und c. Sind nun a und c teilerfremd, so gilt dies erst recht für a, b, und c. Für den Nachweis der Umkehrung nehmen wir an dass a und c den gemeinsamen Teiler d ($d \neq 1$) haben. Wegen $b^2 = c^2 - a^2$ muss dann d auch b^2 teilen. Gibt es einen solchen gemeinsamen Teiler d, so gibt es auch einen *Primteiler*, d. h. einen gemeinsamen Teiler p, der gleichzeitig eine Primzahl ist. Dann teilt p aber auch b. Folglich gilt auch die Umkehrung. □

A.6.3. Lemma 2

Wir stellen zunächst einmal fest, dass höchstens eine der drei Zahlen a, b, c gerade sein kann. Denn wären zwei gerade, so hätten sie den gemeinsamen Teiler 2, und das Tripel wäre nicht primitiv. Angenommen beide Zahlen a und b sind ungerade dann gibt es nicht negative ganze Zahlen k, l mit $a = 2k + 1$ und $b = 2l + 1$. Es gilt jetzt:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4l^2 + 4k + 4l + 2$$

Somit ist c^2 zwar durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade und das Quadrat einer geraden Zahl durch 4 teilbar ist, kann c somit keine ganze Zahl sein. Also haben a und b verschiedene Parität, und c ist ungerade. $\square$

A.6.4. Satz 1

Wir beweisen die Kontraposition der Behauptung und nehmen dafür an, das Tripel $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ sei nicht primitiv. Nach der Definition gibt es dann einen gemeinsamen Teiler d $(d \neq 1)$ von $m^2 - n^2$, $2mn$ und $m^2 + n^2$. Insbesondere gibt es dann eine Primzahl p mit dieser Eigenschaft. Diese Zahl p teilt dann aber sowohl $(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$ als auch $(m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2$.

Ist $p = 2$, so sind $m^2 - n^2$ und $m^2 + n^2$ gerade. Dies ist aber nicht möglich, wenn m^2 und n^2 entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dann haben aber auch m und n die gleiche Parität.

Ist jedoch p eine ungerade Primzahl, so teilt sie sowohl m^2 als auch n^2 und damit auch m und n; d. h., m und n sind nicht teilerfremd. Dies beweist die Kontraposition und damit auch den Satz 1. $\square$

A.6.5. Satz 2

Ausgehend vom primitiven pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit ungeradem a, betrachten wir die rationalen Zahlen $\alpha = \frac{a}{b}$ und $\gamma = \frac{c}{b}$.

Es gilt $\gamma > 1$, und wir haben

$$(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha) = (\frac{c}{b} + \frac{a}{b})(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}) = \frac{c^2 - a^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Sei nun $\gamma + \alpha$ als gekürzter Bruch dargestellt, d. h. $\gamma + \alpha = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden m und n. Wir werden zeigen, dass für diese Zahlen m und n auch die weiteren Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind. Wegen $\gamma + \alpha \geq \gamma > 1$ gilt $m > n$. Andererseits ist wegen Gleichung 6

$$\gamma - \alpha = \frac{1}{\gamma + \alpha} = \frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}$$

Anders ausgedrückt, gilt:

$$\frac{c - a}{b} = \gamma - \alpha = \frac{n}{m} = \frac{1}{\gamma + \alpha} = \frac{b}{c + a}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion erhalten wir ferner

$$2\gamma = (\gamma + \alpha) + (\gamma - \alpha) = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$$
$$2\alpha = (\gamma + \alpha) - (\gamma - \alpha) = \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{m^2 - n^2}{mn}$$

und somit

$$\gamma = \frac{m^2 + n^2}{2mn} \text{ und } \alpha = \frac{m^2 - n^2}{2mn} \tag{7}$$

Es bleibt zu zeigen, dass in den rechten Seiten der Gleichungen 7 Zähler und Nenner je teilerfremd sind.

Nach Lemma 2 und nach Voraussetzung sind c und a ungerade Zahlen. Somit sind sowohl $c - a$ als auch $c + a$ gerade. Also sind $\frac{c-a}{2}$ und $\frac{c+a}{2}$ ganze Zahlen. Diese müssen verschiedene Parität haben, denn sonst wäre $c = \frac{c-a}{2} + \frac{c+a}{2}$ gerade. Folglich ist eine der beiden Zahlen $c - a$, $c + a$ durch 4 teilbar, und die andere ist zwar gerade aber nicht durch 4 teilbar.

Wegen

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$$

ist somit b^2 durch 8 teilbar. Dies ist aber nur möglich wenn b selber durch 4 (und b^2 somit durch 16) teilbar ist.

Wir wollen zunächst annehmen, dass $c+a$ nicht durch 4 teilbar ist. Dann kann $\gamma+\alpha = \frac{c+a}{b}$ mit 2, aber nicht mit 4 gekürzt werden. Somit ist m ungerade und n gerade. Ist andererseits $c - a$ nicht durch 4 teilbar, so kann $\gamma - \alpha = \frac{c-a}{b}$ nur mit 2, aber nicht mit 4 gekürzt werden. In diesem Fall ist n ungerade und m gerade. In beiden Fällen haben m und n, wie behauptet, verschiedene Parität.

Damit lässt sich jetzt zeigen, dass m^2+n^2 und $2mn$ bzw. m^2-n^2 und $2mn$ teilerfremd sind. Da m und n verschiedene Parität haben, schliessen wir zunächst, dass sowohl $m^2 + n^2$ als auch $m^2 - n^2$ ungerade sind.

Nehmen wir nun an, p sei ein gemeinsamer Primteiler von m^2+n^2 und von $2mn$. Dann ist p auch Teiler von $(m + n)^2$ und von mn - Letzteres, weil p als Teiler von $m^2 + n^2$ ungerade sein muss. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, p teile m. Da p auch $m+n$ teilt, folgt, dass p auch n teilt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass m und n teilerfremd gewählt wurden. Wir folgern, dass $m^2 + n^2$ und $2mn$ teilerfremd sind, und analog lässt sich zeigen, dass auch $m^2 - n^2$ und $2mn$ teilerfremd sind.

Da somit in den Termen der Gleichung $\frac{c}{b} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ (vgl. Gleichung 7) Zähler und Nenner je teilerfremde natürliche Zahlen sind, schliessen wir, dass die Zähler und die Nenner je übereinstimmen. Dasselbe gilt auch für $\frac{a}{b} = \frac{m^2-n^2}{2mn}$.

Das heisst:

$$c = m^2 + n^2, b = 2mn, a = m^2 - n^2$$

Es bleibt zu zeigen, dass m und n eindeutig bestimmt sind.
Dies folgt jedoch aus den Gleichungen

$$c + a = (m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2 \tag{8}$$

und

$$c - a = (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2 \tag{9}$$

sowie aus der Tatsache, dass m und n positiv sind. Damit ist der Beweis von Satz 2 vollständig. $\square$