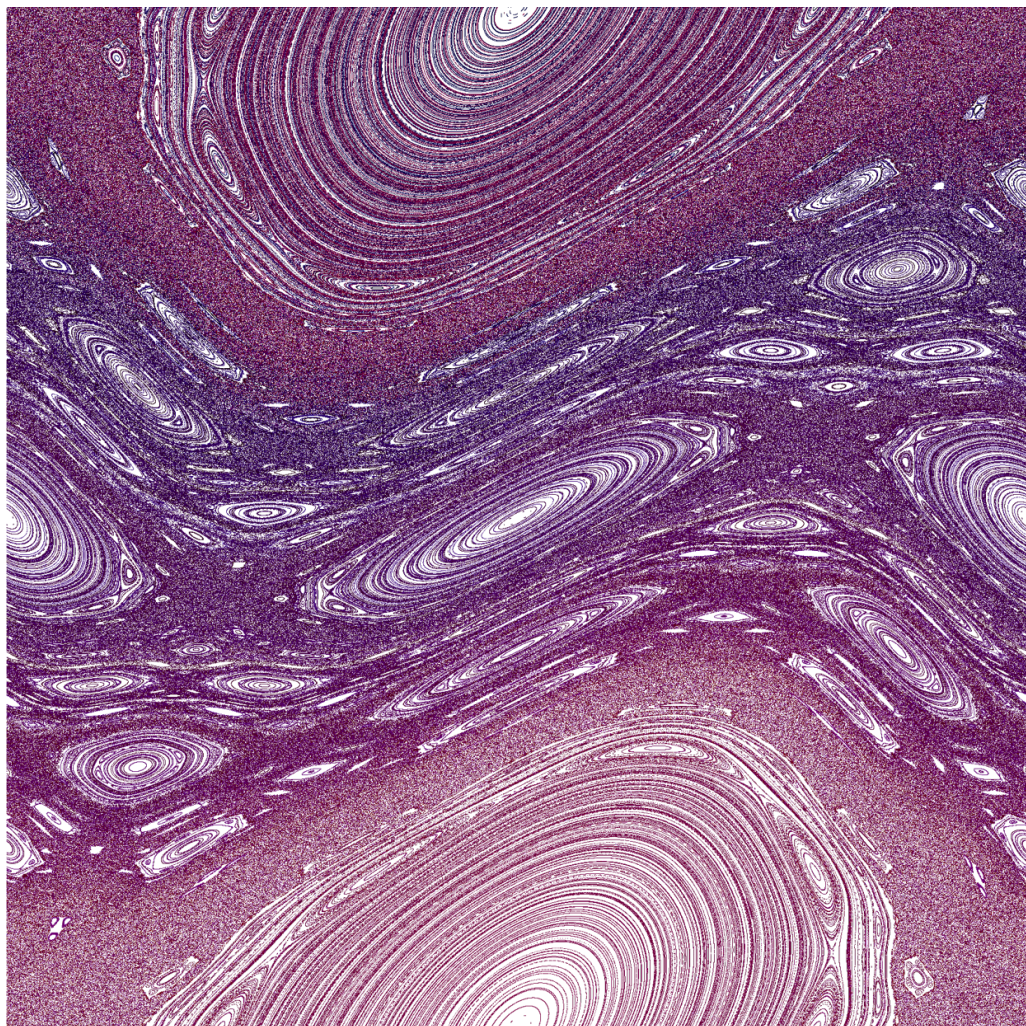


LICEO CANTONALE DI LOCARNO

OSCILLAZIONI E CAOS
NELLE
EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Lavoro di Maturità in Fisica e Matematica



Docente responsabile: Prof. Christian Ferrari

Presentato da: Gioele Maddalena

Anno Scolastico 2014

Prefazione

Cosa hanno in comune un giorno, uno studente e un pendolo? A prima vista si direbbe poco o nulla ma, indagando più a fondo, si nota senz'altro che i tre compiono, nella loro esistenza, delle oscillazioni. Il giorno implica un passare continuo dal chiaro del mattino al buio della notte; lo studente è un pendolare: si muove continuamente da casa a scuola; mentre il pendolo oscilla per definizione. Le oscillazioni fanno dunque parte della nostra vita ben più di quanto si pensi: compiamo atti che hanno a che fare con delle oscillazioni magari anche senza accorgercene. Per questa e altre ragioni ha senso di esistere un lavoro di maturità che le tratta. Ma quali sono queste altre motivazioni?

Innanzitutto alla base di tutto c'è la consueta curiosità che è sempre presente in ambito scientifico: una voglia di sapere, di scoprire e di lasciarsi affascinare dai mille segreti della natura. Uno di questi mille segreti ai quali il nostro interesse non può far altro che sottomettersi è certamente quello legato alla Teoria del Caos.

Edward Lorenz, mentre stava cercando di semplificare le leggi che descrivono i parametri dell'atmosfera, si accorse che minime variazioni nel suo modello portavano a delle situazioni climatiche differenti. Presentando in seguito i suoi lavori, all'Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science a Washington il 29 dicembre 1979, coniò un neologismo che è entrato a far parte del lessico comune, ma probabilmente ben pochi sanno esattamente cosa implichi "l'effetto farfalla". Eppure a partire da un semplice interrogativo poetico, "può un battito d'ali in Brasile scatenare un tornado nel Texas?", si sono visti fiorire dozzine di lungometraggi, pubblicazioni e romanzi inerenti al tema dell'imprevedibilità della vita e alla sua facile variazione: basta pochissimo per scatenare una reazione a catena che culmina in un epilogo devastante. Certo, il vero significato dei risultati di Lorenz era ben più profondo, ma poco importa. Ciò che è davvero rilevante e che è forse anche il motivo dell'attrazione di registi, scienziati e scrittori per questo modello è che esso sembra intaccare il determinismo imposto da Newton. Vedremo però che questo è vero solo in parte, perché è sì vero che con un minimo errore le orbite divergono irrimediabilmente, ma è altresì vero che se fossimo in grado di conoscere esattamente le condizioni iniziali di un sistema senza alcun minimo errore, allora saremmo capaci di descrivere il futuro dell'orbita. Dunque il determinismo permane esattamente come Laplace l'aveva concepito: egli infatti affermava che *"Un'intelligenza che per un dato istante conoscesse tutte le forze da cui la natura è animata e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così vasta da sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe in un'unica e medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli del più lieve atomo: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi."*

C'è in seguito un altro punto essenziale del modello di Lorenz: prendendo infatti due punti iniziali, non necessariamente vicini fra loro, e lasciandoli evolvere nel tempo, troveremo che, malgrado le traiettorie siano completamente differenti fra loro, esse rimangono su una regione circoscritta a forma, guarda caso, di farfalla. È quello che si chiama attrattore di Lorenz, che fa parte di un insieme di attrattori caotici e che per questo sono chiamati attrattori strani. Non riusciremo a giungere a questo, interessantissimo, aspetto dei sistemi caotici ma, strada facendo, incontreremo altri tipi di attrattori e ne descriveremo le loro caratteristiche. Si potrà notare come tutto si le-

ghi ottimamente: è possibile costruire un discorso perfettamente lineare partendo dal più banale degli esempi per arrivare al più caotico dei sistemi. E ditemi voi se ciò non è sufficientemente affascinante e stimolante per intraprendere questo viaggio!

Ringraziamenti

Prima di cominciare con il nostro itinerario occorre certamente ringraziare chi ha permesso che quest'ultimo potesse avvenire. Stiamo chiaramente parlando del professor C. Ferrari che, malgrado il suo perenne stress dovuto in parte anche alla numerosa classe di LAM che doveva guidare, mi ha dedicato un'enorme quantità di ore sacrificando ore buche e non, e rendendosi disponibile ogni qual volta la mia "retta via era smarrita" rispondendo puntualmente ai miei interrogativi togliendomi così dalla "selva oscura" dell'ignoranza.

Il mio secondo ringraziamento, invece, va a te caro lettore che, aprendo questo lavoro, hai fatto sì che il frutto delle mie fatiche non fosse rimasto solamente un fascicoletto chiuso e sconosciuto al mondo.

Abstract

Diamo ora delle direttive in modo che il lettore sappia con cosa si confronterà lungo il testo. Data l'enormità dell'argomento, questo LAM non è un'enciclopedia di tutti i movimenti periodici esistenti; ci limiteremo, infatti, ad esplorare questo mondo sotto il profilo matematico e fisico. Tuttavia, nonostante questa scrematura, ci troviamo comunque costretti ad ammettere che è stata necessaria una selezione precisa degli argomenti, dovuta in egual misura alla necessità di un discorso lineare da una parte e al tempo tiranno dall'altra. Il lavoro comprende perciò tre capitoli. I primi due riguardano il lato ordinato del soggetto, mentre con il terzo si esplorerà la facciata caotica delle equazioni differenziali ordinarie (EDO).

Ma diamo una caratterizzazione un po' più precisa: il primo capitolo sarà un riscaldamento, un'acquisizione di tutti i concetti necessari per il viaggio in modo da poter affrontare le difficoltà che seguiranno. Si partirà quindi con un esempio facile facile, il pendolo semplice, per poi introdurre dei concetti di analisi e di classificazione delle EDO, mentre infine tratteremo il pendolo smorzato, che ci proietterà verso il soggetto del secondo capitolo: le oscillazioni intrattenute.

Nel secondo capitolo, infatti, studieremo esempi più complessi: partendo dal modello di Lotka-Volterra, vedremo il concetto di ciclo limite, che riprenderemo con l'oscillatore di Van der Pol, per poi terminare con il teorema di Poincaré-Bendixson che fungerà da trampolino di lancio verso il caos.

L'ultimo capitolo, invece, è consacrato al mondo caotico, dagli oscillatori non lineari alla mappa standard per poi riprendere il pendolo semplice, modificarlo, così come si usa fare con i motorini, e utilizzarlo per esporre le leggi del caos. In questo modo si potrà chiudere il cerchio ritornando, in un certo senso, al punto di partenza sperando che i panorami incontrati, così come accade durante una bella gita in montagna, siano stati sufficientemente stimolanti per coprire tutte le difficoltà che il percorso potrebbe creare. A questo punto non mi resta altro da fare che augurarvi buon viaggio in questo mondo che, mi auguro, si riveli affascinante a voi così come lo è stato per me.

Indice

Prefazione	i
Ringraziamenti	iii
Abstract	v
1 Oscillazioni semplici	1
1.1 Pendolo libero	1
1.1.1 Descrizione iniziale del problema	1
1.1.2 Linearizzazione	2
1.1.3 Spazio delle fasi	3
1.2 Classificazione dei sistemi lineari planari	7
1.2.1 Definizione di sistema lineare planare	7
1.2.2 Autovalori reali distinti	8
1.2.3 Autovalori reali ripetuti	12
1.2.4 Autovalori complessi	14
1.2.5 Cambiamenti di base	16
1.2.6 Classificazione traccia-determinante	18
1.3 Pendolo smorzato	21
1.3.1 Descrizione iniziale del problema	21
1.3.2 Linearizzazione	22
1.3.3 Spazio delle fasi	29
2 Oscillazioni intrattenute	31
2.1 Il ciclo limite	31
2.1.1 Il modello di Lotka-Volterra: prede e predatori	31
2.1.2 Orologi e ciclo limite	34
2.2 L'oscillatore di Van der Pol	37
2.2.1 Il caso $\beta \gg 1$	38
2.2.2 Il caso $\beta \ll 1$	40
2.3 Il teorema di Poincaré-Bendixson	45
3 Oscillazioni caotiche	47
3.1 Oscillatore non lineare forzato	47
3.2 Oscillatore calcato	49
3.3 Considerazioni generali sui moti caotici: caos \neq caso	51
3.3.1 Sensibilità alle condizioni iniziali	52
3.4 Dinamica simbolica casuale	53
4 Conclusione	61

A Definizioni e concetti di algebra lineare	63
Bibliografia	65

Capitolo 1

Oscillazioni semplici

1.1 Pendolo libero

1.1.1 Descrizione iniziale del problema

Per cominciare, ecco un piccolo esempio di analisi con il tipo di oscillazione più facile: il pendolo libero, altrimenti detto pendolo semplice. Esso è rappresentato da una massa m che oscilla attaccata ad un sostegno fisso in O tramite una fune, di lunghezza ℓ , avente massa trascurabile. Le uniche forze che agiscono su questo sistema sono la forza gravitazionale \vec{F}_p , e la tensione della fune \vec{T} ; l'attrito è infatti trascurato. Poniamo $\theta(t)$ l'angolo fra la verticale passante per il punto O e la fune all'istante t . Il sistema considerato è visibile nella figura 1.1.

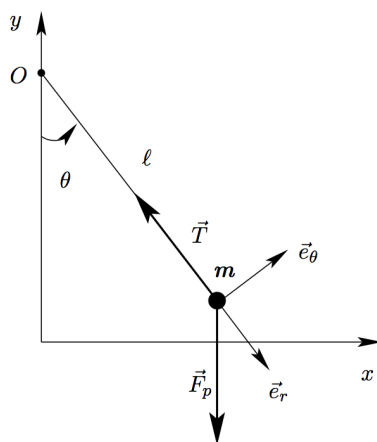


Figura 1.1: Rappresentazione di un pendolo semplice.

In coordinate polari, dunque rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$, si può applicare la II legge di Newton. Così facendo si ottiene:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_p + \vec{T} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ma_r &= F_r \\ ma_\theta &= F_\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 &= mg \cos \theta - T \\ mr\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta, \end{cases} \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato $r = \text{costante}$.

Poniamo ora $r = \ell$; grazie alla seconda equazione del sistema si giunge facilmente a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta. \quad (1.1)$$

Per comodità, ossia per evitare di portarsi a spasso troppi parametri, prendiamo l'equazione (1.1) e definiamo $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Dopodiché poniamo $t' = \omega_0 t$. Dato che ω_0 è una costante, derivare rispetto a t è la stessa cosa che derivare rispetto a t' ; l'unica differenza è proprio questa costante.

Si ha:

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{d(t'\omega_0^{-1})^2} = \frac{d^2\theta}{d(t')^2} \omega_0^2. \quad (1.2)$$

A questo punto torniamo alla (1.1); uguagliando i due risultati, appare la nostra equazione semplificata (basta eliminare ω_0 da entrambe le parti): $\ddot{\theta} = -\sin \theta$. Per proseguire con l'esempio, la scriviamo come sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin \theta, \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $\theta \in \mathbb{S}^1 =]-\pi, \pi]$ e $\omega \in \mathbb{R}$. Notiamo che il sistema (1.3) non è altro che la scrittura per esteso di un sistema di EDO di primo ordine, dato dall'equazione $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. Nel nostro caso, infatti, si ha:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_\theta \\ f_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Dato che **un punto \vec{x}^* tale che $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$ è un punto di equilibrio**, possiamo utilizzare l'espressione (1.4) per trovare i punti di equilibrio del pendolo nello spazio delle fasi $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Si deve avere, nei domini considerati (si ricorda che $\theta \in]-\pi, \pi]$ e $\omega \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} 0 = \omega \\ 0 = -\sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \theta = 0, \pi. \end{cases}$$

I punti $\vec{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{x}_2^* = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ sono quindi i punti di equilibrio che esaminiamo.

1.1.2 Linearizzazione

L'analisi di questo esempio continua nella specificazione di punto di equilibrio attrattivo o repulsivo. Per farlo bisogna eseguire un'approssimazione lineare dell'EDO attorno ai punti di equilibrio \vec{x}^* , dunque trovare quella che è chiamata **matrice di Jacobi**¹, per poi calcolare gli **autovalori** (vedi (A.1)). Grazie ad essi, infatti, si può classificare la stabilità dei punti di equilibrio.

Determiniamo quindi, per prima cosa, la matrice di Jacobi. Essa è data nel nostro caso (per il caso generale si veda (A.3)) da:

$$D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}(\vec{x}) & \frac{\partial f_\theta}{\partial \omega}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_\omega}{\partial \theta}(\vec{x}) & \frac{\partial f_\omega}{\partial \omega}(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

¹Essa prende il nome dal suo ideatore Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 10 dicembre 1804 – Berlino, 18 febbraio 1851), uno dei più illustri matematici e docenti del suo tempo. È conosciuto principalmente, oltre che per l'omonima matrice, anche per i suoi lavori sulle funzioni ellittiche, le equazioni differenziali alle derivate parziali e la loro applicazione in meccanica.

Calcoliamo ora (1.5) riferita al punto $\vec{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si ha:

$$D\vec{f}(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi si trovano facilmente gli autovalori (vedi(A.2))

$$\lambda = \pm i.$$

La lettura della sezione 1.2 ci confermerà che, poiché la parte reale degli autovalori è 0, siamo di fronte ad un **centro** da cui segue che l'orbita attorno a questo punto nello spazio delle fasi è ellittica.

Passiamo ora all'altro punto di equilibrio, $\vec{x}_2^* = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, e calcoliamo (1.5). Il risultato è il seguente:

$$D\vec{f}(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque gli autovalori sono:

$$\lambda = \pm 1.$$

Dato che $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, come vedremo meglio nella sezione 1.2, il punto preso in considerazione è instabile.

Per concludere l'approssimazione lineare dell'EDO, bisogna moltiplicare le matrici di Jacobi, riferite ai due punti di equilibrio considerati, per un generico punto $\vec{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$. I due risultati così ottenuti sono i sistemi seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\theta \end{cases} \quad (1.6)$$

attorno al primo punto e

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \theta \end{cases} \quad (1.7)$$

attorno al secondo.

1.1.3 Spazio delle fasi

Occupiamoci ora dello spazio delle fasi, che è lo spazio nel quale sono descritti tutti i possibili stati del sistema in funzione di $(\theta, \dot{\theta})$. È possibile costruirlo grazie alla costante definita da:

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta) = \text{costante}, \quad (1.8)$$

dove V è una primitiva di f , che rappresenta l'EDO, cambiata di segno: $f(\theta) = -V'(\theta)$. Nel nostro caso perciò si avrà

$$V(\theta) = -\cos \theta.$$

Notiamo che $E(\theta, \dot{\theta})$ può essere vista come la somma di energia cinetica, il primo termine, e energia potenziale, V .

Grazie alla relazione (1.8), si arriva facilmente a

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{2(E - V(\theta))}. \quad (1.9)$$

Poniamo ora $\tilde{E} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$. Si avrà dunque

$$\tilde{E} = E - V \geq 0. \quad (1.10)$$

L'andamento qualitativo dell'orbita nello spazio delle fasi è sempre ottenibile a partire dal grafico dell'energia potenziale V , per cui analizzeremo ora localmente questa funzione. Per fare ciò la prendiamo in considerazione, e la raffiguriamo, in un insieme ristretto A del suo dominio: $A = [-2\pi, 2\pi]$.² È possibile raffigurare su questo grafico la funzione $E(\theta, \dot{\theta})$. Essa, dato che è costante, è rappresentata da una retta parallela all'asse $O\theta$.

Costruiamo quindi il ritratto di fase; per semplificare e per ricercare una maggior chiarezza, suddivideremo l'esposizione in cinque parti.

1. Il primo punto della nostra analisi è lo studio del comportamento del ritratto di fase quando V è nel suo minimo. Tracciamo la costante di energia E in modo che intersechi V in un solo punto, in corrispondenza del minimo, dunque per $E(\theta, \dot{\theta}) = -1$. L'orbita rispetto a questo livello di energia, data (1.9), è dunque un punto solo: il centro $(0, 0)$.
2. Consideriamo ora il ritratto di fase quando V è in un intorno del suo minimo. Tracciamo quindi la costante che rappresenta E nei pressi di questo minimo. Data (1.10) ha senso solo se essa è al di sopra del valore del minimo. Possiamo quindi fare quattro considerazioni:
 - (a) Nei due punti in cui $V = E$, $\tilde{E} = 0$. Questo implica che $\dot{\theta} = 0$. Essi corrispondono ai due angoli θ_1 e θ_2 per i quali il pendolo inverte il senso di marcia, dunque la velocità è pari a zero.
 - (b) Da (1.10) segue che il moto può svolgersi solo nell'intervallo $[\theta_1, \theta_2]$.
 - (c) Da (1.9) segue che per ogni $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ sono possibili due valori opposti di $\dot{\theta}$. Perciò la curva è costituita da due rami, simmetrici rispetto all'asse $O\theta$, che si incontrano nuovamente nei punti di inversione del moto θ_1 e θ_2 .
 - (d) All'interno di quest'ultimo intervallo la velocità, così come \tilde{E} , è diversa da zero. La sua norma aumenta fino ad arrivare al minimo della funzione V per poi decrescere e giungere nulla a θ_1 oppure θ_2 , a dipendenza del senso di percorrenza della traiettoria. Otteniamo così delle ellissi il cui centro è il punto di centro citato precedentemente. È senz'altro interessante osservare come il fatto che le orbite siano delle ellissi è anche confermato anche dal calcolo algebrico: abbiamo determinato, con il sistema (1.6), che l'EDO linearizzata in un intorno di $\theta = 0$ è data da $\ddot{\theta} = -\theta$. Perciò la sua primitiva $V(\theta)$ vale $\frac{\theta^2}{2}$. Sostituendo nella (1.8) troviamo l'equazione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\theta^2 = \text{costante},$$

che è, appunto, l'equazione di un'ellissi il cui centro è nell'origine e i cui semiassi sono entrambi $\sqrt{2E}$. Notiamo infine che man mano che il livello di energia aumenta le ellissi diventano sempre più grandi poiché i semiassi dipendono direttamente da E . Una rappresentazione grafica di quanto detto è visibile nella figura 1.2.

3. Prendiamo ora in considerazione una parte del nostro dominio nella quale c'è un massimo. Tracciamo la costante in modo che lo tocchi; otteniamo così $E(\theta, \dot{\theta}) = 1$. Ovviamente essa interseca V in un solo punto. Anche qui si possono fare alcune considerazioni importanti:

²Questa scelta è data dal fatto che, in questo modo, $V = -\cos\theta$ presenta più di un periodo completo. Ciò facilita la spiegazione di quanto segue.

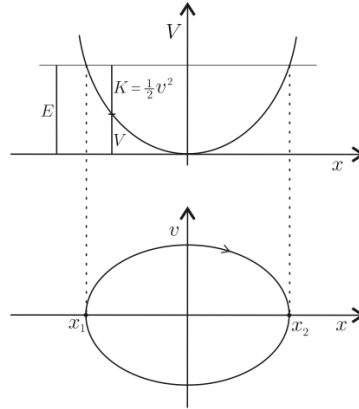


Figura 1.2: Nell'immagine la raffigurazione del metodo di costruzione del ritratto di fase: sopra c'è un minimo della funzione $V(\theta) = -\cos\theta$, mentre sotto si vede la corrispondente ellissi nel piano $(\theta, \dot{\theta})$.

- Ci troviamo in corrispondenza di un altro punto di equilibrio, questa volta instabile.
- Allontanandosi da esso, $\dot{\theta}$ cresce, in valore assoluto, seguendo quattro traiettorie: due entranti e due uscenti.
- Queste traiettorie meritano una particolare attenzione in quanto connettono tutti i punti di equilibrio instabili. Tali orbite descrivono perciò i moti che asintoticamente per $t \rightarrow \pm\infty$ tendono a questi punti in un verso o nell'altro a dipendenza del segno di $\dot{\theta}$. Esse hanno il nome di **separatrici**: questa denominazione deriva dal fatto che separano il piano di fase in regioni con proprietà diverse. Nel nostro caso divide la regione delle **librazioni** (cioè delle oscillazioni) del pendolo, compresa fra le due separatrici, che si ha per $-1 < E < 1$, e le due regioni delle **rotazioni**, nei due versi opposti, che si hanno per $E > 1$.

Ci si può facilmente riferire al caso pratico. La zona delle librazioni corrisponde alla situazione in cui il pendolo oscilla avanti e indietro, l'orbita delle separatrici quando il pendolo ha una velocità tale da fermarsi in equilibrio in cima in verticale (dunque per $\theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$), mentre le rotazioni corrispondono a quanto si descriverà nell'ultimo punto della nostra costruzione del ritratto di fase, ossia a un pendolo che ha una velocità troppo elevata e che per questo non si ferma mai e non ha inversioni di moto. La situazione descritta è visibile nell'immagine 1.3.

- Il quarto punto della nostra analisi è il comportamento del ritratto di fase quando E è minore del massimo di V . La costante dell'energia interseca quindi la funzione V in due punti: θ_3 e θ_4 che, come nel secondo caso considerato, corrispondono ai due angoli per i quali il pendolo inverte il senso di marcia: si ha infatti, data (1.9), $\dot{\theta} = 0$. In questo caso, però, la condizione (1.10) impone un moto al di fuori dei punti θ_3 e θ_4 . Esso seguirà delle iperboli: infatti, analogamente a quanto detto precedentemente riguardo alla circonferenza, linearizzando l'EDO in un intorno di $\theta = \pi$ si ha, grazie alla (1.7), $\ddot{\theta} = \theta$ che ci porta all'equazione

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\theta^2 = \text{costante},$$

cioè si ha l'equazione di un'iperbole. Un'ulteriore conferma è data dall'immagine 1.4, nella quale i due rami dell'iperbole appaiono chiaramente.

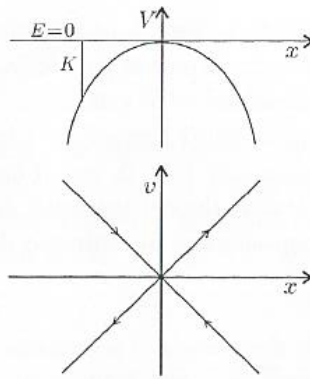


Figura 1.3: Nell'immagine la costruzione del ritratto di fase in corrispondenza di un massimo della funzione coseno. Esso presenta un punto di equilibrio instabile: le traiettorie arrivano a questo punto per poi ripartire immediatamente.

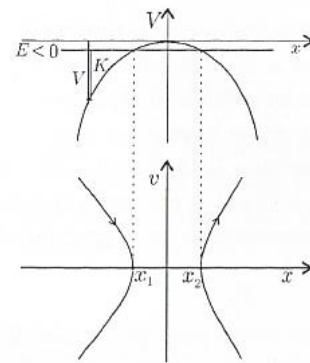


Figura 1.4: Costruzione del ritratto di fase quando E si trova appena sotto il massimo della funzione coseno. Si vedono chiaramente i due rami dell'iperbole trattati nel paragrafo.

5. L'ultima analisi locale è lo studio del caso in cui la costante dell'energia non tocca il grafico di V . Ciò è possibile solo se $E > V$ per ogni θ appartenente al dominio A considerato poiché la disuguaglianza è imposta dalla condizione (1.10). In altre parole bisogna porre $E > E(\pi, 0) = 1$, dove $E(\pi, 0)$ è l'energia calcolata nel punto di equilibrio instabile. Dato che $E > V$, l'equazione (1.9) sarà sicuramente diversa da zero, dunque non vi sono punti di arresto. Avvicinandosi al massimo di V la norma di $\dot{\theta}$ diminuisce per poi aumentare, ma questo senza mai fermarsi così come si può vedere nella figura 1.5.

In conclusione possiamo notare come quanto detto nei punti 1,2 e 3,4,5 sia riferito a zone di V vicine ai minimi e, rispettivamente, ai massimi di quest'ultima. Dunque, dato che $V(\theta) = -\cos \theta$, si avrà quanto visto nei primi due argomenti in un intorno dei punti $(2n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$; mentre il restante in un intorno dei punti $((2n+1)\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$; ovvero tutti i punti di equilibrio stabili e instabili che sono stati determinati nel corso di questa sezione. Analizzando tutti i cinque punti discussi nel loro insieme possiamo infine rappresentare il ritratto di fase del pendolo semplice, mostrato nell'immagine 1.6.

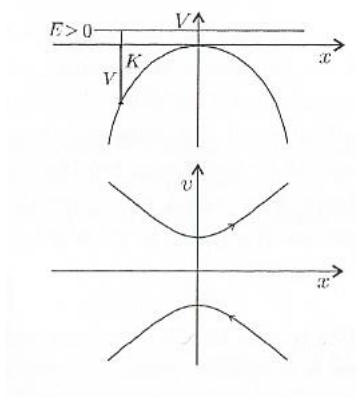


Figura 1.5: Situazione corrispondente al caso $E > V$ per ogni θ appartenente al dominio A considerato.

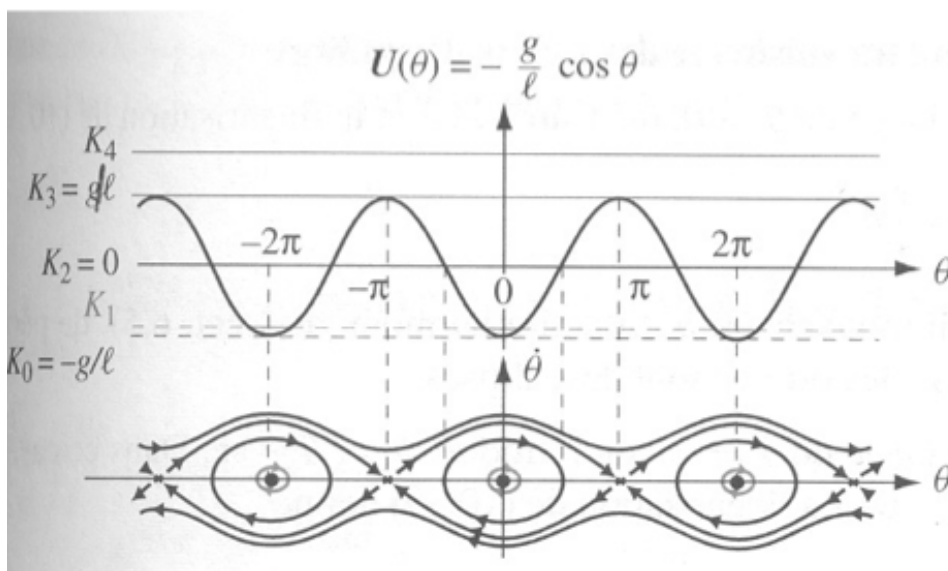


Figura 1.6: Ritratto di fase per il pendolo semplice. Si può notare che in quest'immagine la costante $\frac{g}{l}$ è stata mantenuta, mentre nel nostro caso è stata tolta grazie alla semplificazione effettuata all'inizio della corrente sezione. È interessante notare la dipendenza diretta del ritratto di fase rispetto alla primitiva raffigurata sopra a conferma di quanto esposto nel paragrafo.

1.2 Classificazione dei sistemi lineari planari

1.2.1 Definizione di sistema lineare planare

In questa sezione verranno classificate analiticamente le possibili orbite dei sistemi lineari planari: ossia tali che il loro spazio delle fasi appartenga a \mathbb{R}^2 . Consideriamo quindi dei sistemi della forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \tag{1.11}$$

dove $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Nel nostro caso, dunque parlando di linearizzazione di un'EDO, A è la matrice di Jacobi $D\vec{f}(\vec{x})$ calcolata nel punto di equilibrio \vec{x}^* tale che $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$.

1.2.2 Autovalori reali distinti

L'obiettivo ora è di determinare quando i punti di equilibrio sono stabili o instabili. Per fare questo occorre determinare l'equazione delle traiettorie in funzione del tempo.

Definiamo innanzitutto la matrice

$$V = \begin{pmatrix} v_{1,x} & v_{2,x} \\ v_{1,y} & v_{2,y} \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono gli autovettori della matrice A inerenti agli autovalori λ_1 e λ_2 .

Definiamo ora la matrice colonna

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix}$$

tale che

$$V\eta = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

dove $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ rappresenta una condizione iniziale. Per trovare η basta perciò risolvere quest'ultima equazione nel seguente modo.

$$\eta = V^{-1}\vec{x}_0.$$

Date queste premesse possiamo definire il vettore posizione al tempo t . Esso è dato da:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \eta_x e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + \eta_y e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad (1.12)$$

che può essere scritto come:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad (1.13)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti che dipendono dalla condizione iniziale.

Consideriamo ora un sistema lineare planare dato da (1.11) e supponiamo che A abbia due autovalori reali $\lambda_1 < \lambda_2$. Abbiamo dunque quattro casi da considerare.

1. Il primo caso che analizziamo è quello in cui $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Questa configurazione è chiamata **sella**. Consideriamo la matrice nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori, soluzione di $\det(\lambda I - A)$, sono λ_1 e λ_2 , mentre gli autovettori sono, rispettivamente,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale di questo esempio, vista (1.13) è quindi

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Dato che $\lambda_1 < 0$ la retta $c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ giace sull'asse Ox e tende a $\vec{0}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Questo asse è detto la **varietà stabile**. Invece, poiché $\lambda_2 > 0$, la retta $c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ giace sull'asse Oy e si allontana da $\vec{0}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Questo asse è detto la **varietà instabile**. Tutte le altre soluzioni, che sono combinazione lineare delle due sopracitate, tendono a $+\infty$ allontanandosi dall'origine lungo la varietà instabile per $t \rightarrow +\infty$ dato che in questo limite

si ha $\vec{x}(t) \cong \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, mentre per $t \rightarrow -\infty$ esse tendono a $+\infty$ seguendo la varietà stabile, visto che in questo limite si ha $\vec{x}(t) \cong \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per complicare un po' la situazione prendiamo come esempio quest'altra matrice non diagonale:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il polinomio caratteristico, si constata facilmente che gli autovalori di A sono ± 2 e che gli autovettori corrispondenti sono

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Data (1.13), in questo caso si ha:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Come nell'esempio precedente possiamo dire che anche in questo caso le due rette che formano la combinazione lineare di tutte le soluzioni hanno comportamenti opposti: la retta $c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una varietà instabile: essa si allontana dall'origine per $t \rightarrow +\infty$, mentre la retta $c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tenderà verso l'origine: essa è dunque la varietà stabile. Notiamo che, come nell'esempio preso in considerazione precedentemente, per $t \rightarrow \pm\infty$ si ottiene che le soluzioni generali dell'esempio seguono la varietà instabile e, rispettivamente, stabile. Questo significa che le orbite passeranno dall'aver la stessa pendenza dell'autovettore legato all'autovalore negativo, a quella dell'autovettore legato all'autovalore positivo. Tutto questo è ben visibile nella figura 1.7.

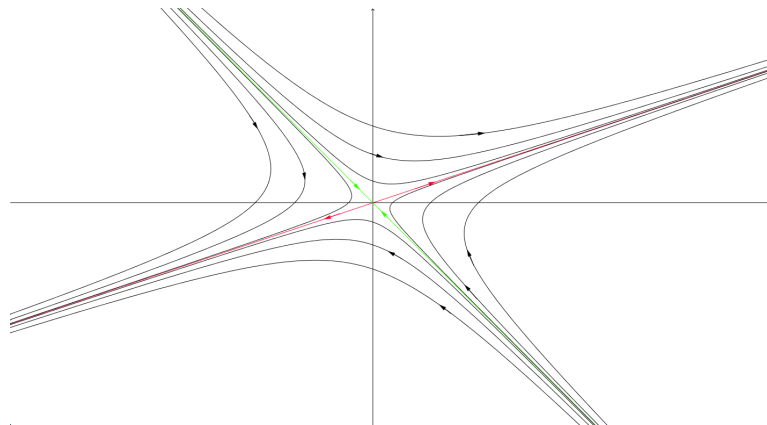


Figura 1.7: Ritratto di fase della matrice B , rappresentante una sella, ottenuto grazie al programma *GeoGebra*. Si vede chiaramente come le soluzioni tendano alla varietà instabile per $t \rightarrow +\infty$, e alla varietà stabile per $t \rightarrow -\infty$, che corrisponde a passare dalla pendenza dell'autovettore legato all'autovalore negativo, a quella dell'autovettore calcolato a partire dall'autovalore positivo.

In generale possiamo dire che ogni volta che una matrice A ha un autovalore positivo e uno negativo troveremo sempre una varietà stabile e, rispettivamente, una instabile alla quale le soluzioni si avvicinano o si allontanano dall'origine. Tutte le altre soluzioni si avvicineranno a queste rette: per $t \rightarrow +\infty$ alla varietà instabile, mentre per $t \rightarrow -\infty$ alla varietà stabile.

2. La seconda possibilità è il caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Questa configurazione è chiamata **pozzo attrattivo**. Per analizzarla prendiamo nuovamente la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

di cui avevamo già detto nel primo caso. Conosciamo già la soluzione generale riferita a questa matrice: si tratta dell'equazione (1.14). Dato che $\lambda_1 < 0$, possiamo subito concludere che la retta $c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ giace sull'asse Ox e tende a $\vec{0}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Come abbiamo visto precedentemente, questo asse è la varietà stabile. Ciò vale anche per la retta $c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ considerato che anche $\lambda_2 < 0$. Tutte le soluzioni tendono dunque all'origine per $t \rightarrow +\infty$, ma come? Per rispondere a questa domanda consideriamo il caso $c_1 \neq 0$ e calcoliamo la pendenza di queste soluzioni quando il tempo tende a infinito. Allora, ponendo

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Dato che $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ la pendenza tende a $+\infty$ e 0. Questo significa che nell'origine si ha che le soluzioni tendono ad essere tangenti all'asse Oy , cioè all'asse con autovalore minore in valore assoluto.

Prendiamo ora in considerazione la matrice non diagonale

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calcolando gli autovalori si trova $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -1$, con i loro rispettivi autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni possibili sono dunque

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la cui pendenza, calcolata analogamente all'esempio precedente, è data da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-5)c_1 e^{-5t}(-1) + (-1)c_2 e^{-t}(1)}{(-5)c_1 e^{-5t}(1) + (-1)c_2 e^{-t}(3)} = \left(-\frac{5c_1 e^{-5t} - c_2 e^{-t}}{5c_1 e^{-5t} + 3c_2 e^{-t}} \right) \left(\frac{e^t}{e^t} \right) = -\frac{5c_1 e^{-4t} - c_2}{5c_1 e^{-4t} + 3c_2}.$$

Per $t \rightarrow +\infty$ si ha, esattamente come nell'altro esempio riferito a questo caso, che la pendenza delle soluzioni tenderà ad assumere lo stesso valore di quella dell'autovettore legato all'autovalore minore in valore assoluto, ossia $-\frac{1}{3}$. Se $t \rightarrow -\infty$, si ha il contrario: le soluzioni tendono ad avere la stessa pendenza dell'altro autovettore, che corrisponde a -1 . L'immagine 1.8 ci permette di vederlo chiaramente. Possiamo infine osservare che, nel caso generale, prendendo due autovettori generici, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, con i loro autovalori, $\lambda_u < \lambda_v < 0$, e procedendo analogamente a quanto già visto, si può facilmente dimostrare che la pendenza delle soluzioni, per $t \rightarrow +\infty$, tende a $\frac{v_y}{v_x}$, ovvero alla pendenza dell'autovettore corrispondente all'autovalore minore in valore assoluto. Per $t \rightarrow -\infty$, invece, la pendenza tenderà a $\frac{u_y}{u_x}$: quella dell'autovalore maggiore in valore assoluto.

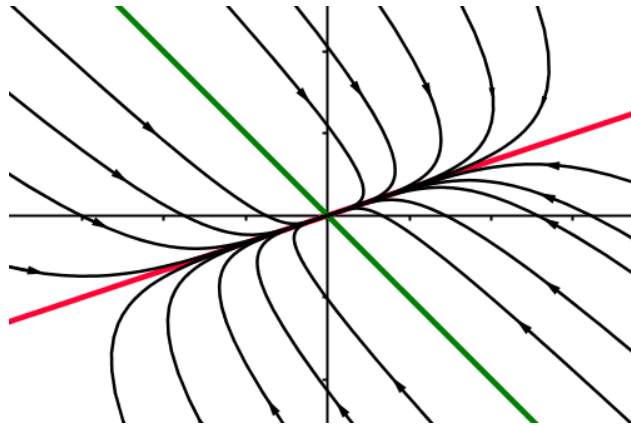


Figura 1.8: Ritratto di fase inerente alla matrice B realizzato grazie al programma *GeoGebra*. Si vede chiaramente come tutte le soluzioni si avvicinano al punto di origine tangenzialmente alla pendenza dell'autovettore corrispondente all'autovalore minore in valore assoluto (qui notata in rosso), mentre per $t \rightarrow -\infty$ tendono ad avere la stessa pendenza dell'altro autovettore (qui notata in verde).

3. Passiamo ora al caso $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Questa configurazione è chiamata **pozzo repulsivo**. Consideriamo nuovamente la matrice A già discussa precedentemente, che ci porta alla soluzione generale data dall'equazione (1.14). Dato che entrambi gli autovalori sono positivi, le due rette che compongono la soluzione generale sono entrambe delle varietà instabili e si allontanano dall'origine per $t \rightarrow +\infty$, perciò anche tutte le soluzioni si comportano in questo modo. Cerchiamo ora di capire come questo avviene calcolando, in modo analogo a quanto visto con il pozzo attrattivo, la loro pendenza. Si ha dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

e poiché $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, quando $t \rightarrow \pm\infty$, la pendenza delle soluzioni tende a 0, nel primo caso, e $+\infty$ nel secondo: esse se ne vanno dall'origine tangenzialmente all'asse Oy , cioè a quello con autovalore minore, per poi tendere ad avere pendenza 0, così come quella dell'asse con autovalore maggiore.

Confrontando i ritratti di fase di questa configurazione e del caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, notiamo che i due coincidono. L'unica differenza è il senso di percorrenza nel tempo.

Facciamo ora un esempio con la seguente matrice non diagonale

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, con i corrispettivi autovettori:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni possibili sono espresse, grazie a (1.14), da:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora la pendenza di quest'ultime:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2)c_1 e^{2t}(-2) + (4)c_2 e^{4t}(1)}{(2)c_1 e^{2t}(1) + (4)c_2 e^{4t}(-\frac{3}{4})} = \left(\frac{-4c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{4t}}{2c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{4t}} \right) \left(\frac{e^{-4t}}{e^{-4t}} \right) = -\frac{4c_1 - \frac{4c_2}{e^{-2t}}}{2c_1 - \frac{3c_2}{e^{-2t}}}.$$

Anche in questo secondo esempio notiamo che la pendenza delle soluzioni per $t \rightarrow -\infty$ tende ad assumere lo stesso valore di quella dell'autovettore corrispondente all'autovalore minore, ossia -2 . Per $t \rightarrow +\infty$, la pendenza tenderà a corrispondere a $-\frac{4}{3}$: quella dell'altro autovettore.

Osserviamo infine che quanto visto sopra è generalizzabile per ogni autovettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, con i loro autovalori, $0 < \lambda_u < \lambda_v$. Si dimostra, infatti, facilmente che la pendenza, per $t \rightarrow -\infty$, tende a $\frac{u_y}{u_x}$: la pendenza dell'autovettore corrispondente all'autovalore minore, mentre per $t \rightarrow +\infty$ la pendenza tenderà ad essere pari a $\frac{v_y}{v_x}$: quella dell'autovettore legato all'autovalore maggiore.

4. L'ultima possibilità, poco interessante e perciò non spenderemo molte parole su di essa, è quando $\lambda_1 = 0$ oppure $\lambda_2 = 0$. In questo caso si ha una retta di punti di equilibrio la cui pendenza è corrispondente a quella dell'autovettore legato all'autovalore non nullo. Esso determina inoltre anche la direzione delle soluzioni. In questo caso si parla di **varietà centrale**.

1.2.3 Autovalori reali ripetuti

Terminate le possibilità nelle quali si consideravano degli autovalori reali distinti occupiamoci del caso in cui gli autovalori sono ripetuti, ovvero quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. A questi autovalori possono corrispondere un autovettore oppure due. Consideriamo, infatti, la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$. Calcolando gli autovettori si ottiene:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda v_x + a v_y = \lambda v_x \\ \lambda v_y = \lambda v_y. \end{cases}$$

Questo sistema di equazioni si risolve diversamente a dipendenza del parametro a :

1. Se $a = 0$, vale

$$\begin{cases} \lambda v_x + a v_y = \lambda v_x \\ \lambda v_y = \lambda v_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda v_x = \lambda v_x \\ \lambda v_y = \lambda v_y. \end{cases}$$

In questa situazione qualsiasi vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ soddisfa l'equazione; possiamo perciò dire che ci sono **due autovettori** i quali formano una base di \mathbb{R}^2 . Nel caso più semplice si avrà per questo:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se $a \neq 0$, vale

$$\begin{cases} \lambda v_x + a v_y = \lambda v_x \\ \lambda v_y = \lambda v_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a v_y = 0 \\ \lambda v_y = \lambda v_y \\ \lambda v_x = \lambda v_x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y = 0 \\ \lambda v_x = \lambda v_x. \end{cases}$$

Avremo quindi **un autovettore** dato da

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così appurato che ci sono due possibilità che differiscono fra loro a dipendenza della presenza del parametro a nel sistema. Per questo motivo appare evidente che ci sono due casi differenti per la descrizione dell'orbita in funzione del tempo.

1. Innanzitutto prendiamo in considerazione il caso $a = 0$, che corrisponde ad avere due autovettori. Si può verificare che la funzione vettoriale che descrive le orbite nel tempo è data da:

$$\vec{x}(t) = (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2) e^{\lambda t}. \quad (1.15)$$

Questa configurazione, che è chiamata **nodo stabile** se $\lambda < 0$ e **nodo instabile** se $\lambda > 0$, consiste in fascio di rette, le quali si dirigono oppure, rispettivamente, partono dall'origine. calcolando il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}(t)$ per il primo caso e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{x}(t)$ nel secondo, si ottiene come risultato comune $(0, 0)$. Un esempio di questo tipo di ritratto di fase, dato dalla matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, è visibile nell'immagine 1.9.

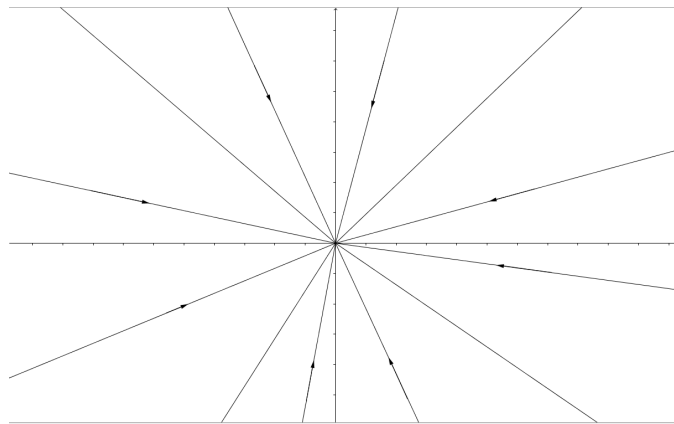


Figura 1.9: Rappresentazione della matrice B . Tutte le soluzioni tendono al centro, ossia al punto di equilibrio stabile, seguendo delle rette.

2. Passiamo ora all'altro caso: quello in cui $a \neq 0$. Dato che corrisponde ad un solo autovettore, per costruire l'equazione delle orbite nel tempo occorre definire un vettore \vec{w} che giocherà il ruolo di secondo autovettore. Esso si può ricavare tramite la seguente relazione:

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w} + \vec{v}.$$

In questo modo si può verificare che per questo caso vale:

$$\vec{x}(t) = (c_1 \vec{v} + c_2(\vec{w} + \vec{v}t)) e^{\lambda t}. \quad (1.16)$$

Questa configurazione è chiamata **nodo improprio instabile** se $\lambda > 0$, mentre nel caso in cui $\lambda < 0$ si parla di **nodo improprio stabile**.

Proviamo a riferirci ad un caso pratico per vedere cosa succede. Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il suo autovalore è -3 , l'autovettore è $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre un vettore \vec{w} è dato da $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Data (1.16), l'equazione delle orbite in funzione del tempo è data da:

$$\vec{x}(t) = \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \right) \right] e^{-3t}.$$

Cerchiamo di capire come sarà fatto il suo ritratto di fase calcolando il limite per $t \rightarrow \pm\infty$ e, analogamente a come è stato fatto nel caso degli autovalori reali distinti, la pendenza negli stessi limiti in modo da vedere dove e come le orbite partono e tendono per lunghi tempi.

Il termine preponderante della funzione è evidentemente l'esponenziale, per questo possiamo concludere che per $t \rightarrow +\infty$ le orbite tendono all'origine, mentre, per $t \rightarrow -\infty$, esse se ne allontanano.

La pendenza, nel caso generale, è data dalla seguente relazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c_2 v_y e^{\lambda t} + (c_1 v_y + c_2 w_y + c_2 v_y t) \lambda e^{\lambda t}}{c_2 v_x e^{\lambda t} + (c_1 v_x + c_2 w_x + c_2 v_x t) \lambda e^{\lambda t}} = \frac{c_2 v_y + \lambda c_1 v_y + \lambda c_2 w_y + \lambda c_2 v_y t}{c_2 v_x + \lambda c_1 v_x + \lambda c_2 w_x + \lambda c_2 v_x t}.$$

Notiamo pertanto che il limite per $t \rightarrow \pm\infty = \frac{v_y}{v_x}$. Dal ritratto di fase che ne risulterà si noterà come questo risultato è valido solo vicino all'origine perciò, nel caso in cui $\lambda < 0$, le soluzioni tendono all'origine con la stessa pendenza dell'autovettore, mentre, nella situazione $\lambda > 0$, se ne andranno per questo stesso valore. Nell'esempio che stiamo considerando la pendenza è pari a -1 , quindi le orbite tendono all'origine tangenzialmente al loro autovettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, così come si può vedere nell'immagine 1.10.

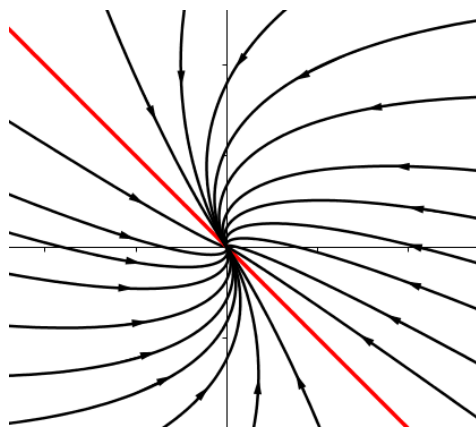


Figura 1.10: Nella figura, realizzata mediante il programma *GeoGebra*, il ritratto di fase della matrice B : le soluzioni si avvicinano all'origine tangenzialmente alla pendenza dell'autovettore, qui notata in rosso.

1.2.4 Autovalori complessi

Con gli autovalori reali ripetuti abbiamo così ultimato l'analisi dei casi in cui $\lambda \in \mathbb{R}$. Ci restano dunque le possibilità nelle quali gli autovalori sono dei numeri complessi. In questa situazione, considerato che la matrice è a coefficienti reali, essi devono essere coppie di autovalori complessi coniugati: λ e $\bar{\lambda}$.

Consideriamo la matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con i rispettivi autovettori

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \bar{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare si risolve considerando che $\vec{z}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$ è una soluzione; infatti \vec{z} soddisfa (1.11). Sviluppiamo ora $\vec{z}(t)$ nel caso della matrice sopracitata per trovare la soluzione generale. Si ha:

$$\vec{z}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} = \vec{z}_{\text{Re}}(t) + i \vec{z}_{\text{Im}}(t).$$

Dato che $\vec{z}(t)$ è una soluzione, ciò implica che anche $\vec{z}_{\text{Re}}(t)$ e $\vec{z}_{\text{Im}}(t)$ lo siano. Per questo motivo possiamo concludere che la soluzione generale del sistema (1.11), nel caso di autovalori complessi, è una composizione lineare dei vettori $\vec{z}_{\text{Re}}(t)$ e $\vec{z}_{\text{Im}}(t)$:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti reali.

Possiamo ora catalogare i vari casi possibili, i quali dipendono dal parametro $\alpha = \text{Re} \lambda_1 = \text{Re} \lambda_2$.

1. Se $\alpha = 0$ le soluzioni sono un moto periodico aventi come orbite delle ellissi ruotate in modo che la pendenza di uno dei due semiassi sia uguale a quella della parte reale di $\text{Re} \vec{v}_{1,2}$. Questa configurazione, che abbiamo già incontrato nel caso del pendolo semplice, è chiamata **centro**.

Facciamo un esempio numerico per cercare di chiarire la situazione. Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico dà $\lambda^2 + 9 = 0$, da cui si hanno gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, mentre gli autovettori sono

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il ritratto di fase sarà dunque formato da ellissi aventi centro nell'origine e il cui semiasse maggiore coincide con la retta $y = 3x$ la cui pendenza è uguale a quella della parte reale degli autovettori $\vec{v}_{1,2}$. Esso è rappresentato nell'immagine 1.11.

2. Se $\alpha \neq 0$ le soluzioni tendono a $\vec{0}$ per $t \rightarrow \pm\infty$ percorrendo una spirale. Questo è dovuto al fatto che ci troviamo confrontati con un sistema dissipativo: una curva nello spazio delle fasi non avrà un andamento periodico così come accade nel caso conservativo. Prendiamo, ad esempio, in considerazione la configurazione centro appena descritta: la soluzione generale è data dall'equazione (1.17) ma, dato che in questo caso specifico abbiamo $\alpha = 0$, la soluzione può essere ridotta a:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t \\ -c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

La componente del vettore posizione che ci interessa è quella inerente a $x(t)$. Abbiamo dunque

$$x(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t,$$

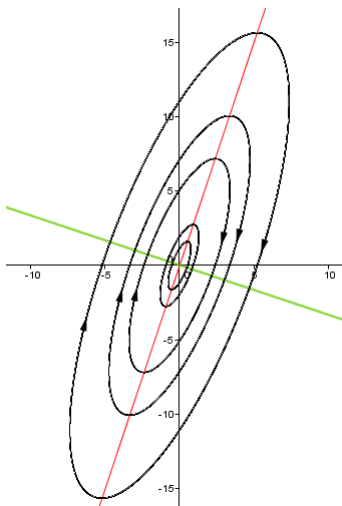


Figura 1.11: Nell'immagine si vede che le ellissi risultanti a partire dalla matrice B sono ruotate rispetto agli assi centrali: il loro semiasse maggiore ha infatti la pendenza della parte reale degli autovettori. Osservando attentamente si nota che la retta $y = 3x$, qui rappresentata in rosso, non coincide perfettamente con il semiasse maggiore. Questo è dovuto ad un'impresione del programma *GeoGebra* con il quale è stata effettuata la simulazione numerica.

ossia una funzione di periodo $\frac{2\pi}{\beta}$. Ciò significa che, seguendo una curva nello spazio delle fasi, dopo un tempo pari a $t = \frac{2\pi}{\beta}$, si ritornerà al punto di partenza.

Questo non è possibile, invece, nel caso dissipativo, ossia quando $\alpha \neq 0$. In questa situazione, l'equazione (1.17) inerente a $x(t)$ resta della forma

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Interessiamoci al modo in cui le soluzioni si avvicinano oppure si allontanano dall'origine.

- (a) Nel caso in cui $\alpha < 0$, calcolando $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ si ha che il termine preponderante è l'esponenziale. Questo spiega l'andamento a spirale in direzione del centro, soluzione di questo limite.

La configurazione considerata è chiamata **fuoco stabile**. Per esemplificare prendiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del polinomio caratteristico ci porta all'equazione $\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$, da cui si trovano gli autovalori $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} (1 \mp i\sqrt{15})$, e gli autovettori $v_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$. Di conseguenza il piano di fase è la spirale, anch'essa ruotata seguendo la pendenza della parte reale degli autovettori, mostrata nell'immagine 1.12.

- (b) Se $\alpha > 0$ le soluzioni tendono ad allontanarsi da $\vec{0}$ per $t \rightarrow +\infty$ percorrendo una spirale analoga a quella del punto precedente (l'unica differenza consiste nel senso di percorrenza). In questo caso si parla di **fuoco instabile**.

1.2.5 Cambiamenti di base

Finora abbiamo incontrato le seguenti tipologie di matrici A :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

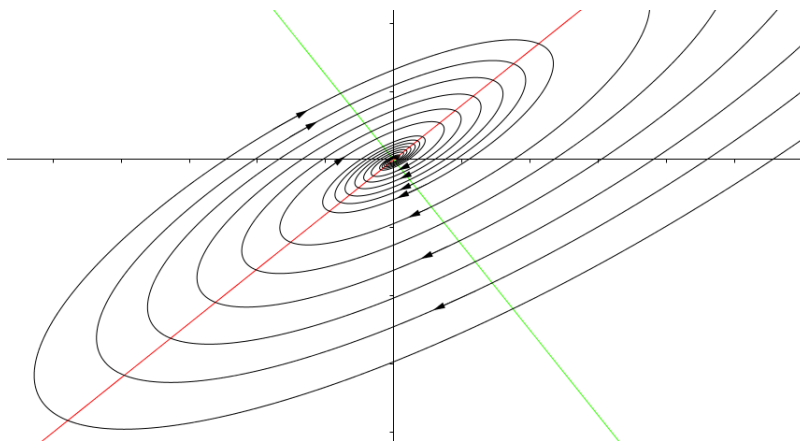


Figura 1.12: Nell'immagine, ottenuta grazie al programma *GeoGebra*, la spirale corrispondente al ritratto di fase che rappresenta la matrice B .

Esse sono dette **forme canoniche**. Dato un sistema lineare $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$, è sempre possibile ricondurre il caso ad una delle tre matrici canoniche grazie ad un cambiamento di base; ossia trovando una matrice invertibile S tale che

$$S^{-1}BS = A.$$

Ci sembra importante esemplificare quanto detto al fine di essere maggiormente chiari. Il caso più semplice da trattare è, ovviamente, quello riferito agli autovalori reali distinti. In questo caso la forma canonica è

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

dove λ e $\mu \in \mathbb{R}$.

Prendiamo allora la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che avevamo già discusso precedentemente esponendo la configurazione a sella. Già sappiamo che i suoi autovalori sono ± 2 , mentre gli autovettori sono, rispettivamente, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Essa rappresenta un'applicazione lineare rispetto alla base standard di \mathbb{R}^2 , mentre la matrice canonica che cerchiamo rappresenterà l'applicazione lineare rispetto ad una base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^2 . Come sarà formata \mathcal{B}' ? La risposta è trovata facilmente riguardando come erano formate le soluzioni dei sistemi incontrati precedentemente: ci accorgiamo, infatti, che le coppie di autovettori sono nient'altro che i vettori di base: tutte le soluzioni sono costruite tramite una loro composizione lineare. Abbiamo dunque $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ora che conosciamo \mathcal{B}' possiamo facilmente individuare la matrice di transizione dalla base canonica di \mathbb{R}^2 a \mathcal{B}' . Si ha:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Necessitiamo ora della sua inversa in modo da poter utilizzare la relazione $S^{-1}BS = A$. Si ha:

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi tutto quello che ci serve per calcolare la nostra matrice nella forma canonica:

$$\begin{aligned} S^{-1}BS &= A \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

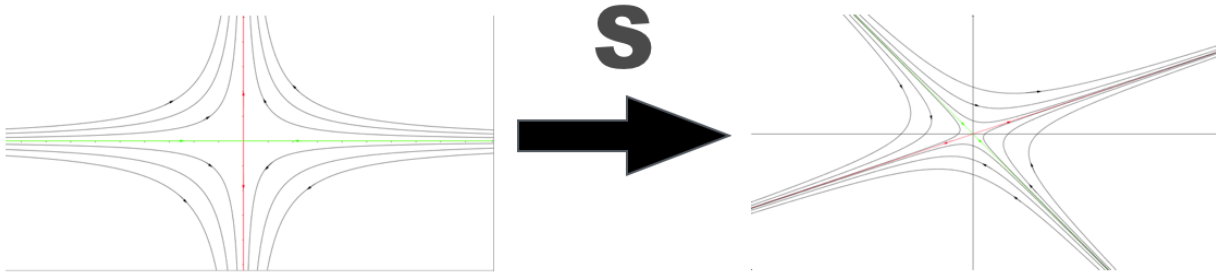


Figura 1.13: Il cambiamento di base nel caso delle matrici A e B discusse. Si nota chiaramente come la matrice S deformi la struttura del piano di fase ruotando il ritratto. Come detto nel testo, infatti, le soluzioni tendono ad avere la stessa pendenza degli autovettori per $t \rightarrow \pm\infty$.

A questo punto occorre spendere qualche parola sulla matrice A trovata: i numeri che compongono la diagonale, infatti, non sono casuali, ma corrispondono ai due autovalori della matrice B iniziale. Questo si dimostra facilmente prendendo una qualsiasi matrice B avente autovalori $\lambda_{1,2}$. Dato che, come già detto sopra, le colonne della matrice del cambiamento di base S sono i propri autovettori, si ha $S\vec{e}_i = \vec{v}_i$, con $i = 1, 2$ e dove \vec{e}_i formano la base standard di \mathbb{R}^2 . Vista la precedente relazione possiamo dire anche che $S^{-1}\vec{v}_i = \vec{e}_i$. Ciò vuol dire che

$$\begin{aligned} A\vec{e}_i &= (S^{-1}BS)\vec{e}_i \\ &= S^{-1}B\vec{v}_i \\ &= S^{-1}\lambda_i\vec{v}_i \\ &= \lambda_i\vec{e}_i. \end{aligned}$$

Dunque la matrice A nella forma canonica è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

1.2.6 Classificazione traccia-determinante

In quest'ultimo sottocapitolo cercheremo di mettere un po' di ordine classificando tutto quanto visto in precedenza grazie alla classificazione traccia-determinante che ora illustreremo.

Consideriamo una matrice generale:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

I suoi autovalori sono dati dagli zeri del polinomio caratteristico, che può essere scritto anche nella seguente forma:

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

dove

$$a + d = \text{tr}(A) \quad \text{e} \quad ad - bc = \det(A).$$

Questa equazione quadratica si risolve quindi con

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)}}{2}. \quad (1.18)$$

Possiamo pure osservare che

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) \quad \text{mentre} \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det(A).$$

Per abbreviare poniamo ora $T = \text{tr}(A)$ e $D = \det(A)$.

A questo punto possiamo classificare ogni matrice inserendola nel piano (T, D) . Il luogo in cui giace il punto nel piano determina la geometria del ritratto di fase. Abbiamo così diversi casi possibili determinabili grazie ai vari parametri che compongono l'equazione (1.18).

Il primo parametro che analizziamo è $\Delta = T^2 - 4D$ con $D > 0$. Esso definisce, nel piano (T, D) una parabola di equazione $D = \frac{1}{4}T^2$ per $\Delta = 0$. Grazie ad esso sappiamo che gli autovalori sono

1. Reali e distinti se $\Delta > 0 \Rightarrow D < \frac{1}{4}T^2$;
2. Reali e ripetuti se $\Delta = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{4}T^2$;
3. Complessi coniugati se $\Delta < 0 \Rightarrow D > \frac{1}{4}T^2$.

Con questa prima catalogazione abbiamo così diviso il nostro piano in due spazi più la parabola che li divide. Andiamo ora a vedere cosa succede all'interno di quest'ultimi. Prendiamo il primo caso che corrisponde alla regione del piano sotto alla parabola definita precedentemente. Osserviamo che possiamo innanzitutto dividere nuovamente questa regione in tre parti, questa volta secondo il parametro D :

- (a) Se $D = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ si ha che un autovalore è positivo e l'altro negativo. Come abbiamo visto nella sezione 1.2.2, in questo spazio troveremo i ritratti di fase rappresentanti una **sella**. In questo caso il parametro T non ha alcuna rilevanza.
- (b) Se $D = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ e $T \neq 0$ abbiamo uno dei due autovalori nullo. Si ha dunque una **varietà centrale**. Se invece $T = 0$ lo sono entrambi.
- (c) Se $D = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ abbiamo due possibilità a dipendenza dal valore di T ; questo deriva dal determinante: esso può essere infatti il prodotto di due autovettori positivi o negativi. Se i due autovettori sono positivi si ha $T > 0$, mentre nell'altro caso $T < 0$. Come abbiamo visto precedentemente siamo in corrispondenza, rispettivamente, di un **pozzo repulsivo** e di un **pozzo attrattivo**.

Abbiamo così ultimato l'analisi della prima parte, quella inferiore, del nostro piano (T, D) . Alziamo un po' lo sguardo e consideriamo la parabola stessa. Su di essa si trovano le configurazioni riferite agli autovalori reali ripetuti. Anche qui il parametro T gioca un ruolo preponderante nella determinazione del senso di percorrenza. Se $T > 0$ gli autovalori sono anch'essi positivi, pertanto

le soluzioni si allontanano dall'origine; mentre se $T < 0$ ci si presenta il caso opposto.

Arriviamo all'ultima parte della nostra analisi: la parte di piano che si trova al di sopra della parabola. In questa regione troviamo le configurazioni i cui autovalori sono complessi. Anche qui abbiamo tre configurazioni possibili, ma tutte dipendono solamente dalla traccia in quanto il determinante è sempre maggiore di 0. Gli autovalori saranno della forma $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, dunque, sapendo che la traccia è la somma dei due autovalori, otteniamo $T = 2\alpha = 2\text{Re}\lambda$.

- (a) Se $T > 0$ allora $\text{Re}\lambda > 0$: in questa regione ci troviamo in corrispondenza di un **fuoco instabile**.
- (b) Se $T = 0$ allora $\text{Re}\lambda = 0$: in questo caso ci sono orbite denominate **centro**.
- (c) Terminiamo con il caso $T < 0$, allora $\text{Re}\lambda < 0$ e abbiamo un **fuoco stabile**.

Considerando e inserendo tutte queste informazioni nel piano (T, D) abbiamo una visione di insieme di tutte le configurazioni possibili suddivise nei sopracitati parametri come possiamo vedere nell'immagine 1.14.

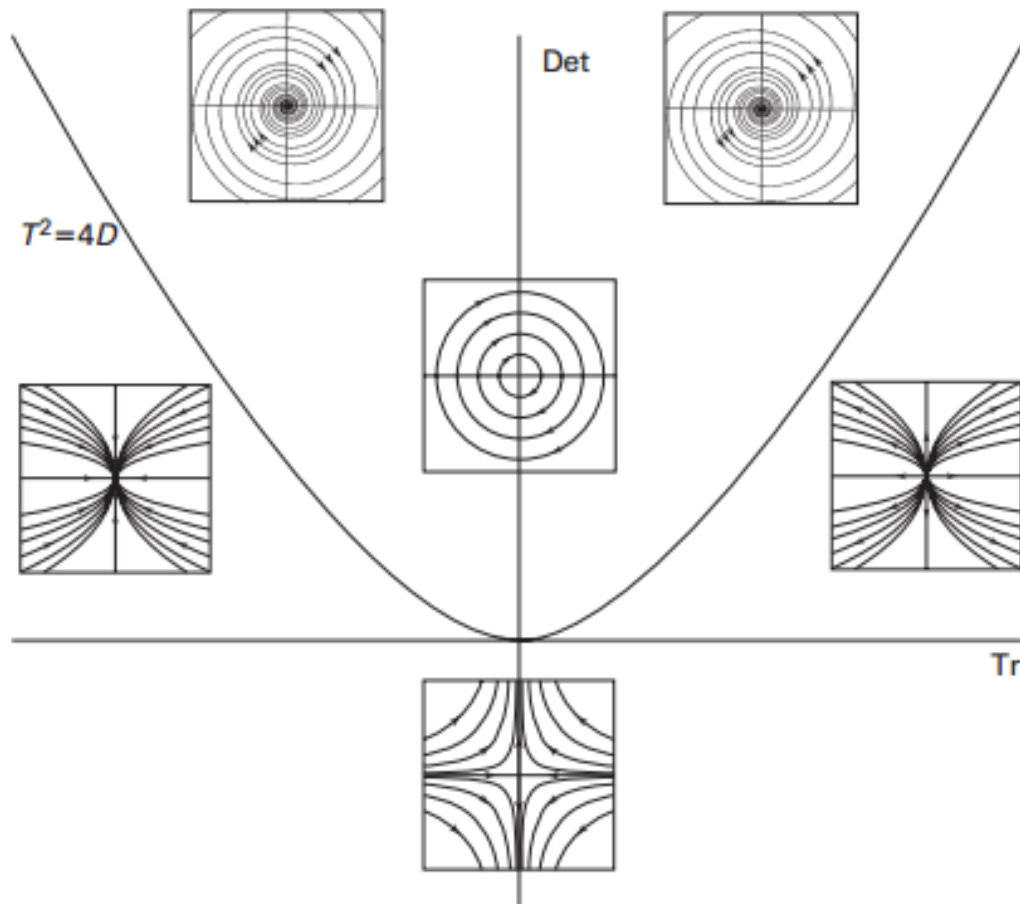


Figura 1.14: La raffigurazione del piano (T, D) . Ad ogni regione corrisponde una configurazione differente del piano delle fasi. Si noti che la configurazione inerente agli autovalori reali ripetuti così come le varietà centrali sono assenti. Come visto sopra, la prima dovrebbe giacere sulla parabola $D = \frac{1}{4}T^2$, mentre la seconda sull'asse della traccia. Dalla raffigurazione si nota che nell'intero piano (T, D) c'è la particolarità che quando $T > 0$ le configurazioni sono instabili e partono da un punto d'equilibrio repulsivo, mentre quando $T < 0$ le configurazioni sono stabili e giungono a un punto di equilibrio attrattivo.

A questo punto sono importanti alcune considerazioni. Per prima cosa, così come già scritto a commento alla figura 1.14, possiamo suddividere il piano (T, D) anche secondo la stabilità delle orbite: a sinistra, quando $T < 0$, ci sono unicamente configurazioni stabili che giungeranno ad un punto di equilibrio attrattivo; mentre a destra, per $T > 0$, ci sono le configurazioni che partono da un punto di equilibrio instabile per poi andarsene all'infinito. Nel caso in cui $T = 0$ sono possibili due situazioni: il centro e la sella. Il primo si può dire che è stabile infatti un'orbita, anche se non arriverà mai ad un punto di equilibrio attrattivo, non tenderà mai a infinito. La seconda, invece, è instabile: le orbite, tranne quelle situate sulla varietà stabile, per $t \rightarrow +\infty$ tenderanno a infinito.

Secondariamente occorre osservare che il piano traccia-determinante è una rappresentazione bi-dimensionale di quella che, in realtà è a quattro dimensioni: dato che le matrici considerate sono quadrate di ordine due, esse sono determinate da quattro parametri; le loro componenti. Dunque ci sono infinitamente più matrici che corrispondono ad ogni punto del piano. Nonostante tutte queste matrici abbiano le stesse configurazioni, ci possono essere sottili differenze nei ritratti di fase, come ad esempio la direzione di rotazione per centri, fuochi stabili e instabili.

Per finire osserviamo che possiamo ottenere delle informazioni sulle caratteristiche del sistema lineare solo grazie alla traccia e al determinante senza dover calcolare gli autovalori. Prendiamo, infatti, come esempio il pendolo semplice: la matrice riferita all'origine è la seguente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso abbiamo $T = 0$ e $D = 1$. Vista la classificazione fatta precedentemente possiamo concludere immediatamente dicendo che si tratta di un centro, esattamente come visto nella prima sezione.

1.3 Pendolo smorzato

1.3.1 Descrizione iniziale del problema

Passiamo ora al secondo sistema che descriveremo in questo lavoro: il pendolo smorzato. Si tratta di un pendolo semplice al quale è però aggiunto l'attrito. La seconda legge di Newton rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$ è applicata come segue:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_p + \vec{T} + \vec{F}_A \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} ma_r &= F_r \\ ma_\theta &= F_\theta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 &= mg \cos \theta - T \\ mr\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta - \kappa r\dot{\theta}, \end{cases} \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato $r = \text{costante}, \kappa \in \mathbb{R}_+$. Poniamo ora $r = \ell$; grazie alla seconda equazione si giunge facilmente a

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{\kappa}{m} \dot{\theta}.$$

Analogamente a quanto già fatto precedentemente con il pendolo semplice, semplifichiamo quest'ultima equazione in modo da togliere parametri inutili ai fini della nostra analisi (per ulteriori chiarimenti vedere l'equazione (1.2) e paragrafo precedente). L'equazione semplificata è della forma:

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta - \alpha \dot{\theta}, \quad (1.19)$$

dove $\alpha = \frac{\kappa}{m} \omega_0^{-2} \geq 0$, $\omega_0 = \frac{g}{\ell}$.

Abbiamo così il nostro sistema di EDO inerente al pendolo smorzato:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin \theta - \alpha \omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Cerchiamo ora i punti di equilibrio del nostro sistema nello spazio delle fasi, sempre ricordandoci che $\theta \in]-\pi, \pi]$. I punti di equilibrio che consideriamo sono reperiti risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = \omega \\ 0 = -\sin \theta - \alpha \omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \theta = 0, \pi. \end{cases}$$

Otteniamo due punti di equilibrio: $\vec{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{x}_2^* = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3.2 Linearizzazione

Eseguiamo la linearizzazione dell'EDO attorno a questi due punti determinando la matrice di Jacobi inerente ad essi. Si ha quindi

$$D\vec{f}(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Il sistema linearizzato attorno all'origine è dunque

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \theta = 0.$$

Il polinomio caratteristico inerente a questa matrice è dato da:

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1,$$

mentre le sue soluzioni sono:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

Per poter discutere meglio la soluzione trovata poniamo $\alpha = 2\beta$. Si ha dunque

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4}}{2}$$

\Leftrightarrow

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (1.21)$$

La soluzione (1.21) può essere discussa in base al parametro β . Si hanno quattro possibilità:

\rightarrow Se $\beta = 0$ allora $\lambda_{\pm} = \pm i$. Grazie a quanto visto nella sezione precedente possiamo concludere direttamente dicendo che in questo caso siamo di fronte ad un **centro**. È certamente interessante notare come questo caso, dal punto di vista fisico, corrisponda esattamente alla situazione studiata nella prima sezione: il parametro β che discutiamo rappresenta l'attrito, dunque se esso è nullo ci riconduciamo al pendolo semplice. Studiamo la situazione dal punto di vista dell'andamento dell'ampiezza in funzione del tempo ricostruendo l'equazione (1.12) in questo caso specifico. Dato che stiamo trattando anche numeri complessi, occorre precisare che la soluzione di $\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$ è la parte reale dell'equazione sopracitata. Calcolando gli autovettori, troviamo

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{pmatrix},$$

da cui

$$\eta = V^{-1} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_0 - i\omega_0 \\ \theta_0 + i\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Dunque possiamo calcolare l'ampiezza in funzione dell'angolo, il cui risultato è il seguente:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \operatorname{Re} [\eta_x e^{it} + \eta_y e^{-it}] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (\theta_0 - i\omega_0) e^{it} + \frac{1}{2} (\theta_0 + i\omega_0) e^{-it} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} (\theta_0 - i\omega_0) (\cos(t) + i \sin(t)) + \frac{1}{2} (\theta_0 + i\omega_0) (\cos(-t) + i \sin(-t)) \right] \\ &= \theta_0 \cos(t) + \omega_0 \sin(t). \end{aligned}$$

In questo caso, allora, l'ampiezza rispetto al tempo è una sinusoidale: l'angolo θ aumenta e diminuisce periodicamente dato che non vi è nessun attrito che lo frena. Un esempio è visibile in figura 1.15.

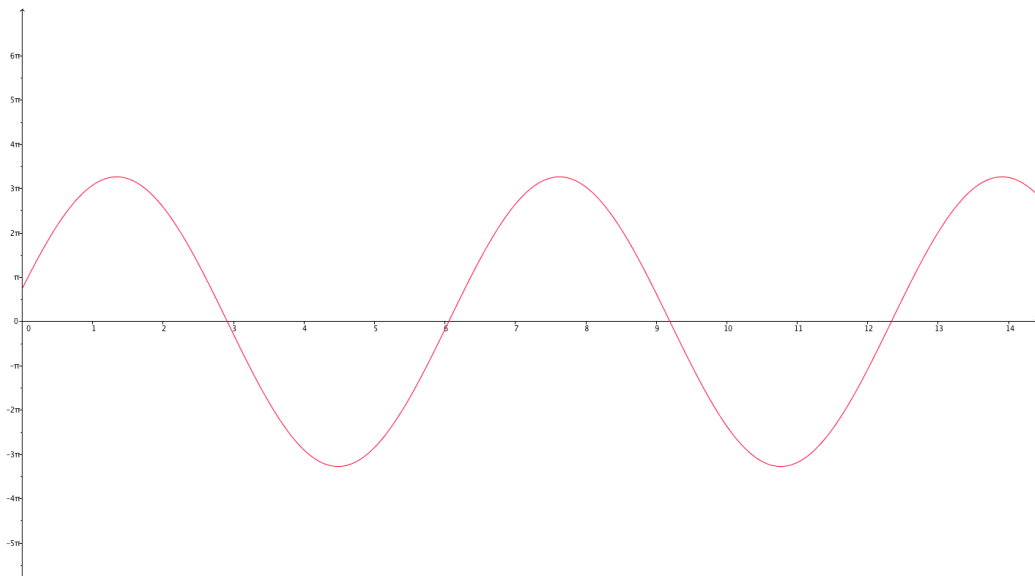


Figura 1.15: Simulazione dell'andamento di $\theta(t)$, realizzata grazie al programma *GeoGebra*, per le condizioni iniziali $\theta_0 = \frac{3}{4}\pi$ radianti, $\omega_0 = 10$ radianti al secondo. In questo caso la funzione risultante è una semplice sinusoidale.

→ Se $0 < \beta < 1$ allora $\operatorname{Re}\lambda_{\pm} = -\beta$. In questo caso le soluzioni assumono la configurazione di un **fuoco stabile**: il pendolo continua ad oscillare, anche se inizia ad essere frenato perciò ad un certo punto si fermerà. Questo è confermato anche dall'analisi dell'ampiezza in funzione del tempo. Si ha:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Calcolando gli autovettori troviamo che $\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2} \end{pmatrix}$, perciò la matrice V corrisponde a

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\beta + i\sqrt{1 - \beta^2} & -\beta - i\sqrt{1 - \beta^2} \end{pmatrix},$$

mentre il parametro η vale:

$$\begin{aligned}
 \eta &= -\frac{1}{2i\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta - i\sqrt{1-\beta^2} & -1 \\ \beta - i\sqrt{1-\beta^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-i}{2\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{i\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i}{2\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\theta_0}{2} - \frac{i\beta\theta_0}{2\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-i\theta_0}{2\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\omega_0}{2} + \frac{i\beta\omega_0}{2\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{i\omega_0}{2\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_0 - i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \theta_0 + i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Abbiamo tutto quello che ci serve per calcolare $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\beta t} \left[\left(\theta_0 - i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) e^{it\sqrt{1-\beta^2}} + \left(\theta_0 + i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) e^{-it\sqrt{1-\beta^2}} \right] \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\beta t} \left[\left(\theta_0 - i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) (\cos(t\sqrt{1-\beta^2}) + i\sin(t\sqrt{1-\beta^2})) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\theta_0 + i\frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) (\cos(-t\sqrt{1-\beta^2}) + i\sin(-t\sqrt{1-\beta^2})) \right] \right\} \\
 &= e^{-\beta t} \left[\theta_0 \cos(t\sqrt{1-\beta^2}) + \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin(t\sqrt{1-\beta^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Una rappresentazione di questa funzione è visibile in figura 1.16. In questo caso si dice che c'è **smorzamento sotto-critico**.

→ Se $\beta = 1$ allora $\lambda_+ = \lambda_- = -1$. Gli autovalori sono ripetuti e si può verificare facilmente che ad essi corrisponde un solo autovettore, pertanto ci troviamo confrontati con un **nodo improprio stabile**. Le soluzioni si dirigono verso il centro a causa di un attrito che inizia ad essere molto importante: il pendolo si arresta, infatti, quasi immediatamente. Vediamo come questo si ripercuote sull'ampiezza.

In questo caso ci è impossibile determinare l'andamento di $\theta(t)$ così come fatto sin qui poiché agli autovalori $\lambda_{1,2}$ corrispondono gli autovettori $\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e quindi la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ che ne risulta non è invertibile in quanto $\det V = 0$. Per questo bisogna adottare un altro procedimento per trovare la funzione $\theta(t)$. Esso è illustrato qui di seguito. Si può innanzitutto dimostrare che, dato un sistema lineare planare della forma $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, la soluzione di \vec{x} rispetto a t è data da:

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0.$$

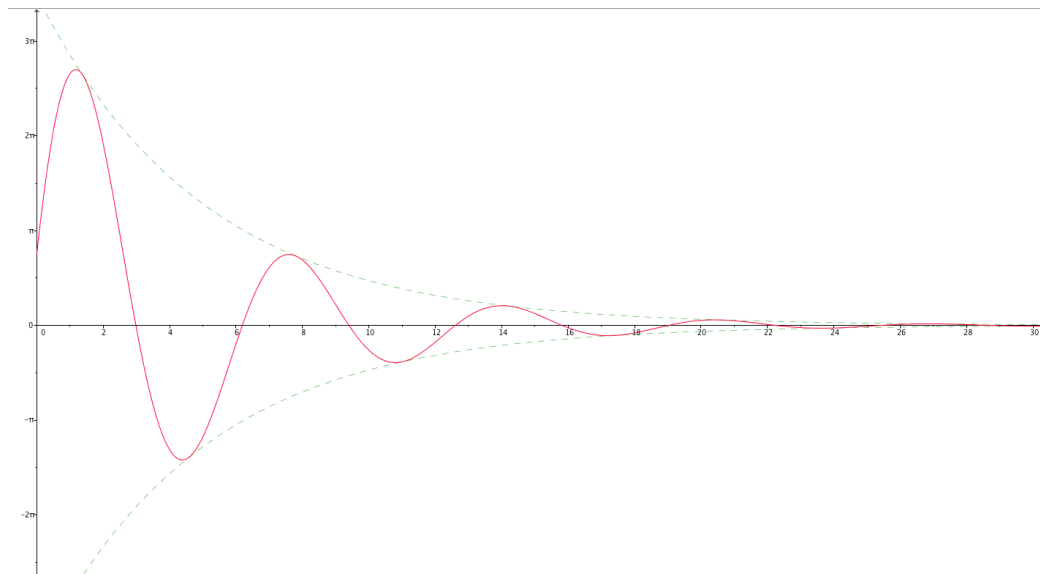


Figura 1.16: Realizzazione tramite *GeoGebra* della funzione $\theta(t)$, nei primi 30 secondi di oscillazione, per $\beta = \frac{1}{5}$, mentre le condizioni iniziali sono nuovamente $\theta_0 = \frac{3}{4}\pi$ radianti, $\omega_0 = 10$ radianti al secondo. L'attrito si fa sentire frenando il pendolo, man mano che avanza il tempo, la cui ampiezza massima raggiunta durante un'oscillazione diminuisce proporzionalmente alle funzioni $f(t) = \pm e^{-\frac{1}{5}t}$. Questa dipendenza è visibile nell'immagine tramite le funzioni tratteggiate in verde.

Come fare per utilizzare questo risultato collegandolo alla nostra matrice V ? Basta ricordarsi che A , nel caso della linearizzazione delle equazioni differenziali ordinarie, è la matrice di Jacobi, che qui corrisponde a

$$D\vec{f}(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Scomponiamola in modo da avere $D\vec{f} = S + N$. A questo punto utilizziamo la relazione:

$$\text{se } A = S + N \text{ con } SN - NS = 0, \text{ allora } e^{At} = e^{St+Nt} = e^{St}e^{Nt}.$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$D\vec{f}(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1} + V.$$

Dato che

$$\begin{aligned} D\vec{f} &= (-\mathbb{1})V - V(-\mathbb{1}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$e^{(D\vec{f})t} = e^{(-\mathbb{1})t+Vt} = e^{(-\mathbb{1})t}e^{Vt}.$$

A questo punto usiamo la generalizzazione dello sviluppo di Taylor per le matrici:

$$\forall B \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{vale :} \quad e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!},$$

da cui si ricava:

$$e^{Vt} = \mathbb{1} + Vt + \underbrace{\frac{V^2t}{2} + \dots}_{=0 \text{ dato che } V^2=0},$$

$$e^{(-\mathbb{1})t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mathbb{1})^n t^n}{n!}.$$

Dato che

$$(-\mathbb{1})^n t^n = \begin{pmatrix} (-t^n) & 0 \\ 0 & (-t^n) \end{pmatrix},$$

si ha:

$$\begin{aligned} e^{(-\mathbb{1})t} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mathbb{1})^n t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-t^n)}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{(-t^n)}{n!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbb{1}e^{-t}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} &= \mathbb{1}e^{-t}(\mathbb{1} + Vt) \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}(\mathbb{1} + Vt) \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \theta_0 + \theta_0 t + \omega_0 t \\ -\theta_0 t + \omega_0 - \omega_0 t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} [\theta_0 + (\theta_0 + \omega_0)t] \\ e^{-t} [\theta_0 - (\theta_0 + \omega_0)t] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si conclude pertanto osservando come la funzione dell'ampiezza rispetto al tempo è data da:

$$\theta(t) = e^{-t} [\theta_0 + (\theta_0 + \omega_0)t],$$

Il cui grafico è visibile nell'immagine 1.17. In questo caso si parla di **smorzamento critico**.

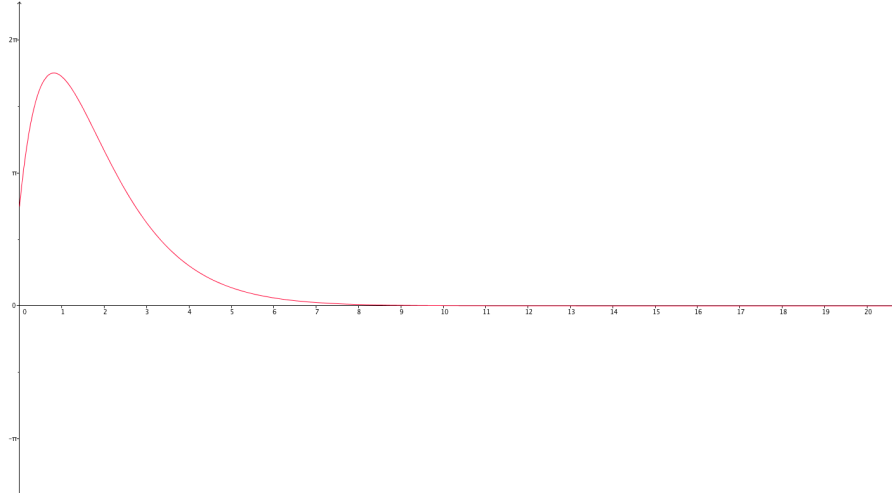


Figura 1.17: Grafico di $\theta(t)$ per $\beta = 1$, nei primi 20 secondi di oscillazione, con le condizioni iniziali $\theta_0 = \frac{3}{4}\pi$ radianti, $\omega_0 = 10$ radianti al secondo. L'attrito è forte al punto da non più permettere al pendolo di avere ampiezze negative: la funzione, tranne un breve attimo iniziale è sempre decrescente e si arresterà per $t \rightarrow +\infty$ al punto d'equilibrio stabile $\theta = 0$. L'angolo diventa pressoché nullo dopo un tempo di circa 8 secondi. A titolo di paragone, è la stessa situazione che si otterrebbe se si facesse oscillare una massa di un grammo attaccata ad una fune lunga 9,81 metri in acqua, il cui coefficiente di attrito viscoso è $\kappa = 10^{-3}$ Pa.s. L'immagine è stata realizzata grazie a *GeoGebra*.

→ Se $\beta > 1$ allora $\lambda_+ \neq \lambda_-$, ma in ogni caso $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}^*$. Dunque l'ultima configurazione possibile è un **pozzo attrattivo** nel quale l'attrito diventa sempre più considerevole. Lo si vede bene nell'andamento di $\theta(t)$. Si ha:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1},$$

da cui si trova la matrice V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} & -\beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \end{pmatrix}.$$

In questo caso il parametro η corrisponde a:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} \begin{pmatrix} \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} & 1 \\ -\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} & \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} & \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\theta_0}{2} + \frac{\beta\theta_0}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} + \frac{\omega_0}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ \frac{\theta_0}{2} - \frac{\beta\theta_0}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} + \frac{\omega_0}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_0 + \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \\ \theta_0 + \frac{\omega_0 - \beta\theta_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ne consegue:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})t} + \frac{1}{2} \left(\theta_0 - \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})t}.$$

Vediamo nell'immagine 1.18 come si comporta la funzione $\theta(t)$. In questo caso si parla di **smorzamento sovra-critico**.

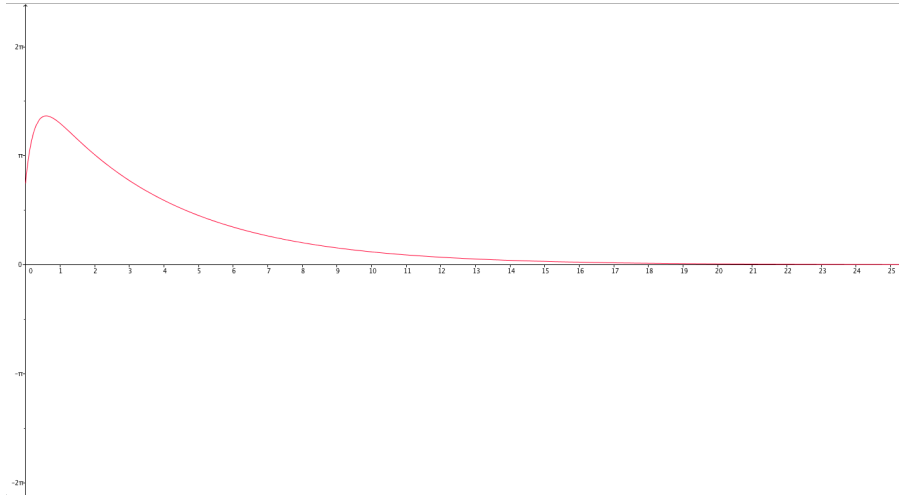


Figura 1.18: L'andamento di $\theta(t)$ per $\beta = 2$, nei primi 25 secondi di oscillazione, sempre nelle medesime condizioni iniziali dei tre esempi sopra. Anche in questo caso, come nella situazione inerente a $\beta = 1$, salvo un breve periodo iniziale, la funzione è decrescente e tenderà velocemente all'angolo 0. Si nota però che, rispetto al caso precedente, il tempo impiegato per raggiungere le vicinanze del punto attrattivo è nettamente maggiore in quanto si può dire che l'angolo è pressoché nullo solo dopo quasi una ventina di secondi. La causa di questo comportamento è da ricercare nell'attrito che rallenta in modo estremamente importante il pendolo. Anche in questo caso, per realizzare il grafico si è utilizzato il programma *GeoGebra*.

Passiamo ora all'altro punto di equilibrio. Si ha:

$$D\vec{f}(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

Il sistema linearizzato attorno al secondo punto di equilibrio è pertanto

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} - \theta = 0.$$

da cui il polinomio caratteristico

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda - 1$$

e le sue soluzioni:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}.$$

Anche in questo caso è più facile sostituire il parametro α con il β già introdotto sopra (si ricorda dunque che $\alpha = 2\beta$). Le soluzioni diventano dunque:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 1}. \quad (1.22)$$

A prima vista sembrerebbe che si può concludere direttamente dicendo che gli autovalori sono sempre uno positivo e uno negativo e che quindi si ha un punto di sella per ogni β . Questo vale però solo se $\beta = 0$, ossia nel caso conservativo che corrisponde al pendolo semplice. In questa situazione, così come abbiamo visto nel paragrafo 1.2.4, le orbite sono soluzioni dell'equazione

$$x(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t,$$

perciò tutte le soluzioni dopo un certo tempo ripassano dalla stessa posizione. Questo vale ovviamente anche per le separatrici che, ricordiamo³, congiungono tutti i punti di equilibrio instabili. C'è perciò una divisione netta fra la zona delle rotazioni da quella delle librazioni.

Nel caso dissipativo invece, dunque se $\beta \neq 0$, le soluzioni seguono la legge

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Non si hanno perciò periodicità e di conseguenza non vi è nessuna orbita che può essere definita come una separatrice. Viene a cadere la separazione fra rotazioni e librazioni e i punti di equilibrio instabili potranno essere raggiunti solo per $\beta \ll 1$ e, soprattutto, solo una volta sola; dopodiché l'orbita si dirigerà più o meno velocemente, a dipendenza del valore del parametro β , verso l'origine.

Ricordandoci che esso rappresenta l'attrito si può concludere dicendo che maggiore è l'attrito, più è difficile raggiungere i punti di equilibrio repulsivi e più velocemente l'orbita si dirigerà verso il punto di equilibrio attrattivo. Questo è ben visibile nel ritratto di fase.

1.3.3 Spazio delle fasi

La raffigurazione dello spazio delle fasi, visibile nella figura 1.19, riassume e fissa efficacemente tutto quanto detto sopra. Anche se, date le quattro possibilità discusse parlando del punto di equilibrio attrattivo, si avranno quattro ritratti di fase differenti, in tutti i casi si osserva che il punto $(0, 0)$ è il punto di convergenza delle soluzioni per $t \rightarrow +\infty$. Per questo, esso è l'**attrattore** verso il quale convergono tutte le orbite che partono da una qualsiasi condizione iniziale diversa da quelle in coincidenza con i punti fissi repulsivi. Questo attrattore è un punto, quindi, dal punto di vista geometrico, è un insieme di dimensione 0. Nel prossimo capitolo vedremo che esistono anche degli attrattori di dimensione 1, cioè delle curve, verso le quali le orbite convergeranno per grandi tempi.

³Per ulteriori chiarimenti vedi paragrafo 1.1.2.

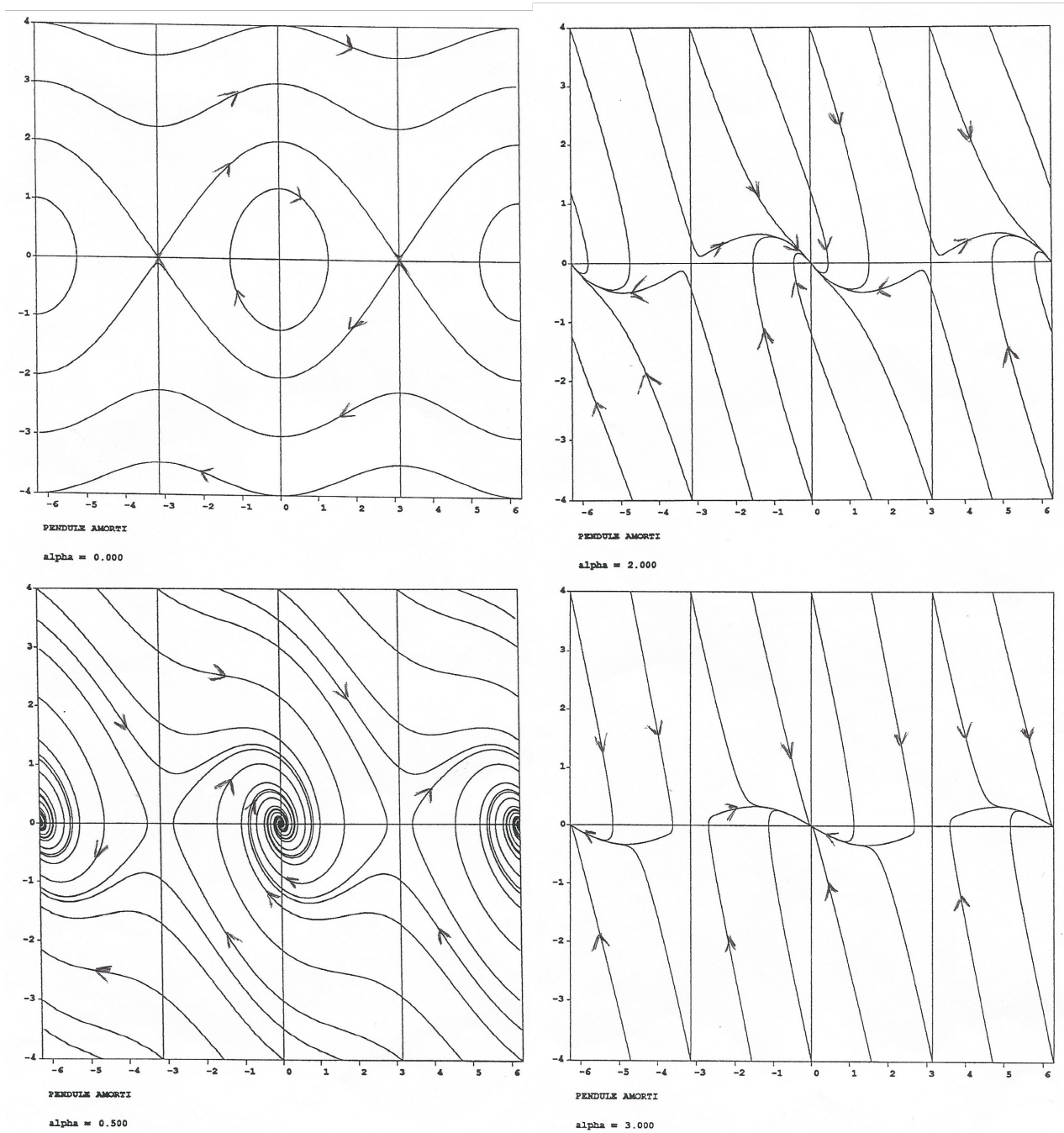


Figura 1.19: Le quattro possibili configurazioni dello spazio delle fasi per $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$. Si osserva chiaramente la dipendenza del parametro α che determina il tempo d'arresto a causa dell'attrito.

Capitolo 2

Oscillazioni intrattenute

2.1 Il ciclo limite

2.1.1 Il modello di Lotka-Volterra: prede e predatori

Per introdurre il fenomeno del ciclo limite esuliamo un po' dai sistemi analizzati finora e consideriamo il modello preda-predatore proposto e studiato attorno al 1930 da Lotka¹ e da Volterra². Si tratta di un sistema di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 definito come segue:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. La sua interpretazione è la seguente: in un ambiente chiuso vivono due specie x e y , rispettivamente preda e predatore. Per attualizzare il discorso, dato che è in atto il ripopolamento dei grandi predatori nelle alpi, potremmo dire che x è un gregge di pecore, mentre y rappresenta un branco di lupi.

In assenza di lupi, le pecore si moltiplicherebbero esponenzialmente: $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$, mentre se ci fossero solo lupi, essi non avrebbero nulla da mangiare, dunque si estinguerebbero secondo la legge $y(t) = y_0 e^{-\gamma t}$. Dunque α è il fattore di crescita delle pecore in assenza di lupi, mentre γ il fattore di decrescita dei lupi in assenza di pecore. L'incontro di una preda con un predatore, il quale ha frequenza proporzionale al prodotto xy , produce una decrescita di pecore e un aumento di lupi di cui il ritmo è regolato dalle costanti β e δ che sono dunque, rispettivamente, il tasso di riduzione e di crescita delle popolazioni quando il gregge e il branco vengono a contatto.

Si vede immediatamente che \dot{x} si annulla sulle rette $x = 0$ e $y = \frac{\alpha}{\beta}$, e analogamente \dot{y} si annulla sulle rette $y = 0$ e $x = \frac{\gamma}{\delta}$. Vi sono perciò due punti di equilibrio: l'origine e il punto $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Essi rappresentano, rispettivamente, la situazione in cui entrambe le specie sono estinte e quella in cui per ogni pecora mangiata ce n'è una nata, in modo che per entrambi i casi il numero complessivo di specie resta sempre costante. Analizziamo rapidamente cosa succede attorno ai punti di equilibrio.

Linearizzando il sistema si ottiene la matrice di Jacobi:

$$D\vec{f}(\vec{x}^*) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

Attorno al punto \vec{x}_1^* , che corrisponde all'origine, si trovano come autovalori $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\gamma$. Dato che α e γ sono quantità positive, i segni dei due autovalori sono sempre opposti e di

¹Alfred James Lotka (Leopoli, 2 marzo 1880 – New York, 5 dicembre 1949) è stato un matematico, statistico e chimico fisico statunitense, famoso per i suoi lavori sulla dinamica delle popolazioni e l'energetica.

²Vito Volterra (Ancona, 3 maggio 1860 – Roma, 11 ottobre 1940) è stato un matematico e fisico italiano. Il suo nome è noto soprattutto per i suoi contributi alla biologia matematica. Fu inoltre uno dei principali fondatori dell'analisi funzionale (studio di spazi di funzioni) e della teoria delle equazioni integrali.

conseguenza l'origine è un punto di sella; esso è instabile e perciò è praticamente impossibile raggiungerlo. Questo è confermato se pensiamo al caso pratico: ciò può accadere solo se le pecore vengono estinte completamente in modo artificiale, dato che altrimenti, in caso di penuria di pecore, anche i lupi comincerebbero a morire. Una morte improvvisa di tutte le prede causerebbe l'estinzione dei lupi per mancanza di cibo. Se invece fossero i lupi ad estinguersi, la popolazione delle prede crescerebbe senza limite.

La matrice di Jacobi calcolata riferendosi all'altro punto fisso $\vec{x}_2^* = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ ci conduce agli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$, perciò possiamo concludere dicendo che il punto di equilibrio \vec{x}_2^* è un centro, il che significa che il livello dei predatori e delle prede è ciclico e oscilla attorno a questo punto fisso. Questa situazione è rappresentata nella figura 2.1. L'andamento periodico lo si riscontra

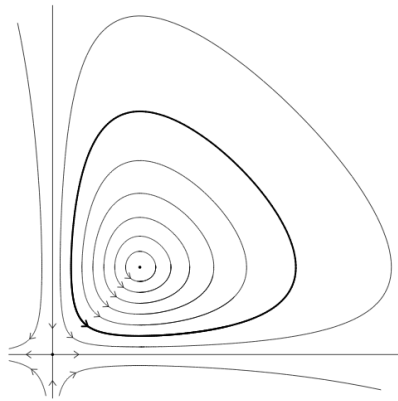


Figura 2.1: Nella figura si vedono le orbite attorno al punto di equilibrio centrale e la sella.

anche studiando il numero di prede e predatori in funzione del tempo. Come si vede nell'immagine 2.2, il moto è periodico, ma non si tratta dell'unica particolarità: il picco relativo alle prede, infatti, precede sempre quello dei predatori. A livello concettuale, ciò è facile da intuire: le pecore

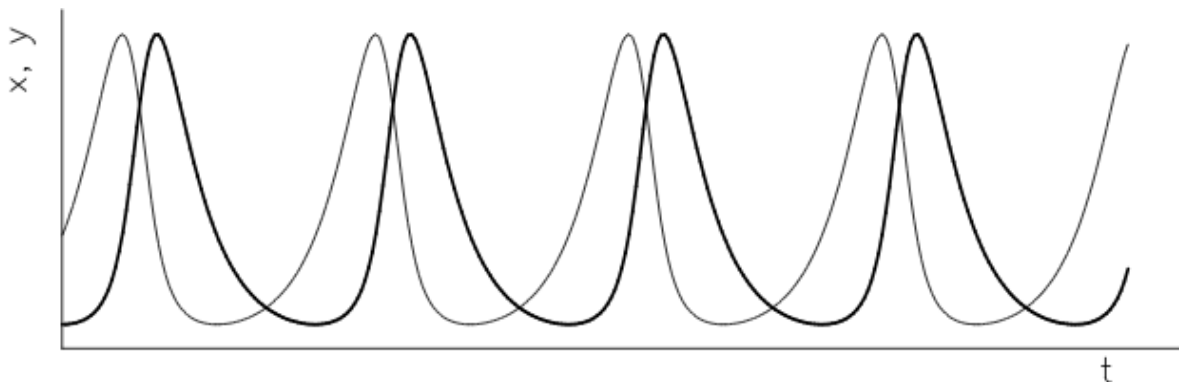


Figura 2.2: La figura rappresenta l'andamento regolare e periodico del numero di prede (linea fine) e predatori (linea in grassetto) in funzione del tempo. Si può pure notare la traslazione del picco dei predatori a destra rispetto a quello delle prede.

prosperano quando non ci sono molti lupi, ma quando esse sono troppe i lupi si moltiplicano facendo calare il numero di pecore. Questa situazione causerà, a sua volta, la diminuzione del numero di lupi, dato che moriranno di fame.

Fin qui non c'è quasi nulla di particolare: le soluzioni seguono orbite ben precise ripassando sempre dal punto iniziale, esattamente come succede nel caso del pendolo semplice. Ma è sempre

così? La risposta è no: per determinati valori delle costanti si può infatti avere un andamento differente. In particolare questo succede quando α, δ sono prossime a 0 mentre β, γ assumono valori elevati. Questo caso è mostrato nella simulazione, ottenuta grazie al sito internet *www.aw-bc.com*, presente in figura 2.3. Cosa succede dal punto di vista pratico? La situazione corrisponde al caso in cui le pecore nascono difficilmente e decedono facilmente; mentre i lupi muoiono molto velocemente in assenza di prede e hanno bisogno di tanto cibo (di stare per molto tempo a contatto con il gregge) per proliferare. La configurazione risultante è un avvicinamento progressivo ad un'orbita periodica: questo caso è detto **ciclo limite** e verrà analizzato più nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

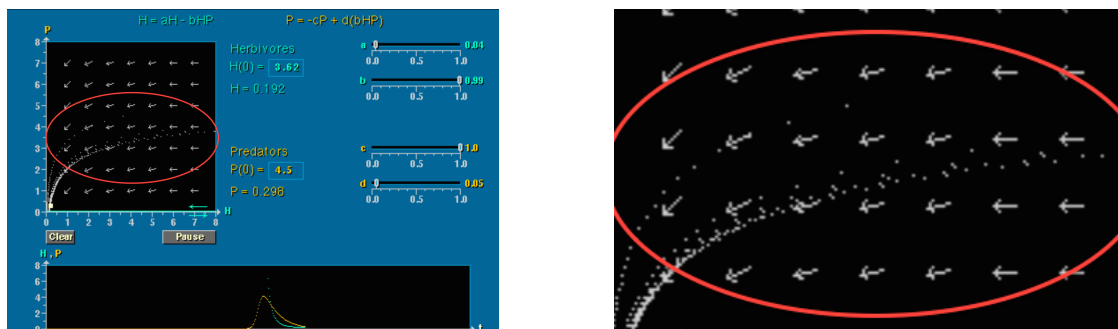


Figura 2.3: All'interno dell'ovale rosso si vede ciò che accade per un ciclo limite: le traiettorie non ripassano dal punto iniziale, ma tendono asintoticamente ad un'orbita. Quest'orbita è il ciclo limite.

Per concludere si può osservare che questo è un modello minimo, nel senso che è possibile aggiungere altri parametri e cambiare il sistema. Facciamo un esempio: se ipotizzassimo che ci sia una competizione fra le prede, si può dimostrare che il sistema diventerebbe

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2 \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \quad (2.2)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$.

Le traiettorie, come si può vedere nell'immagine 2.4, per ε piccolo confluiscono a spirale verso il punto d'equilibrio $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\varepsilon\gamma}{\beta\delta})$, che diverrebbe un fuoco stabile.

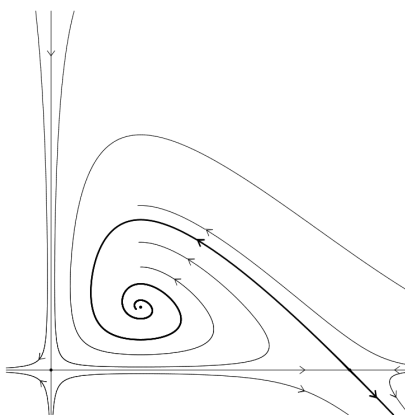


Figura 2.4: Nell'immagine si può osservare il cambiamento della configurazione nel caso dell'aggiunta di un fattore di competizione fra le prede: le traiettorie tendono ad una soluzione stabile.

2.1.2 Orologi e ciclo limite

Lasciamo i lupi e le pecore e occupiamoci ora di un tipo di oscillazione vicino alla nostra vita di tutti i giorni che ci mostrerà più nel dettaglio cosa è il ciclo limite. La domanda che ci si pone è: come funziona un orologio meccanico? Appare sin da subito evidente che le due configurazioni descritte fin qui in questo lavoro (pendolo semplice e pendolo smorzato) non soddisfano le nostre esigenze.

Innanzitutto parliamo del fenomeno dissipativo: il pendolo semplice è sì interessante e facile da descrivere matematicamente, ma purtroppo è impossibile da realizzare realmente dato che un attrito, seppur piccolo o apparentemente insignificante è sempre presente. Questo attrito potrebbe essere rappresentato dal pendolo smorzato, ma anche qui abbiamo un problema: esso non basta poiché ci ritroveremmo con un orologio che rimane sistematicamente indietro, cosa che non credo interessi a molti.

C'è inoltre un altro aspetto da considerare: mentre il pendolo semplice ha un continuo moto periodico di ampiezza qualsiasi fissata dalle condizioni iniziali, l'orologio (o forse è ancor più facile immaginare un comune orologio a pendolo) ha un unico moto periodico di una ben definita ampiezza. Questo, inoltre, vale in ogni caso: anche se viene messo in funzione con un'altra apertura iniziale, esso ritorna, asintoticamente, a questo moto particolare. La presenza di un singolo moto periodico con un fissato periodo è essenziale per l'orologio meccanico; non si deve dunque in nessun modo dipendere dalle condizioni iniziali.

Occorre pertanto trovare un sistema che presenti una singola traiettoria chiusa, alla quale si accostino asintoticamente le traiettorie vicine. A traiettorie di questo tipo fu dato da Poincaré il nome di **ciclo limite**. Una sua definizione formale è la seguente:

Definizione 1. Una curva chiusa \mathcal{C} priva di punti critici si dice essere un **ciclo limite stabile** per il sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ in \mathbb{R}^2 , se esiste un insieme aperto \mathcal{B} contenente \mathcal{C} tale che per ogni dato iniziale $\vec{x}_0 \in \mathcal{B}$ si ha:

$$\text{dist}(\vec{x}(t, \vec{x}_0), \mathcal{C}) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty.$$

Al contrario, essa si dice essere un **ciclo limite instabile** se, con le stesse condizioni espresse precedentemente, si ha:

$$\text{dist}(\vec{x}(t, \vec{x}_0), \mathcal{C}) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow -\infty.$$

Per continuità si avrà necessariamente che \mathcal{C} è una traiettoria, mentre l'insieme aperto \mathcal{B} è chiamato **bacino di attrazione** del ciclo limite.

Data la sua caratteristica di attirare a sé le traiettorie vicine, il ciclo limite è un **attrattore stabile**.

Passiamo ora ad analizzare un esempio costruito per rappresentare quello che avviene realmente in un orologio. Esso si ottiene a partire da un pendolo smorzato ma, come abbiamo già detto sopra, esso non è sufficiente. Ecco quindi la soluzione: l'aggiunta di un termine impulsivo.

Consideriamo dunque un pendolo debolmente smorzato di equazione

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - 2\mu v \end{cases}$$

e fissiamo un dato iniziale $(0, v_0)$ sulla semiretta $x = 0$, $v > 0$. Parlando del pendolo smorzato eravamo giunti alla conclusione che un sistema di questo tipo corrisponde alla rappresentazione di un fuoco stabile il quale si muove secondo la legge

$$x(t) = e^{-\mu t} \left[x_0 \cos(t\sqrt{1-\mu^2}) + \frac{v_0 + \mu x_0}{\sqrt{1-\mu^2}} \sin(t\sqrt{1-\mu^2}) \right],$$

ma dato che $x_0 = 0$, la possiamo semplificare ricavando un sistema della seguente forma:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\sigma} e^{-\mu t} \sin(\sigma t) \\ v(t) = v_0 e^{-\mu t} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin(\sigma t) + \cos(\sigma t) \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

dove $\sigma = \sqrt{1 - \mu^2}$, mentre l'equazione della velocità è stata ottenuta semplicemente derivando la posizione. L'orbita riattraversa la semiretta a intervalli regolari di tempo $T = \frac{2\pi}{\sigma}$, in corrispondenza a valori di velocità v_1, v_2, \dots decrescenti, si veda l'immagine 2.5 a sinistra. Dall'equazione

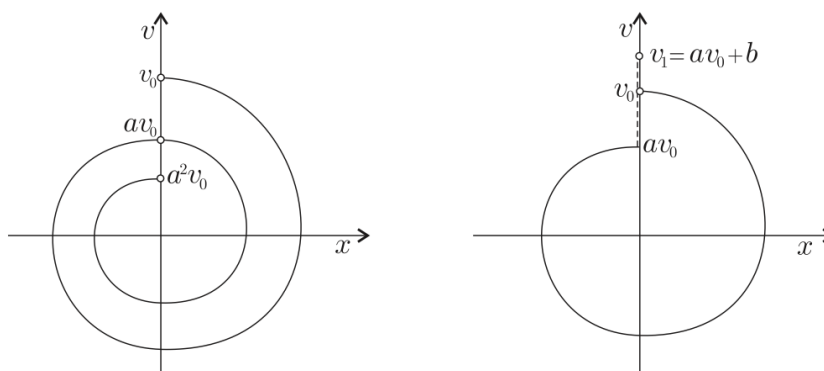


Figura 2.5: L'oscillatore senza e con l'aggiunta del termine forzante impulsivo, che agisce quando si raggiunge la semiretta $x = 0$, descritta nel testo.

(2.3) si ha:

$$\begin{aligned} v(T) &= v_0 e^{(-\mu T)} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin(\sigma T) + \cos(\sigma T) \right) \\ &= v_0 e^{(-\mu \frac{2\pi}{\sigma})} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin(\sigma \frac{2\pi}{\sigma}) + \cos(\sigma \frac{2\pi}{\sigma}) \right) \\ &= v_0 e^{(-\mu T)}; \\ v(2T) &= v_0 e^{(-\mu 2T)} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin(\sigma 2T) + \cos(\sigma 2T) \right) \\ &= v_0 e^{(-\mu \frac{4\pi}{\sigma})} \left(-\frac{\mu}{\sigma} \sin(\sigma \frac{4\pi}{\sigma}) + \cos(\sigma \frac{4\pi}{\sigma}) \right) \\ &= v_0 e^{(-2\mu T)}; \\ v(3T) &= v_0 e^{(-3\mu T)}; \\ &\dots \end{aligned}$$

e così via. Si ricava dunque la legge

$$v_{k+1} = av_k, \quad a = e^{-\mu T} < 1$$

che dà

$$v_k = a^k v_0.$$

Aggiungiamo ora al sistema il termine impulsivo, che agisce nel modo seguente: nell'istante in cui la variabile x passa per lo zero con $v > 0$ si trasmette all'oscillatore un impulso istantaneo positivo in modo da incrementarne la velocità di una quantità fissa $b > 0$ esso è rappresentato nella figura 2.5 a destra. Possiamo immaginare questo ultimo passaggio come un urto che il nostro pendolo subisce, da un dispositivo, al passaggio di x sullo zero. È quello che si chiama meccanismo di scappamento dell'orologio, il più comune è quello chiamato scappamento ad ancora raffigurato nell'immagine 2.6.

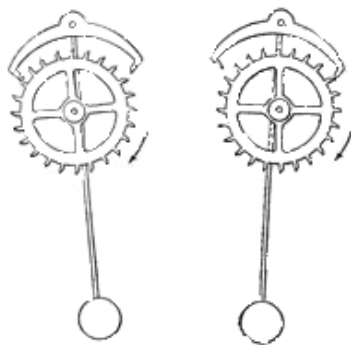


Figura 2.6: La raffigurazione del meccanismo di scappamento ad ancora: esso in genere è mosso da una molla o da un peso che aziona l'ingranaggio.

Ma torniamo al nostro problema nel suo aspetto matematico. Al primo passaggio si avrà velocità av_0 prima dell'urto e velocità $v_1 = av_0 + b$ dopo l'urto; al secondo passaggio si ha $av_1 = a(av_0)$ prima e $v_2 = a(av_1 + b) + b$ dopo l'urto e così via.

Si è così costruita una mappa

$$v_{k+1} = f(v_k),$$

con f definita da

$$f(v) = av + b.$$

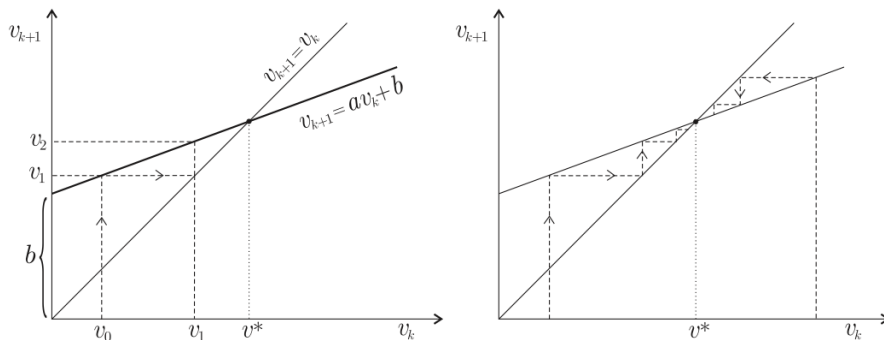


Figura 2.7: La mappa $f(v) = av + b$ e le sue iterate: convergono evidentemente al punto v^* .

L'analisi della mappa, visibile nell'immagine 2.7, è semplice: innanzitutto esiste un unico punto fisso, soluzione di $f(v) = v$, dato da $v_k = v^* = \frac{b}{1-a}$; che è l'intersezione della retta $y = f(v)$ con la bisettrice $y = v$. Poiché la pendenza della retta è $a < 1$, avviene che per ogni dato iniziale v_0 la successione v_0, v_1, v_2, \dots converge a v^* . La legge esatta è

$$v_k = v^* + a^k(v_0 - v^*).$$

Osserviamo ora come questa conclusione è valida non solo in questo specifico esempio, ma anche se lo smorzamento non fosse esattamente lineare oppure se l'impulso b non fosse del tutto indipendente da v : in ogni caso si può dimostrare che si arriva ad una legge del tipo $v_{k+1} = f(v_k)$, con f non esattamente lineare, ma sempre approssimabile ad una retta di pendenza minore di uno. Perciò in ogni caso la velocità, a lungo andare, si stabilizzerà al valore v^* creando così una figura chiusa nel piano delle fasi formata dall'arco dell'orbita che rallenta e dal segmento $x = 0$ di lunghezza b che congiunge i due pezzi di traiettoria. Questa figura è un ciclo limite: qualsiasi condizione iniziale si scelga, si giungerà sempre al ciclo limite descritto.

2.2 L'oscillatore di Van der Pol

Il problema che ci poniamo ora è quello di cercare una descrizione completa ed efficace di quello che, nella sezione precedente, avevamo dato come esempio. Già avevamo detto che l'equazione di un pendolo smorzato non soddisfa questo scopo, ma andiamo più nel dettaglio. Da una parte il pendolo con attrito prevede che l'energia del sistema cresca infinitamente nell'ipotesi, che precedentemente non avevamo nemmeno considerato, $\alpha < 0$; questo, ovviamente, dal punto di vista fisico non ha nessun senso.

Dall'altra parte se $x(t)$ è una soluzione, allora qualsiasi $ax(t)$, per $a \in \mathbb{R}$ lo è anche poiché l'equazione del pendolo smorzato è lineare in x . Prendiamo infatti l'equazione linearizzata del pendolo smorzato attorno all'origine. Si ha:

$$\dot{v} + \alpha v + x = 0.$$

Sostituendo x con ax si ha³

$$a\dot{v} + a\alpha v + ax = 0 \Leftrightarrow a(\dot{v} + \alpha v + x) = 0 \Leftrightarrow a(0) = 0,$$

ciò che dimostra, appunto, che anche ax è soluzione dell'equazione.

Un'invarianza simile per "dilatazione" è ovviamente incompatibile con l'esistenza di oscillazione di un'ampiezza determinata.

Per ottenere l'equazione che rappresenti al meglio il nostro esempio, eliminando dunque tutti i difetti, bisogna modificare l'equazione del pendolo smorzato in modo da introdurre un apporto continuo di energia che compensi le perdite a causa dell'attrito, distruggere l'invarianza per dilatazione e limitare l'aumento di energia che si verifica per $\alpha < 0$.

Se il primo punto era già stato discusso e pure risolto nella sezione precedente, gli altri due rimangono interrogativi ai quali risponderemo di seguito.

Partendo dalle constatazioni sopracitate, Van der Pol⁴, ha evidenziato che un modo matematicamente semplice per risolvere questi problemi consiste nel far dipendere il coefficiente d'attrito α dall'ampiezza x delle oscillazioni. Facendo in modo che il parametro α sia negativo per le ampiezze piccole e in seguito positivo, si può raggiungere il fine ricercato. Inoltre, dal momento che solo il modulo e non anche il verso dell'ampiezza ha un'importanza, è più naturale adottare una dipendenza di $\alpha(x)$ in x^2 . L'espressione più semplice che si può ricavare è perciò:

$$\alpha(x) = -\alpha_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right),$$

dove $\alpha_0 > 0$ e x_0 è l'ampiezza iniziale. In questo modo avremo $\alpha < 0$ per $x^2 < x_0^2$, mentre per $x^2 > x_0^2$ si avrà $\alpha > 0$.

Inserendo questa espressione di α nell'equazione linearizzata attorno all'origine del pendolo smorzato si ha:

$$\dot{v} - \alpha_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) v + x = 0,$$

da cui, scegliendo in maniera appropriata le unità di misura di x (basta scegliere x_0^2), si ricava l'equazione di Van der Pol:

$$\dot{v} + \beta(x^2 - 1)v + x = 0. \quad (2.4)$$

In essa interviene solo il parametro $\beta = \alpha_0$ su cui discuteremo per analizzare l'equazione.

³Chiaramente si sta derivando rispetto a t , dunque $\frac{d}{dt}(ax(t)) = a(\frac{d}{dt}x(t))$.

⁴Balthasar van der Pol (Utrecht, 27 gennaio 1889 – Wassenaar, 6 ottobre 1959) è stato un fisico olandese che condusse studi fondamentali nell'ambito delle oscillazioni non lineari e sulla teoria del caos.

Si può sin da subito osservare come l'unico punto fisso del sistema sia l'origine $(x, v) = (0, 0)$. Questo segue dalla seguente proposizione:

Proposizione 1. *Per ogni $\beta > 0$ l'equazione ammette un ciclo limite stabile a cui tende asintoticamente ogni movimento con dato iniziale $(x, v) \neq (0, 0)$.*

Il bacino di attrazione, in questo caso è dunque tutto il piano (x, v) senza l'origine. Dopo queste considerazioni iniziali possiamo dunque studiare l'equazione di Van der Pol nei casi $\beta \gg 1$, che corrisponde ad un forte smorzamento, positivo o negativo a dipendenza di $|x|$; e $\beta \ll 1$, che rappresenta un debole smorzamento.

2.2.1 Il caso $\beta \gg 1$

Per procedere con questo caso è conveniente sostituire l'equazione (2.4), del secondo ordine, con un sistema di equazioni del primo ordine. Osserviamo innanzitutto che l'equazione sopracitata si può scrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left[v + \beta \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \right] = -x.$$

Poniamo ora $\dot{x} + \beta(\frac{1}{3}x^3 - x) = \beta y$. L'equazione (2.4) è allora equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \beta(y - \gamma(x)) \\ \dot{y} &= -\frac{x}{\beta} \end{cases}, \text{ con } \gamma(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

Nel piano xy sono significative due curve: la retta $x = 0$, a cui è legato il segno di \dot{y} e la cubica di equazione $y = \gamma(x)$, cui è legato il segno di \dot{x} . Queste curve dividono il piano in quattro regioni I-IV simili a quadranti, nei quali \dot{x} e \dot{y} hanno segno definito, rispettivamente, $(+, -), (+, +), (-, +), (-, -)$; si veda la figura 2.8 in alto a sinistra.

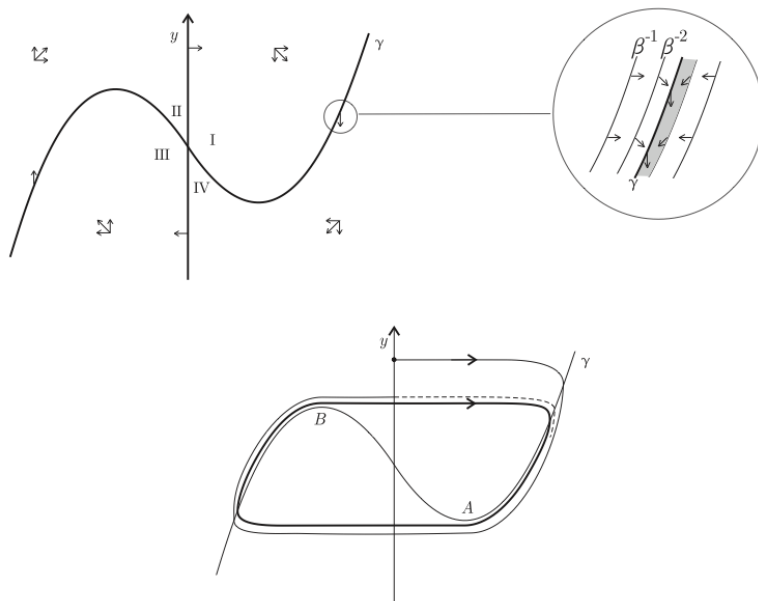


Figura 2.8: Campo vettoriale, traiettorie e ciclo limite per l'equazione di Van der Pol per $\beta \gg 1$. Si noti il particolare in un intorno della cubica γ .

La nostra ipotesi iniziale era che β avesse un valore molto grande. In questo caso è chiaro che, al di fuori di un piccolo intorno di γ , le traiettorie sono praticamente parallele all'asse x : la pendenza del campo vettoriale, e dunque delle traiettorie, infatti, è data da:

$$\psi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{\beta^2} \frac{x}{y - \gamma(x)}.$$

Pertanto lontano da γ si ha $\psi \sim \beta^{-2} \ll 1$, ovvero si hanno traiettorie orizzontali, dirette verso sinistra al di sopra della curva e verso destra al di sotto. Per $y - \gamma(x) \sim \beta^{-1}$, dunque abbastanza vicino alla curva (si può vedere il dettaglio nella figura 2.8 in alto a destra), la pendenza rimane piccola: $\psi \sim \beta^{-1}$. Per avere $\psi \sim 1$ o maggiore, dunque \dot{y} confrontabile con \dot{x} o maggiore, la traiettoria deve entrare in un intorno di γ ancora più piccolo, di spessore dell'ordine di β^{-2} .

Vediamo cosa succede prendendo un dato iniziale qualsiasi, ad esempio un punto sull'asse Ox come mostrato nell'immagine 2.8 in basso. L'orbita inizierà a muoversi quasi orizzontalmente a velocità elevata, nell'ordine di β , verso destra fino in prossimità di γ . A questo punto essa devierà sensibilmente verso il basso fino ad attraversare la curva verticalmente. In seguito la costeggerà con velocità estremamente ridotta, con \dot{x} e \dot{y} entrambe nell'ordine di β^{-1} , raggiungendo il vertice A .

Qui l'orbita non può riattraversare la curva, non può allontanarsene verso il basso o verso destra in quanto, come mostrato dalle frecce nella figura, le traiettorie sono entranti, come neppure continuare a seguirla esternamente. In prossimità di A , infatti, si ha $x > 0$ che impone $\dot{y} < 0$, mentre per continuare a seguire la cubica si dovrebbe avere $\dot{y} > 0$. L'unica possibilità è che l'orbita si stacchi da γ per procedere orizzontalmente verso sinistra, nuovamente a velocità elevata, per raggiungere l'altro ramo della cubica. A questo punto si ha un nuovo riattraversamento verticale, nel senso delle y crescenti, e in seguito l'orbita seguirà γ come visto sopra fino al massimo B , per poi tornare orizzontalmente sul ramo destro di γ infilandosi fra l'orbita precedente e la cubica. Come è facilmente intuibile, questo si ripete ad ogni giro producendo un moto a spirale che tende rapidamente ad un limite periodico. Ecco dunque un ciclo limite. È facile verificare che tale ciclo limite si ha per qualsiasi dato iniziale con la sola eccezione dell'origine che, come avevamo già visto con la proposizione 1, è un punto di equilibrio.

Osserviamo ora il comportamento della variabile $x(t)$ descritto nell'immagine seguente riferita al momento in cui la traiettoria si trova sul ciclo limite esso è raffigurato nella figura 2.9.

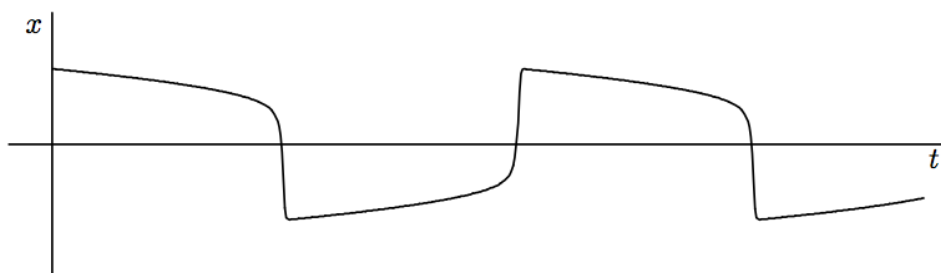


Figura 2.9: L'andamento di $x(t)$ nel caso di un forte smorzamento quando il sistema è a regime. Nell'immagine è raffigurato il caso in cui $\beta = 10$.

Il commento è presto fatto: i tratti quasi verticali del grafico corrispondono ai tratti orizzontali del ciclo limite; quando la pendenza è negativa siamo nel tratto in cui l'orbita procede da destra a sinistra, mentre nel caso opposto l'orbita seguirà l'altro verso. Qui si ha, come detto, una velocità elevata dell'ordine di β . I tratti poco inclinati corrispondono, invece, ai luoghi nei quali l'orbita costeggia la cubica; a destra si ha una velocità negativa, mentre a sinistra è positiva. La velocità è poco considerevole: siamo infatti nell'ordine di β^{-1} .

2.2.2 Il caso $\beta \ll 1$

Per analizzare questo caso riscriviamo l'equazione di Van der Pol nella sua forma abituale e come sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - \beta(x^2 - 1)v. \end{cases}$$

Notiamo che per $\beta = 0$ abbiamo l'equazione di un pendolo semplice, dunque per ogni dato iniziale la traiettoria nello spazio delle fasi è una circonferenza che viene percorso con velocità uniforme in un periodo $T_0 = 2\pi$.

Le variabili naturali per questi tipi di moti non sono le coordinate cartesiane, bensì quelle polari. Eseguiamo allora il passaggio a coordinate polari, usando tuttavia come coordinata radiale non il raggio stesso ma l'energia: vedremo infatti che ciò risulterà essere più comodo in quanto tutto il procedimento verrà svolto in queste variabili.

Abbiamo detto che l'orbita nello spazio delle fasi è un circonferenza. Questo è determinato, come abbiamo visto nel primo capitolo, dall'energia, che è data da $E = \frac{1}{2}(x^2 + v^2)$. Le equazioni che descrivono x e v soddisfacendo la condizione imposta sopra, sono necessariamente⁵ $x = \sqrt{2E} \cos \vartheta$, $v = \sqrt{2E} \sin \vartheta$. Tutto questo ci porta a dire che $\vartheta = \arctan \frac{v}{x}$.

Riassumendo, il passaggio alle nuove coordinate E, ϑ si scrive allora:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2E} \cos \vartheta \\ v = \sqrt{2E} \sin \vartheta \end{cases}$$

con le rispettive inverse

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}(x^2 + v^2) \\ \vartheta = \arctan \frac{v}{x}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Per $\beta = 0$ si il sistema di Van der Pol (2.5) diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x. \end{cases}$$

che è identico, come abbiamo già detto, a quello di un pendolo semplice. Per questa ragione, in questa ipotesi, si ha $\dot{E} = 0$. Il valore di $\dot{\vartheta}$ lo si ricava derivando l'espressione di ϑ che troviamo nell'equazione (2.5) e poi sostituendo $\dot{v} = -x$. Il risultato ottenuto è $\dot{\vartheta} = -1$.

Per giungere alle espressioni di \dot{E} e $\dot{\vartheta}$ nel caso in cui $\beta \neq 0$, occorre ricordarsi che \dot{E} è la potenza delle forze dissipative: $\dot{E} = -\beta(x^2 - 1)v^2$, perciò le espressioni che ne risultano saranno della forma.

$$\begin{cases} \dot{E} = \beta f(E, \vartheta) \\ \dot{\vartheta} = -1 + \beta g(E, \vartheta), \end{cases} \quad (2.6)$$

con⁶

$$\begin{aligned} f(E, \vartheta) &= 2E \sin^2 \vartheta (1 - 2E \cos^2 \vartheta) \\ g(E, \vartheta) &= -\sin \vartheta \cos \vartheta (2E \cos^2 \vartheta - 1). \end{aligned}$$

⁵Dato che stiamo parlando di una circonferenza, i coefficienti delle funzioni trigonometriche devono essere necessariamente uguali.

⁶L'espressione precisa di g , aggiunta qui per completezza e ottenuta derivando l'espressione di ϑ presente nella (2.5) e poi sostituendo $dot{v} = -x - \beta(x^2 - 1)v$, di fatto non giocherà alcun ruolo; l'unica cosa rilevante è che per E limitata, anch'essa lo sia.

Possiamo osservare che per $\beta > 0$, ma piccolo, la variabile radiale E sarà lenta: $\dot{E} = \mathcal{O}(\beta)$, mentre la variabile angolare ϑ è veloce: $\dot{\vartheta} = -1 + \mathcal{O}(\beta)$; pertanto ϑ avanza monotonamente con velocità prossima a -1 , compiendo un giro in un tempo T_β prossimo al tempo imperturbato T_0 , mentre nel frattempo E si è spostata di poco. Ed è proprio questa variabile lenta quella che più ci interessa. Essa è infatti determinante per l'evoluzione del sistema: a seconda che dopo un giro di ϑ , E abbia ancora il valore iniziale, sia cresciuta o diminuita si avrà, rispettivamente, una traiettoria periodica oppure a spirale verso l'esterno o verso l'interno.

Come saranno dunque le orbite nel caso $\beta \ll 1$? Abbiamo una risposta grazie alla seguente proposizione:

Proposizione 2. *Per β sufficientemente piccolo esiste nel piano (x, v) un unico ciclo limite stabile β -prossimo alla circonferenza di raggio due, di periodo prossimo a 2π , che ha come bacino di attrazione l'intero piano (x, v) privato dell'origine.*

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si useranno le variabili polari (E, ϑ) introdotte sopra come pure le relative equazioni (2.6). Sia \mathcal{S} una semiretta qualsiasi uscente dall'origine, formante con l'asse Ox un angolo fissato $\bar{\vartheta}$: essa rappresenta una **sezione di Poincaré** dello spazio delle fasi. Consideriamo inoltre un dato iniziale $(E, \bar{\vartheta})$ su di essa, e sia

$$\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \quad \Theta_\beta(t, E_0)$$

la corrispondente soluzione⁷ ($\bar{\vartheta}$ non vi compare in quanto è fissato una volta per tutte). Per β piccolo l'angolo ϑ avanza monotonamente con velocità $-1 + \mathcal{O}(\beta)$, pertanto compie un giro in un tempo

$$T_\beta = T_0 + \mathcal{O}(\beta).$$

Durante questo tempo si ha:

$$\mathcal{E}_\beta(t, E_0) = E_0 + \mathcal{O}(\beta), \quad \Theta_\beta(t, E_0) = \bar{\vartheta} - t + \mathcal{O}(\beta).$$

Al termine del giro la traiettoria taglia nuovamente \mathcal{S} in un punto E_1 prossimo a E_0 : resta quindi definita una mappa, detta **mappa di Poincaré** in quanto grazie ad essa si possono ritrovare tutti i punti nei quali l'orbita attraversa la sezione di Poincaré,

$$\Phi_\beta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \text{ tale che } E_{k+1} = \Phi_\beta(E_k).$$

Questa situazione è ben visibile nella figura 2.10.

La mappa è β -prossima all'identità, e la scriveremo

$$E_1 = \Phi_\beta(E_0) = E_0 + \beta F_\beta(E_0). \quad (2.7)$$

Iterando si trova $E_2 = \Phi_\beta(E_1)$, $E_3 = \Phi_\beta(E_2)$ e così via. La ricerca del ciclo limite che è menzionato nella proposizione si riduce alla ricerca di un punto fisso E_β^* della mappa Φ_β . Per poi convincersi che si tratta di un ciclo limite attrattivo si dovrà poi verificare che la successione delle iterate E_1, E_2, \dots converga a E_β^* .

Si esegue ora un calcolo approssimato di F_β , uno sviluppo di Taylor nel parametro β troncato all'ordine zero, in modo da far scomparire questa variabile dall'equazione. Prendiamo quindi l'equazione (2.6) e rivoltiamola in forma integrale per \dot{E} , scrivendo

$$\Phi_\beta(E_0) = E_0 + \int_0^{T_\beta} \dot{E} dt,$$

⁷Si introduce questa notazione per evidenziare il fatto che le soluzioni dipendano da β . La coppia (E, ϑ) è, infatti, un caso particolare ottenuto per $\beta = 0$ (quindi quando non c'è dipendenza da questo parametro) a partire dal caso generale costituito dalla coppia $(\mathcal{E}_\beta, \Theta_\beta)$.

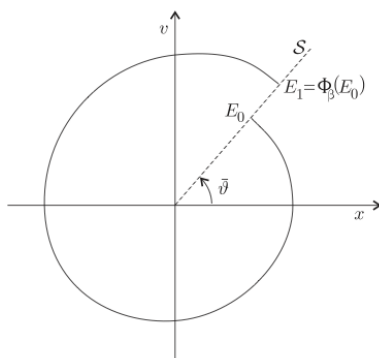


Figura 2.10: La raffigurazione della situazione descritta sopra: si ha la sezione di Poincaré, rappresentata dalla semiretta S , e la mappa di Poincaré $\Phi_\beta : S \rightarrow S$.

ovvero

$$\Phi_\beta(E_0) = E_0 + \beta \int_0^{T_\beta} f(\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)) dt.$$

Per confronto con la (2.7) si ha

$$F_\beta(E_0) = \int_0^{T_\beta} f(\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)) dt.$$

Questa espressione contiene T_β e la soluzione esatta $\mathcal{E}_\beta(t, E_0), \Theta_\beta(t, E_0)$, che sono incognite, ma il calcolo all'ordine zero corrisponde a porre $\beta = 0$. Le incognite, quindi, spariscono: l'estremo di integrazione infatti diventa $T_0 = 2\pi$, mentre al posto della soluzione esatta si ha il moto imperturbato $\mathcal{E}_\beta(t, E_0) = E_0, \Theta_\beta(t, E_0) = \bar{\vartheta} - t$. Si ha allora (denotando ora il generico dato iniziale E_0 , semplicemente con E)

$$\begin{aligned} F_0(E) &= \int_0^{2\pi} f(E, \bar{\vartheta} - t) dt \\ &= 2E \int_0^{2\pi} \sin^2 t (1 - 2E \cos^2 t) dt \\ &= -\pi(-E^2 + 2E). \end{aligned}$$

Quindi all'ordine lineare in β la mappa di Poincaré Φ_β è definita da:

$$\Phi_\beta(E) = E + \beta[-\pi(-E^2 + 2E)].$$

I punti fissi di Φ_β , ossia gli zeri di $F_0(E)$, sono dati da $E_0^* = 0$ ed $E_0^* = 2$. Per un teorema di analisi,⁸ se β è piccolo, la derivata di F_β è diversa da zero in un intorno di ordine β . Grazie a ciò possiamo dire che per E_β^* prossimo a E_0^* vale

$$E_\beta^* = E_0^* + \mathcal{O}(\beta).$$

Lo zero nell'origine resta evidentemente nell'origine (l'origine del piano (x, v) è sempre un punto di equilibrio per ogni β , pertanto si ha $F_\beta(0) = 0$ per ogni β), mentre in altri punti la funzione non può annullarsi. Un possibile andamento di F_β è raffigurato nell'immagine 2.11 a sinistra.

⁸Il teorema menzionato è il cosiddetto *Teorema della funzione implicita*. Sappiamo che $F_0(E_0^*) = 0$ e che $\frac{\partial F_0}{\partial E}(E_0^*) \neq 0$. In queste ipotesi il teorema della funzione implicita assicura che in un intorno di $\beta = 0$ l'equazione $F_\beta(E) = 0$ definisce implicitamente una funzione $E^*(\beta)$, tale che $E^*(0) = E_0^*$ e che $F_\beta(E^*(\beta)) = 0$.

Al punto fisso $E_\beta^* = 2 + \mathcal{O}(\beta)$ della mappa corrisponde, come richiesto, una curva nel piano (x, v) , simile ad una circonferenza di raggio è prossimo a due. Si dimostra facilmente che essa è attrattiva: dalla forma di F_β si vede subito che, ad esempio, per $E_0 < E^*(\beta)$, la successione $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{i+1} = \Phi_\beta(E_i)$, è monotona crescente e limitata superiormente a $E^*(\beta)$, pertanto esiste un limite $E_\infty \leq E^*(\beta)$; ma il limite è necessariamente un punto fisso e dunque coincide con $E^*(\beta)$. L'andamento qualitativo di Φ_β e delle sue iterate è rappresentato in figura 2.11 a destra. \square

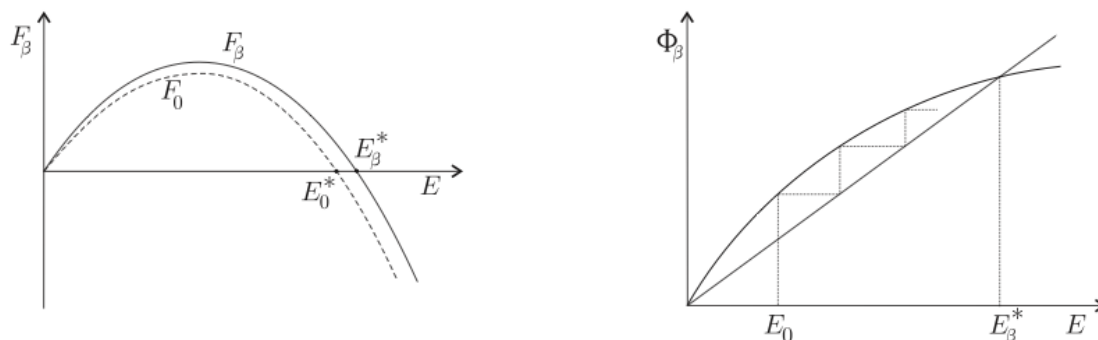


Figura 2.11: A sinistra si può vedere l'andamento di F_β , mentre a destra quello di Φ_β : si ha la convergenza asintotica delle iterate al valore limite E_β^* .

Concludiamo commentando la figura 2.12 che mostra, sopra, il comportamento dell'equazione di Van der Pol per $\beta = 0, 1$: le due traiettorie, una interna e l'altra esterna, convergono abbastanza rapidamente al ciclo limite, che è rappresentato con la riga più spessa. Nella parte bassa, invece, si ha l'andamento di $x(t)$, in corrispondenza del ciclo limite: esso è difficilmente distinguibile da una sinusoidale.

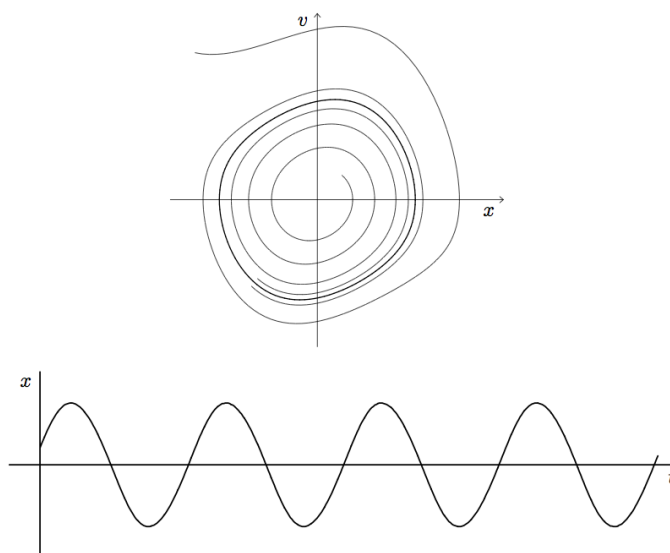


Figura 2.12: Il ciclo limite e l'andamento di $x(t)$ per $\beta = 0, 1$.

È interessante variare sperimentalmente questo parametro β e vedere il ritratto di fase che ne consegue. Nella figura 2.13, si hanno cinque differenti ritratti.

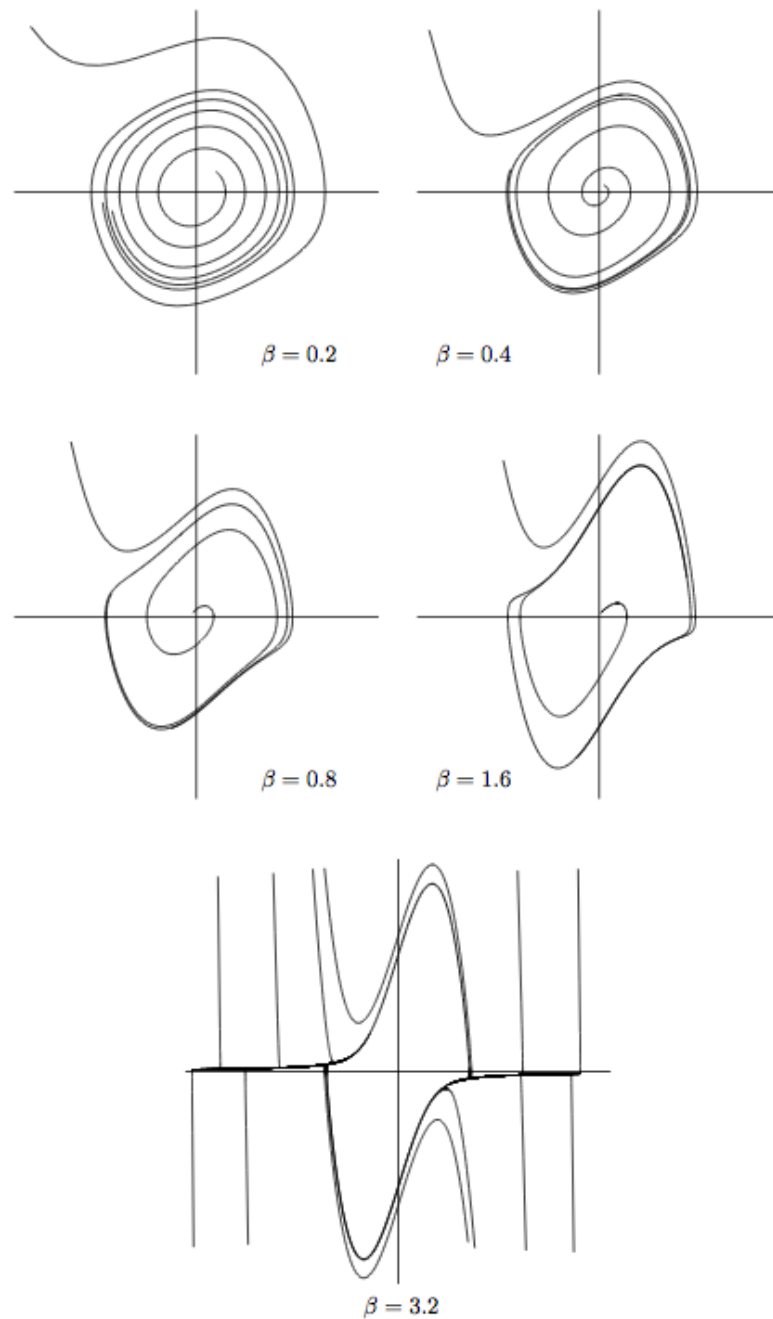


Figura 2.13: Il ritratto di fase dell'equazione di Van der Pol nel piano (x, v) per differenti β . Si nota come minore è il valore del parametro, maggiore è la somiglianza del ciclo limite con una circonferenza perfetta, a conferma di quanto discusso in questa sezione, mentre per β alti il ciclo limite è sensibilmente deformato.

2.3 Il teorema di Poincaré-Bendixson

A lungo nella Storia si è creduto che i moti, a lungo andare, si stabilizzano. Verso la fine del XIX secolo Poincaré enuncia un teorema che sembra confermare questo pensiero. Esso è conosciuto come **Teorema di Poincaré-Bendixson**.⁹

Proposizione 3. *Si consideri una traiettoria che entra in una circonferenza su di un piano. Essa ha solo due possibilità: o si dirigerà verso un punto di equilibrio stabile, o convergerà attorno ad un ciclo limite.*

Un'idea della dimostrazione può essere questa.

Consideriamo una traiettoria che entra in una circonferenza e un punto P all'interno di essa su cui passa l'orbita. Quest'ultima, completando un giro della circonferenza, ripasserà in un punto Q appartenente a un intorno di P . Viene così a crearsi una traiettoria chiusa, che crea un dominio, formata dall'arco PQ e dal segmento QP e che racchiude quindi una superficie. Un'orbita che entra in questo dominio non potrà uscirne a meno che non riattraversi questo bordo. Questo è impossibile in quanto due traiettorie non possono incrociarsi: in caso contrario si creerebbe una contraddizione con il teorema di Cauchy-Lipschitz, il quale afferma che su un punto dello spazio può passare solamente una traiettoria. Per questo motivo si dice che non c'è ricorrenza: l'orbita potrà passare vicinissimo a P , ma non riattraversarlo. La situazione descritta in questa idea di dimostrazione è visibile in figura 2.14.

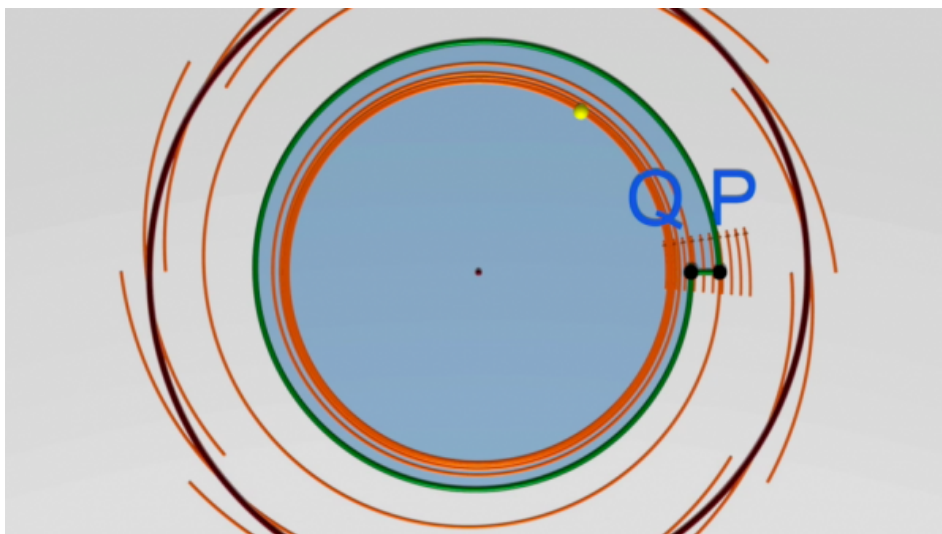


Figura 2.14: L'orbita all'interno del dominio PQP . Dall'immagine si nota evidentemente come sia impossibile uscire da esso senza intersecare altre traiettorie e dunque trasgredire al teorema di Cauchy-Lipschitz.

Questo teorema apre la strada alla teoria qualitativa dei sistemi dinamici: anche conoscendo poco riguardo ad un sistema, si può sempre immaginare il suo andamento temporale. Nel piano ciò vale sempre dato che, così come visto con il teorema di Poincaré-Bendixson, si hanno solo due

⁹Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 aprile 1854 – Parigi, 17 luglio 1912) è stato un matematico, un fisico teorico e un filosofo naturale francese. Fra le principali innovazioni da lui introdotte occorre sicuramente ricordare la scoperta un sistema caotico deterministico, ponendo in tal modo le basi della moderna teoria del caos.

Ivar Otto Bendixson (Stoccolma, 1 agosto 1861 – Stoccolma, 29 novembre 1935) è stato un matematico svedese. La denominazione di questo teorema è dovuta a Poincaré per averlo ideato e a Bendixson per essere stato in grado di dimostrarlo efficacemente nel 1901.

possibilità. Osserviamo che questa determinazione a priori di come evolverà una data traiettoria chiude di fatto la porta alla possibilità che ci sia caos. Per ottenerlo, bisogna perciò abbandonare la dimensione due per entrare nella terza dimensione¹⁰. Poincaré, infatti, scoprì ben presto che il suo teorema era valido solamente nel piano, in quanto nello spazio c'è anche la possibilità di ottenere un regime caotico.

¹⁰Si rende attento il lettore che, parlando di tre dimensioni, non si intendono le tre dimensioni spaziali, bensì quelle legate allo spazio delle fasi di un sistema di EDO autonomo, ossia un sistema che non dipende esplicitamente dal tempo.

Capitolo 3

Oscillazioni caotiche

3.1 Oscillatore non lineare forzato

Come abbiamo già anticipato con il teorema di Poincaré-Bendixson, solo trattando sistemi che evolvono in tre dimensioni è possibile giungere a situazioni caotiche. Vediamo allora come costruirne uno. Partiamo da un pendolo semplice, dunque senza attrito, e aggiungiamo una componente di forzatura:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin(x) + \tilde{\varepsilon} \cos(\Omega t) \quad (3.1)$$

dove $\tilde{\varepsilon} \geq 0$. Trattandosi di un pendolo semplice, inoltre, si ha $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Si può notare che il termine forzante agisce in modo periodico: la sua intensità oscilla a causa della funzione coseno. Scritta in questo modo, l'EDO (3.1) è unidimensionale in quanto l'unica variabile differenziata è \ddot{x} . Iniziamo a renderlo quindi bidimensionale. Si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\sin x + \varepsilon \cos(\Omega t), \end{cases}$$

dove è stata utilizzata, come unità temporale, ω_0^{-1} e si è posto $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\omega_0^2}$.

L'EDO del primo ordine è dunque stata riespressa in due equazioni differenziali del secondo ordine; di conseguenza lo spazio delle fasi è bidimensionale. Osserviamo ora che questo sistema dipende esplicitamente dal tempo: si dice che è **non autonomo**. Occorre perciò renderlo **autonomo** togliendo questa dipendenza temporale. In questo modo si necessiterà di *tre* equazioni differenziali del primo ordine per poterlo descrivere: ecco spiegata la necessità del passaggio alla terza dimensione. Il sistema è perciò così espresso:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\sin x + \varepsilon \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= \Omega. \end{cases}$$

Come studiare questo tipo di moto? Finora abbiamo sempre studiato sistemi partendo dal piano (x, v) , dunque il sistema più comodo consiste nel ritornare a considerare questo piano. Il metodo è semplice: consideriamo una sezione di Poincaré Σ dello spazio degli stati $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ definita da $\varphi = \text{costante}$. Questa sezione rappresenterà il nostro piano (x, v) sul quale eravamo abituati a lavorare. Ora osserveremo il passaggio dell'orbita attraverso la sezione Σ ai tempi discreti t_0, t_1, \dots . Data una condizione iniziale (x_0, v_0) si ottiene dunque il sistema dinamico discreto, dato dalla mappa di Poincaré, e visibile nell'immagine 3.1:

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (x_{n+1}, v_{n+1}) &= \Phi(x_n, v_n). \end{aligned}$$

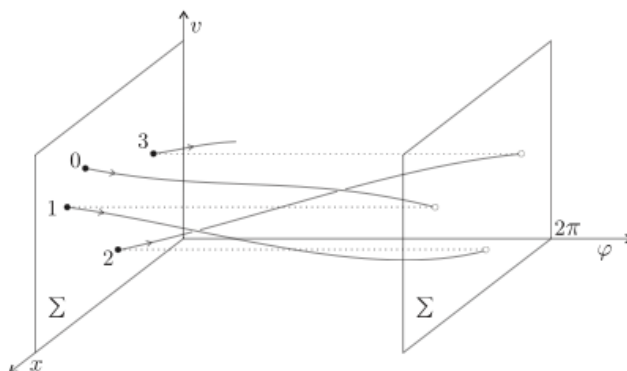


Figura 3.1: La sezione di Poincaré Σ e tutti i punti di intersezione (x_n, v_n) che vanno a formare la mappa Φ .

Dato che $\dot{\varphi} = \Omega$, φ avanza uniformemente con velocità Ω ; questo ci permette di osservare il sistema a intervalli regolari di tempo $t_n = \frac{2\pi}{\Omega}n, n \in \mathbb{Z}$.

Iniziamo ad analizzare cosa succede quando $\varepsilon = 0$. In questo caso il termine inerente la forza non influisce sul sistema, che si riduce al caso di un pendolo semplice: i punti (x_n, v_n) si situeranno tutti in corrispondenza delle traiettorie che lo descrivono così come si può vedere in figura 3.2. Questo significa che la costante del moto $E = \frac{1}{2}(v^2 + x^2)$ è riportata anche sulla mappa: l'energia è conservata. La situazione diventa molto più interessante non appena si varia, anche quasi

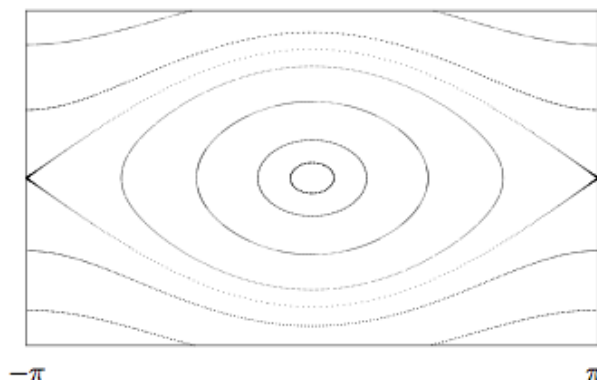


Figura 3.2: La rappresentazione della mappa di Poincaré per $\varepsilon = 0$. Si nota perfettamente come questa sia identica al ritratto di fase per il pendolo semplice in quanto, in questo caso, l'energia è conservata; i punti della mappa coincidono con i valori della costante E .

impercettibilmente, il parametro ε . Il sistema non conserva più l'energia e si iniziano a vedere moti caotici. Questo accade, quando ε è molto piccolo, solo vicino alle separatrici: se si analizza la mappa lontano da esse, sembra che i punti rimangano sulle orbite che descrivono le varie costanti di energia. Andando a guardare vicino alle separatrici si ha, invece, qualcosa di nuovo: i punti sulla sezione di Poincaré non vanno a posizionarsi su orbita di energia costante, bensì occupano uno spazio bidimensionale, dimostrando così che il sistema non è isolato dal punto di vista energetico. In generale, analizzando una sezione di Poincaré riguardante un sistema caotico, si potranno distinguere delle **regioni ordinate**, nelle quali il moto ha sostanzialmente le stesse caratteristiche di un sistema non caotico, e delle **regioni caotiche** caratterizzate dalla sensibilità alle condizioni iniziali. Esse sono ben riconoscibili a causa della "polvere" che le contraddistingue.

Essa è dovuta ai punti che, invece di posizionarsi su un'orbita, occupano la superficie. Alcuni esempi sono riportati in figura 3.3.

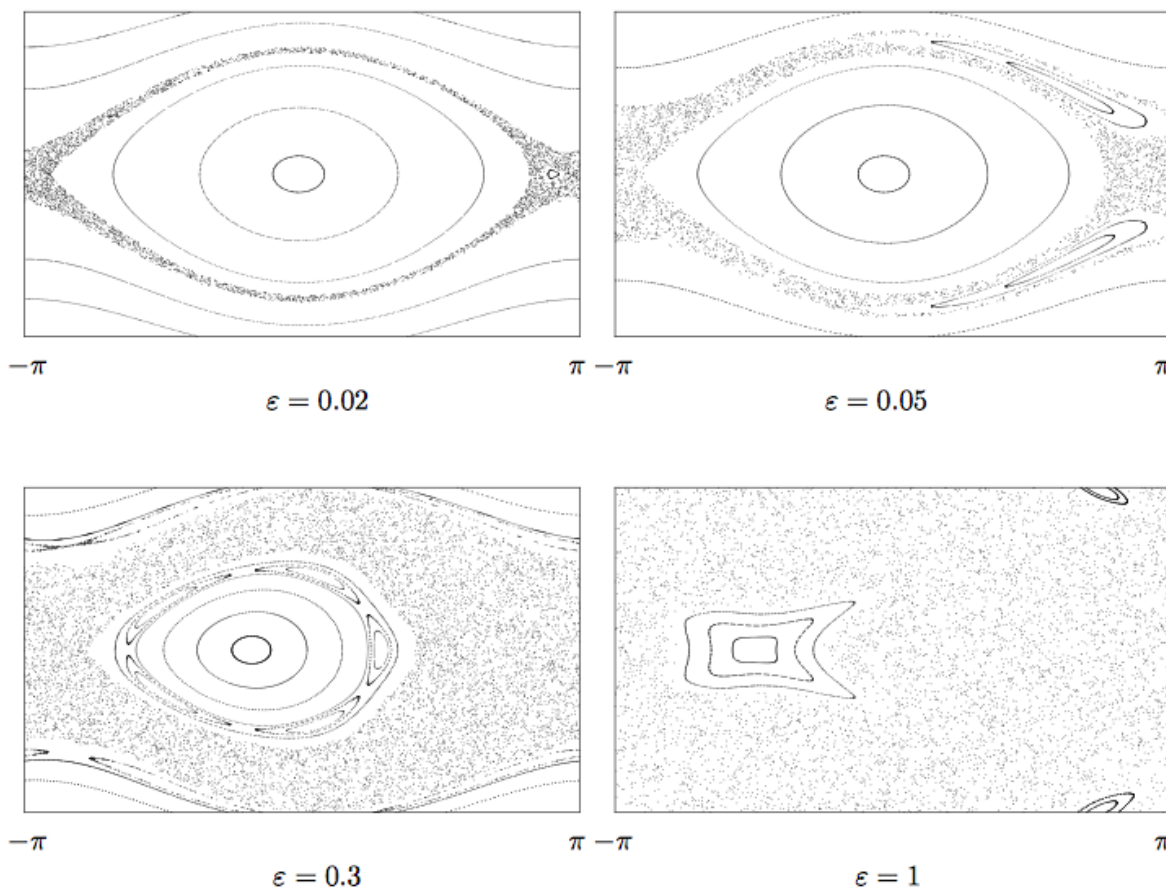


Figura 3.3: Sezione di Poincaré con regioni ordinate e regioni caotiche al variare del parametro ε . Si nota molto bene la degenerazione man mano che ε aumenta: le regioni caotiche prendono a poco a poco il sopravvento su quelle ordinate.

3.2 Oscillatore calciato

Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \varepsilon \sin(x)\delta(t) \end{cases}$$

dove $\delta(t)$ è definita come segue:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } t \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La sua spiegazione fisica è semplice: si tratta di un pendolo che ad ogni secondo, dunque ad un intervallo di tempo discreto, riceve una spinta di intensità $\varepsilon \geq 0$. Costruiamo ora la mappa di Poincaré che si può ottenere da questo moto. Le sezioni di Poincaré che consideriamo saranno

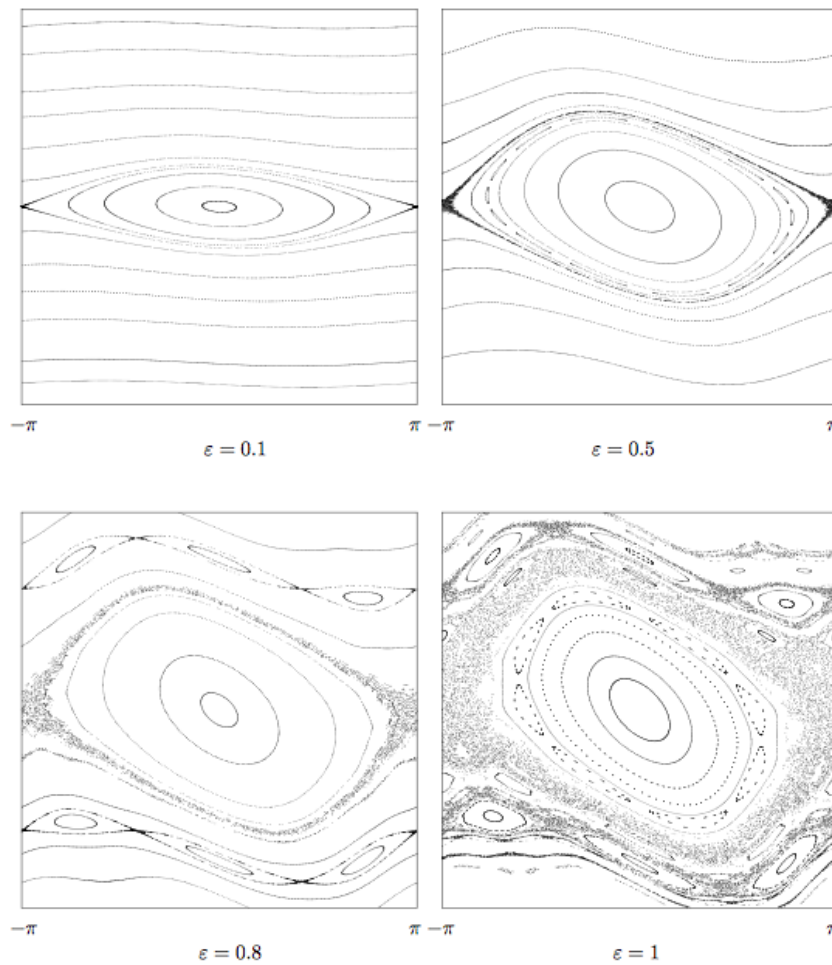


Figura 3.4: Il ritratto di fase della mappa standard. Si nota chiaramente come, all'aumentare di ε , aumentano le regioni caotiche.

poste all'istante in cui il pendolo riceve la spinta in modo da non ottenere soluzioni banali. Attingendo dalle leggi per il moto si ha: $x(t) = x_0 + \dot{x}t$ e analogamente per la velocità. In termini ennesimi, dato che il nostro intervallo di tempo è pari ad un secondo, la mappa, denominata **mappa standard**, diventa:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_n \\ v_{n+1} = v_n + \varepsilon \sin(x_n). \end{cases}$$

A questo punto occorre fare una, seppur piccola, importante precisazione. Poiché x è un angolo, appartiene all'insieme $\mathbb{S} = [0, 2\pi]$. Per questa ragione il suo valore sarà considerato modulo 2π .¹ Analizziamo il comportamento della mappa: quando $\varepsilon = 0$, $\dot{v} = 0$; questo significa che la velocità è costante e il ritratto di fase della mappa di Poincaré consiste in linee orizzontali. Quando invece $\varepsilon > 0$ il ritratto cambia in modo sempre più consistente, così come possiamo vedere nell'immagine 3.4, man mano che questo parametro aumenta creando a poco a poco la “polvere” sintomatica delle regioni caotiche di cui avevamo discusso precedentemente.

¹Avere $x_{n+1} = x_n + v_n \bmod 2\pi$ significa che, dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ che soddisfa $\alpha = x_n + v_n \bmod 2\pi$, vale $\alpha - (x_n + v_n) = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. α è dunque il resto della divisione euclidea fra $x_n + v_n$ e 2π , in questo modo si otterrà un angolo appartenente a \mathbb{S} .

3.3 Considerazioni generali sui moti caotici: caos \neq caso

Dopo aver analizzato brevemente questi due esempi è utile spendere due parole sui sistemi caotici guardandoli sotto un aspetto più generale. Innanzitutto parliamo dell'aspetto che, fra tutti, meglio rende l'idea di caos: la **sensibilità alle condizioni iniziali**. La teoria del caos si presenta sotto un profilo *deterministico*: non si ha un'evoluzione casuale del sistema, bensì è sempre possibile determinare la posizione futura in modo perfetto. Questo però, solo e unicamente nel caso in cui noi fossimo a conoscenza *esattamente* di ogni singola incognita dello stato iniziale e dove con esattezza si intende senza alcuna, nemmeno minima, approssimazione. Un discriminante simile pone dunque dei problemi dato che, solitamente, i sistemi da noi considerati hanno sempre un'approssimazione la quale, anche nel caso in cui fosse estremamente piccola, è determinante e ci porta ad avere dei risultati completamente differenti. Ciò è confermato anche da Pierre Duhem² che, presentando l'opera di Jacques Hadamard³ intitolata *Sur les géodésiques des surfaces à courbures opposées*, afferma: “*Se dunque un punto materiale viene lanciato sulla superficie studiata, a partire da una posizione geometricamente data con una velocità geometricamente data, la deduzione matematica può determinare la traiettoria di questo punto e dire se questa traiettoria si allontana o no all'infinito. Ma per il fisico, questa deduzione è sempre e comunque inutilizzabile*”. La sensibilità alle condizioni iniziali non è però sufficiente per descrivere accuratamente un sistema caotico: questa proprietà, se presa singolarmente, non per forza riconduce al caos. Per fare solo un banale esempio basta considerare il sistema dinamico che consiste nel raddoppiare ripetutamente il valore iniziale; la mappa descritta è quindi semplicemente:

$$x_{n+1} = 2x_n.$$

Questa mappa è chiaramente soggetta alla dipendenza sensibile alle condizioni iniziali: per ogni coppia di valori molto vicino fra loro, dopo un numero $n \rightarrow +\infty$ iterazioni, i due numeri risultanti saranno molto lontani. Ciononostante non si può certo dire che la mappa sia caotica, anzi: ha un comportamento molto semplice in quanto tutti i punti, eccetto lo zero, tendono a $+\infty$ se $x_0 > 0$ e a $-\infty$ se $x_0 < 0$. Vista la facilità con la quale si riesce ad immaginare dei sistemi soggetti alla proprietà descritta in precedenza seppur non presentino caos, occorre perciò trovare altri criteri per descrivere un sistema caotico. Ci sono, infatti, tre caratteristiche senza le quali non si può parlare di caos. La prima è già stata discussa: si tratta della sensibile dipendenza alle condizioni iniziali; passiamo allora alla seconda.

Questa proprietà è denominata **transitività**, oppure **mixing**. La traiettoria generata da un punto dello spazio delle fasi passa, nel tempo, infinitamente vicino ad ogni punto delle regioni caotiche nello spazio delle fasi, sovrapponendosi e occupandone densamente una. Il termine “mixing” spiega ancora meglio: si può immaginare la transitività come il mescolamento del caffè in una tazza di latte. Inizialmente il caffè è tutto concentrato in una regione ben definita, in seguito, quando si inizia a mescolare, esso si distribuisce a strisce per tutta la tazza formando strani disegni di cui si può vedere un esempio in figura 3.5, mentre infine la polvere è miscelata completamente con il latte e la bevanda è pronta per il consumo. Questo esempio si addice perfettamente al nostro caso proprio perché il mescolamento di due sostanze o fluidi forma un sistema caotico dal punto di vista matematico.

L'ultimo criterio per far sì che ci sia caos è la **densità delle orbite periodiche**: per ogni orbita σ esiste un'orbita τ periodica infinitamente vicina ad essa. Questo equivale a dire che le orbite

²Pierre Maurice Marie Duhem (Parigi, 10 giugno 1861 – Cabrespine, 14 settembre 1916) è stato un filosofo, storico della scienza, fisico e matematico francese. È conosciuto soprattutto per le sue opere riguardanti le indeterminazioni legate al metodo sperimentale e la storia del progresso scientifico durante il Medioevo.

³Jacques Solomon Hadamard (Versailles, 8 dicembre 1865 – Parigi, 17 ottobre 1963) è stato un matematico francese, conosciuto principalmente per la sua dimostrazione del teorema dei numeri primi e per il suo contributo nel campo delle funzioni complesse, la geometria differenziale e le equazioni differenziali alle derivate parziali.



Figura 3.5: Un esempio perfetto di mixing.

periodiche τ saranno disposte densamente nelle regioni caotiche. Questo si può rapportare anche ai numeri: ogni numero $\alpha \in \mathbb{R}$ è infinitamente vicino ad un numero decimale periodico.

3.3.1 Sensibilità alle condizioni iniziali

Dato che la sensibilità alle condizioni iniziali, fra le tre, è certamente la proprietà più evidente da immaginare, le dedichiamo un paragrafo in modo da poterla discutere in modo più approfondito. Per farlo ci aiutiamo con la seguente proposizione:

Proposizione 4. *Si consideri l'equazione differenziale $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ dove $\vec{f}(\vec{x})$ è di classe C^∞ . La soluzione $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ per ogni t fissato è funzione della condizione iniziale \vec{x}_0 , della stessa classe di f . Esistono in particolare costanti $C, \lambda > 0$ tali che*

$$\| \vec{x}(t, \vec{x}'_0) - \vec{x}(t, \vec{x}_0) \| < C \| \vec{x}'_0 - \vec{x}_0 \| e^{\lambda|t|}. \quad (3.2)$$

Osserviamo innanzitutto che c'è una dipendenza continua dal dato iniziale delle soluzioni nel tempo, mentre l'equazione (3.2), in pratica, dà un limite massimo della distanza al tempo t , che cresce esponenzialmente, tra le due traiettorie partite da \vec{x}_0 e \vec{x}'_0 .

Questa stima è però ancora molto approssimativa; la si può migliorare nel seguente modo: consideriamo dei dati iniziali \vec{x}_0, \vec{x}'_0 e i loro conseguenti movimenti $\vec{x}(t, \vec{x}_0), \vec{x}(t, \vec{x}'_0)$; dove \vec{x}'_0 è spostato, rispetto a \vec{x}_0 , di una certa quantità variabile η nella direzione del vettore normalizzato \vec{u} . Abbiamo dunque

$$\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 + \eta \vec{u}.$$

Poniamo ora, per $t > 0$,

$$\alpha(t, \vec{x}_0, \vec{u}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\| \vec{x}(t, \vec{x}_0 + \eta \vec{u}) - \vec{x}(t, \vec{x}_0) \|}{\eta}.$$

Così definito, α ha la funzione di coefficiente di dilatazione delle distanze all'istante t , nella direzione di \vec{u} per il dato iniziale \vec{x}_0 . Grazie all'equazione (3.2) avevamo notato che la distanza fra le traiettorie cresce esponenzialmente, questo vuol dire che anche l' α definita sopra deve aumentare in modo esponenziale al trascorrere di t :

$$\alpha(t, \vec{x}_0, \vec{u}) \simeq a e^{\lambda t},$$

dove a è una costante. Particolarmente significativo è l'esponente χ detto **esponente di Lyapunov** del sistema nel punto \vec{x}_0 nella direzione \vec{u} definito come segue:

$$\chi(\vec{x}_0, \vec{u}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [\alpha(t, \vec{x}_0, \vec{u})].$$

La sua importanza è legata all'esponente di Lyapunov massimo $\chi_{\max}(\vec{x}_0)$: quando esso è positivo, infatti, si dice che si ha *divergenza esponenziale delle traiettorie vicine*, oppure anche *sensibilità alle condizioni iniziali*. Dato che questa è la proprietà che meglio caratterizza il caos, questo parametro è usato in molti testi per definire un sistema caotico. Così facendo, però, ci si dimentica delle altre due proprietà: la transitività e la densità delle orbite periodiche. Per questa ragione definire come sistema caotico un sistema nel quale l'esponente di Lyapunov è maggiore di zero è qualcosa di imperfetto e incompleto.

Le conseguenze della divergenza esponenziale sono molto significative: avendo un'incertezza δ sulle condizioni iniziali, i moti si differenzieranno irrimediabilmente dopo un tempo

$$t \sim \frac{1}{\chi_{\max}} \ln \frac{1}{\delta}.$$

In pratica ci vediamo impossibilitati nel trovare soluzioni per tempi lunghi: ciò è possibile solamente per tempi brevi. Per questo occorre analizzare i sistemi sotto un profilo statistico entrando così nel ramo della **teoria ergodica**, argomento che in questo lavoro non è trattato.

3.4 Dinamica simbolica casuale

Chiudiamo questo lavoro riallacciandoci al primo esempio svolto, quello inerente al pendolo semplice, in modo da riprendere tutte e tre le proprietà del caos e illustrarle riferendosi ad un caso conosciuto. Consideriamo perciò un pendolo semplice di equazione $\ddot{x} = -\sin x$. Sia B un intorno qualsiasi del punto di equilibrio instabile $(\pi, 0)$. Così come vediamo nella figura 3.6, possiamo suddividere B in quattro regioni separate fra di loro dalle separatrici. Parlando del pendolo semplice avevamo già commentato il tipo di moto che ritroviamo all'interno di esse: abbiamo librazioni e rotazioni che vanno sia in verso orario che antiorario per un totale di quattro moti differenti. A livello di energia possiamo riprendere quanto già detto nella sezione 1.1.3: le

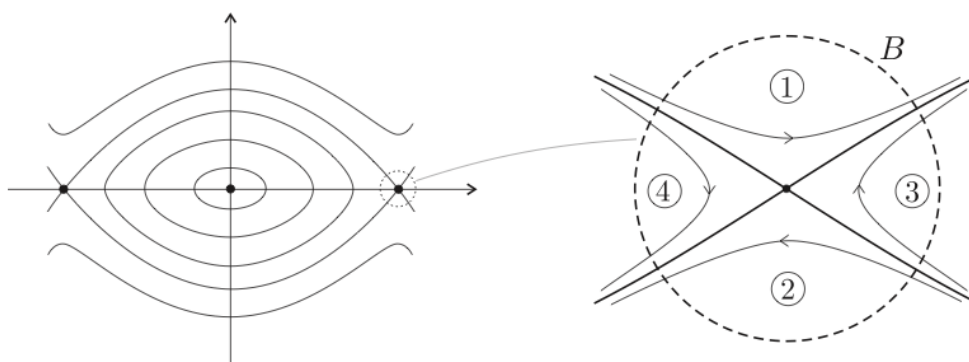


Figura 3.6: A sinistra il ritratto di fase del pendolo semplice nell'intervallo $x = [-\pi, \pi]$, mentre a destra si ha un ingrandimento dell'intorno B con contrassegnate le quattro regioni delimitate dalle separatrici. Si ha: (1) rotazioni antiorarie, (2) rotazioni orarie, (3) librazioni (oscillazioni) che partono in verso orario, (4) librazioni (oscillazioni) che partono in verso antiorario.

separatrici corrispondono al livello di energia $E^*(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos(x) = 1$, dunque nella zona delle rotazioni l'energia sarà maggiore di $E^*(x, v)$, mentre in quella delle librazioni sarà minore; ma in ogni caso il sistema complessivo manterrà l'energia costante. Con queste premesse è possibile determinare con esattezza quando il pendolo gira in senso orario o, rispettivamente, antiorario mentre passa da un determinato punto $\vec{x}_0 \in B$: rappresentando con "O" e "A" i due casi avremo

delle sequenze binarie denominate **stringhe**. Ad esempio, le stringhe univoche associate alle quattro regioni precedenti, senza considerare i dati iniziali corrispondenti alle separatrici, sono:

Regione 1 : $AAAA \dots$
 Regione 2 : $OOOO \dots$
 Regione 3 : $OAOA \dots$
 Regione 4 : $AOAO \dots$

Fino a qui nulla di particolare, l'energia è costante e non ci crea nessun problema. Aggiungiamo ora un termine forzante, così come avevamo fatto con l'equazione (3.1) del pendolo non lineare, in modo da trovare un'equazione differenziale del tipo

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos \varphi. \quad (3.3)$$

Dove si ricorda che $\varepsilon \geq 0$ e $\varphi = \Omega t$. Per $\varepsilon = 0$ si ha un comportamento identico a quello descritto sopra. Interessiamoci allora a cosa succede non appena si varia di poco il parametro ε . Ebbene, per $\varepsilon > 0$ l'energia del sistema non è più conservata. Ciò significa che l'andamento regolare delle stringhe, così come avevamo visto nel caso $\varepsilon = 0$ che corrisponde al pendolo semplice, è pregiudicato. Le stringhe saranno composte da una qualsiasi sequenza di lettere "A" e "O", infatti si può dimostrare che:

Proposizione 5. *Se ε è abbastanza piccolo, allora per ogni scelta di una stringa σ a due simboli $\sigma_k = O, A, k \in \mathbb{Z}$ esiste un dato iniziale $\vec{x}_0 \in B$, dove B è un intorno di un punto di equilibrio instabile, che la realizza⁴.*

Cosa significa questo teorema? Esso ci assicura che possiamo immaginare un moto che compie dodici giri orari, tre antiorari, mille orari, un milione di giri antiorari per poi girare per sempre in verso orario ed essere sicuri dell'esistenza in B di un dato iniziale \vec{x}_0 che lo produce. Nella teoria dei sistemi dinamici, lo studio dei moti ottenuti associando ad ognuno di essi una stringa formata da un numero finito di n simboli è denominato studio della **dinamica simbolica**.

Facciamo ora il punto della situazione in modo da avere le idee in chiaro nel proseguo del lavoro. Il moto da noi considerato è ottenuto dai due simboli "A" e "O" che formano delle stringhe. Ad ogni traiettoria è associata una stringa, mentre l'insieme delle stringhe corrisponde all'insieme che descrive tutte le possibili evoluzioni del sistema nel tempo. Dalla proposizione 5 sappiamo che tutte le stringhe sono possibili, ciò significa che l'insieme delle stringhe, che notiamo Σ , coincide con l'insieme di tutte le orbite.

Studiamo allora la dinamica simbolica, ossia l'applicazione definita dalla mappa

$$\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N, \dots) = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \dots),$$

Questa mappa è denominata **mappa left-shift** poiché, ad ogni iterazione, essa trasla a sinistra di una posizione la sequenza di simboli σ_k . Nel nostro caso, iterando N volte la mappa potremo perciò sapere dopo un certo numero N di passaggi dal punto $\vec{x}_0 \in B$ se il pendolo starà girando in senso orario oppure antiorario; in altre parole potremo determinare se σ_N corrisponde ad una "A" o ad una "O" trasladando di N volte la stringa a sinistra. Quello che stiamo facendo, dato che da uno stato iniziale $\vec{x}_0 \in B$ si può dedurre una stringa qualsiasi (è ciò che ci dice la proposizione 5), è una sostituzione della vera dinamica, abitualmente ottenuta tramite un andamento in funzione del tempo partendo da un punto \vec{x}_0 , con una dinamica a stringhe. Essa considera perciò il moto come una successione di eventi discreti.

⁴Si ha $k \in \mathbb{Z}$, e non $k \in \mathbb{N}$, poiché anche il passato si può scegliere arbitrariamente.

Si invita il lettore a prestare attenzione a non confondere il concetto di “stringa” con quello di “orbita”. Una stringa, come abbiamo già detto, è un insieme di simboli, nel nostro caso “O” e “A”. Un esempio di stringa potrebbe essere, ad esempio,

$$\tau = AAOAOAAOOA\dots$$

Questa stringa rappresenta una condizione iniziale dalla quale, applicando n volte la mappa Φ si otterranno tutte le altre stringhe; ad esempio:

$$\begin{aligned}\Phi(\tau) &= AOAOAAOOA\dots \\ \Phi^2(\tau) &= OAOAAOOA\dots \\ &\dots\end{aligned}$$

Queste sono tutte **stringhe**, mentre l'**orbita** $\mathcal{O}(\tau) = \{\tau, \Phi(\tau), \Phi^2(\tau), \dots\}$ è l'insieme di tutte le stringhe. Aver assimilato appieno questi concetti è essenziale per capire il proseguo del lavoro. Munendo l'insieme Σ di una distanza, esso diventa uno spazio metrico. Il fatto di definire su Σ una distanza è motivato dal fatto che solo così si può parlare di vicinanza fra i punti di questo insieme. In questo modo si potranno dimostrare le proprietà del caos.

La distanza fra due stringhe σ e τ è definita nel modo seguente:

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\sigma_i, \tau_i)}{2^i} \quad (3.4)$$

dove

$$\delta(\sigma_i, \tau_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_i \neq \tau_i \\ 0 & \text{se } \sigma_i = \tau_i. \end{cases}$$

Siamo sicuri che quella appena definita sia realmente una distanza? Per avere una conferma, verifichiamo rapidamente i tre assiomi che una distanza d , definita sull'insieme E , deve soddisfare:

(D1) Per ogni $x, y \in E$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

(D2) Per ogni $x, y \in E$

$$d(x, y) \geq 0 \quad e \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(D3) Per ogni $x, y, z \in E$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (D1) è triviale: ovviamente vale

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\sigma_i, \tau_i)}{2^i} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\tau_i, \sigma_i)}{2^i} = d(\tau, \sigma).$$

Perciò (D1) è verificata.

Passiamo all'assioma (D2). Dato che $\frac{\delta(\tau_i, \sigma_i)}{2^i} \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\tau_i, \sigma_i)}{2^i}$ è una somma di numeri positivi, dunque il risultato è certamente positivo. La seconda parte di (D2) è verificata per definizione:

$$d(\sigma, \tau) = 0 \Leftrightarrow \delta(\sigma_i, \tau_i) = 0 \Leftrightarrow \sigma_i = \tau_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sigma = \tau.$$

Concludiamo con il terzo assioma. In questo caso la situazione si fa leggermente più complessa. Per dimostrare che il nostro spazio metrico soddisfa (D3) occorre prima di tutto iniziare ad appurare che vale:

$$\delta(\sigma_i, \tau_i) \leq \delta(\sigma_i, \varsigma_i) + \delta(\varsigma_i, \tau_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

dove σ, ς e $\tau \in \Sigma$, ossia sono delle stringhe.

Questo significa che la distanza fra le stringhe σ e τ è minore della distanza fra σ e ς sommata a quella fra ς e τ , ma unicamente riferendosi ad una qualsiasi i -esima componente (vale per ogni i). Per dimostrare ciò occorre considerare ogni singolo caso possibile:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } \sigma_i = \tau_i = \varsigma_i & \text{allora } \delta(\sigma_i, \tau_i) = 0 \leq \delta(\sigma_i, \varsigma_i) + \delta(\varsigma_i, \tau_i) = 0 + 0 = 0. \\ \text{Se } \sigma_i = \tau_i \neq \varsigma_i & \text{allora } \delta(\sigma_i, \tau_i) = 0 \leq \delta(\sigma_i, \varsigma_i) + \delta(\varsigma_i, \tau_i) = 1 + 1 = 2. \\ \text{Se } \sigma_i \neq \tau_i = \varsigma_i & \text{allora } \delta(\sigma_i, \tau_i) = 1 \leq \delta(\sigma_i, \varsigma_i) + \delta(\varsigma_i, \tau_i) = 1 + 0 = 1. \\ \text{Se } \sigma_i \neq \tau_i \neq \varsigma_i \equiv \sigma_i = \varsigma_i \neq \tau_i & \text{allora } \delta(\sigma_i, \tau_i) = 1 \leq \delta(\sigma_i, \varsigma_i) + \delta(\varsigma_i, \tau_i) = 0 + 1 = 1. \end{array}$$

Perciò la diseuguaglianza (3.5) è valida in ogni caso.

Si osservi come l'equiveridicità, presente nell'ultimo caso, è data dal fatto che σ_i, τ_i e ς_i sono i sensi di rotazione, il che giustifica il passaggio in quanto si hanno due sole possibilità.

Per arrivare alla distanza (3.4) basta dividere per 2^i e poi sommare su tutte le i ; il risultato da dimostrare è il seguente:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\tau_i, \sigma_i)}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\tau_i, \varsigma_i)}{2^i} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\varsigma_i, \tau_i)}{2^i}. \quad (3.6)$$

Ma questa è valida in quanto la diseuguaglianza (3.5) è stata verificata: i singoli termini a sinistra, poiché $\frac{1}{2^i} > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, saranno sempre minori o uguali dei loro corrispondenti a destra della diseuguaglianza. Ne segue che, calcolando la (3.6) a sinistra e a destra del segno relazionale, si otterrà in ogni caso un risultato che la soddisfa in modo corretto. Ciò vuol perciò dire che:

$$d(\sigma, \tau) \leq d(\sigma, \varsigma) + d(\varsigma, \tau);$$

ossia che l'assioma (D3) è anch'esso verificato.

Si può dunque concludere dicendo che (Σ, d) forma uno spazio metrico e che d è una distanza su Σ . \square

Procediamo con la dimostrazione che (Σ, Φ) rappresenta un sistema caotico. Iniziamo con il verificare che la mappa Φ è sensibile alle condizioni iniziali. Per farlo abbiamo bisogno di definire cosa significa che una funzione ha dipendenza sensibile alle condizioni iniziali.

Definizione 2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow X$ una funzione continua. Si dice che f ha **sensibile dipendenza alle condizioni iniziali** se esiste un qualsiasi $\rho > 0$ tale che per ogni $x \in X$ e per ogni intorno aperto $\mathcal{N}(x)$ di x , esiste un $y \in \mathcal{N}(x)$ e una n dipendente da y . In questo caso si ha:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \rho.$$

Il numero ρ è chiamato *costante sensibile* di f .

Dimostriamo ora che per il caso da noi considerato questa definizione è verificata.

Dimostrazione. Sia $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n \dots)$ un'orbita appartenente a Σ e sia $\mathcal{N}(\eta) \subset \Sigma$ un intorno aperto di η . Definiamo per $m \in \mathbb{N}$ l'insieme:

$$\mathcal{A} = \{s \in \Sigma : s \text{ è identica a } \eta \text{ per i primi } m \text{ simboli}\}.$$

Dunque per una stringa $\tau \in \mathcal{A}$ vale

$$d(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\eta_i, \tau_i)}{2^i} \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Questo poiché i primi m termini di η e τ sono uguali fra loro, e dunque $\delta(\eta_i, \tau_i) = 0$ per $i \leq m$, mentre in seguito, anche se i successivi fossero tutti differenti si avrebbe

$$d(\eta, \tau) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (3.7)$$

Scegliamo ora m sufficientemente grande in modo che valga $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(\eta)$ e poniamo la costante sensibile $\rho = 1$.

Dato che $\tau \in \mathcal{A}$ si ha:

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{m+1}, \dots) \\ &= (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m, \tau_{m+1}, \dots). \end{aligned}$$

Infatti

$$\tau_i = \eta_i \text{ per } i \leq m$$

e

$$\tau_i \neq \eta_i \text{ per } i = m + 1.$$

Per $i > m + 1$ i termini possono essere sia uguali che differenti, Quindi, a partire dal termine $m + 1$, la distanza fra le orbite di condizione iniziale η e τ , dopo $m + 1$ iterazioni, notata $d(\Phi^{m+1}(\eta), \Phi^{m+1}(\tau))$, diventa:

$$\begin{aligned} d(\Phi^{m+1}(\eta), \Phi^{m+1}(\tau)) &= d((\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots), (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots)) \\ &= \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\delta(\eta_i, \tau_i)}{2^{i-(m+1)}} \\ &= 1 + \sum_{i=m+2}^{+\infty} \frac{\delta(\eta_i, \tau_i)}{2^{i-(m+2)}} \geq 1 = \rho. \end{aligned}$$

Dunque, data la definizione 2, la mappa Φ è sensibile alle condizioni iniziali. \square

Passiamo ora alla seconda proprietà del caos: la densità. A è denso in B se $\forall x \in B$ esiste una $y \in A$ la cui distanza è minore di un qualsiasi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Dimostrazione. Innanzitutto dobbiamo scegliere quali insiemi, inerenti al nostro esempio, occorre considerare e sostituire ai generici A e B citati sopra. La nostra scelta sarà la seguente:

$$\begin{aligned} A &= \text{Per}(\Phi) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \text{Per}_n \\ B &= \Sigma. \end{aligned}$$

Dove $\text{Per}_n(\Phi)$ è l'insieme di tutte le stringhe di periodo n appartenenti a Σ .

Ciò che dobbiamo verificare è perciò che $\forall s \in \Sigma$ esiste $s_k \in \text{Per}_n(\sigma)$ tale che $d(s, s_k) < \varepsilon$.

A questo punto per ogni $\tilde{s} \in \Sigma$ definiamo \tilde{s}_k come segue: data

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_k, \dots)$$

si pone

$$\tilde{s}_k = (\overline{\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}}) = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \dots).$$

Calcoliamo ora la distanza fra queste due stringhe usando la distanza definita con l'equazione (3.4):

$$d(\tilde{s}, \tilde{s}_k) = d((\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_k, \dots); (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{k-1}, \dots)) \leq \frac{1}{2^{k-1}};$$

questo poiché i primi k elementi fra le due orbite coincidono. Dato che la condizione di densità deve valere *per ogni* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, basta porre $\varepsilon = \frac{1}{2^{k-1}}$ per realizzarla. Si ottiene infatti:

$$d(\tilde{s}, \tilde{s}_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon,$$

dunque $\text{Per}_n(\sigma)$ è denso in Σ . □

L'ultima proprietà che ci rimane da giustificare è quella inerente alla transitività. Questa proprietà ci dice che esiste una condizione iniziale τ tale che la sua orbita, notata $\mathcal{O}(\tau)$ e che corrisponde a $\{\tau, \Phi(\tau), \Phi^2(\tau), \dots\}$, è densa in Σ .

A prima vista questa definizione potrebbe trarci in inganno inducendoci a confondere il concetto di densità con quello di transitività. La differenza sostanziale fra i due è che il primo afferma che scegliendo un punto a caso in Σ , allora di sicuro c'è un'orbita periodica che transita infinitamente vicino ad esso, mentre secondo la transitività, data una condizione iniziale, l'orbita uscente da essa andrà ad occupare tutto lo spazio Σ (nel senso che essa sarà infinitamente vicina ad ogni punto).

Per aiutarci ancora più nella comprensione possiamo fare un paragone con i numeri. La densità può essere correlata al fatto che prendendo un elemento qualsiasi di \mathbb{R} siamo sicuri che infinitamente vicino ad esso ce ne sia uno periodico poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} . Per il paragone con la transitività, invece, possiamo pensare ai nostri stati "O" e "A" come se corrispondessero alle due cifre della base binaria (0 e 1). Le stringhe $\mathcal{O}(\tau)$ diventerebbero perciò dei numeri in base due che, se trasformati in base decimale, sarebbero relazionabili a tutti i numeri razionali. $\mathcal{O}(\tau)$ è denso in Σ così come \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

Chiarito questo aspetto, dimostriamo allora che il sistema possiede la proprietà della transitività.

Dimostrazione. Dato che la condizione iniziale dalla quale parte un'orbita densa in Σ è generica (la proprietà parla di "esiste un τ "), siamo liberi di sceglierla come ci è più comodo per dimostrare la transitività.

Definiamo quindi τ come segue:

$$\tau = (0100011011000001010011100101110111 \dots).$$

Vista così, la stringa non sembra presentare particolari caratteristiche, ma basta suddividerla in n immaginari blocchi di n cifre per far sì che τ assuma tutto un altro aspetto. Si ha infatti:

$$\tau = (\underbrace{01}_{\text{blocco 1}} \underbrace{:00\ 01\ 10\ 11}_{\text{blocco 2}} \underbrace{:000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111}_{\text{blocco 3}} \underbrace{: \dots}_{\text{blocco 4}} \underbrace{: \dots}_{\text{blocco } n} \underbrace{: \dots}_{\text{blocco } n+1} \dots).$$

Possiamo cioè affermare che per ogni stringa $s \in \Sigma$, con $s = (s_0 s_1 \dots s_{k-1} \dots)$, le prime k cifre $s_0 s_1 \dots s_{k-1}$ appaiono da qualche parte nel k -esimo blocco di τ .

Esiste quindi un $n(k)$ tale che:

$$\Phi^{n(k)}(\tau) = (s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots),$$

dove $t_{k+j} \in \{0, 1\}$ per $j \in \mathbb{N}$.

Calcoliamo ora la distanza fra la stringa s menzionata sopra e quella appena indicata. Poiché i primi k simboli sono uguali, così come già fatto nelle dimostrazioni della sensibilità alle condizioni iniziali e della transitività, possiamo dunque concludere che

$$d(s, \Phi^{n(k)}(\tau)) \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

perciò, dato che possiamo scegliere k arbitrariamente, osserviamo che per ogni $\varepsilon = \frac{1}{2^{k-1}}$,

$$d(s, \Phi^{n(k)}(\tau)) < \varepsilon.$$

Quindi $\mathcal{O}(\tau)$ è denso in Σ poiché per ogni $s \in \Sigma$ esiste un punto dell'orbita di τ tale che $d(s, \Phi^{n(k)}(\tau)) < \varepsilon$, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. \square

Abbiamo perciò dimostrato che il sistema dinamico (Σ, Φ) è caotico.

Capitolo 4

Conclusione

A questo punto si invita il lettore a ripensare a quanto discusso nell'ultimo capitolo rendendolo attento principalmente a due aspetti.

Innanzitutto occorre accorgersi della facilità con la quale si può ottenere un sistema caotico: ad un banalissimo pendolo semplice basta aggiungere un termine forzante non lineare per ritrovarsi in una situazione estremamente complessa e intricata.

Secondariamente, grazie proprio a questa linea sottilissima che separa l'ordine dal caos, si può osservare come per parlare della Teoria del Caos non sia necessario cominciare il discorso da pareti quasi inaccessibili e a quote irraggiungibili per chi non fa parte degli "addetti ai lavori". Si può, invece, partire da una comodissima strada sterrata per poi, a poco a poco, scegliere sentieri sempre più tortuosi ed arrivare infine, dopo aver accumulato una grande esperienza riguardo al paesaggio attorno al nostro cammino, all'altipiano del mondo caotico.

Guarda caso, è proprio quanto si è cercato di fare in questo lavoro, accompagnando il lettore presentandogli di volta in volta tutti i sentieri nuovi e conducendolo in questo immenso altipiano che, per ovvie ragioni di spazio e tempo, non si è potuto esplorare a fondo. Riguardando il percorso scelto, infatti, ci si accorge che abbiamo innanzitutto trattato attrattori di dimensione zero e uno, ossia punti fissi e cicli limite, ma non è stato possibile affrontare il vastissimo discorso inerente agli attrattori strani: quelli di dimensione frattale di cui il celebre modello di Lorenz ne è un esempio.

In ogni caso, la speranza è quella di aver risvegliato una curiosità verso la scoperta di questo mondo. È questo l'essenziale poiché, così come sostiene Pitagora:

“Alla maggior parte degli uomini e delle donne non è data, né per nascita né coi propri sforzi, la possibilità di diventare ricchi e potenti, mentre il sapere è alla portata di chiunque”;

a cui fa eco Einstein affermando che

“Non ho particolari talenti. Sono solo appassionatamente curioso”.

Ed è infatti grazie a questa curiosità che l'essere umano è stato in grado di sviluppare tutto il Sapere, ma sarebbe da sciocchi pensare di conoscere già tutto; ecco perché bisogna sempre lasciare aperta la porta della curiosità.

Appendice A

Definizioni e concetti di algebra lineare

Definizione 3. Sia l'equazione

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\text{A.1})$$

con A una matrice diversa dalla matrice nulla, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \neq \vec{0}$. Allora \vec{x} è chiamato **autovettore di A** , mentre λ è chiamato **autovalore di A** .

Cerchiamo ora di determinare gli autovalori e, di conseguenza, gli autovettori. Grazie alla definizione precedente si giunge facilmente a

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}.$$

Definizione 4. Il **polinomio caratteristico**, notato $c_A(\lambda)$ è dato da

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Per trovare gli autovalori, dato che la matrice $A - \lambda I$ non è invertibile¹ e grazie alle proprietà delle matrici², basta quindi porre

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \quad (\text{A.2})$$

In questo testo, dato che questi concetti sono utilizzati per linearizzare un'EDO e dunque per trovare i punti di equilibrio, la matrice A sopracitata sarà sempre la matrice di Jacobi, che ora definiamo, calcolata nel punto di equilibrio \vec{x}^* .

Definizione 5. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ e $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale derivabile in \vec{x} . Se f_1, f_2, \dots, f_m sono le componenti di \vec{f} , allora la **matrice di Jacobi o matrice Jacobiana**, notata $D\vec{f}(\vec{x})$ di \vec{f} in \vec{x} è la matrice con m righe e n colonne data da:

$$D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

¹**Dimostrazione per assurdo:** se $A - \lambda I$ fosse invertibile si avrebbe:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

\Leftrightarrow

$$\vec{x} = (A - \lambda I)^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

Ma qui si cade in contraddizione in quanto precedentemente avevamo definito $\vec{x} \neq \vec{0}$.

²Una matrice B è invertibile $\Leftrightarrow \det B \neq 0$.

Bibliografia

- [1] Giancarlo Benettin, *Appunti per il corso di Fisica Matematica*, Padova 2014
- [2] Pierre Bergé, Yves Pomeau, Christian Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Hermann Editeurs, Paris 1998
- [3] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press, Waltham 2013
- [4] Hervé Kunz, *Phénomènes non-linéaires et chaos*, Losanna 1997
- [5] Giancarlo Benettin, *Introduzione ai Sistemi Dinamici*, Padova 2011-2012
- [6] Christian Ferrari, *Sistemi dinamici e caos*, Locarno 2014
- [7] Goong Chen, Yu Huang, *Chaotic Maps; Dynamics, Fractals and Rapid Fluctuations*, Morgan & Claypool Publishers, Washington 2011
- [8] Christian Ferrari, *Spazi vettoriali e geometria analitica*, Locarno 2012
- [9] http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra.
- [10] <http://www.aw-bc.com/ide/idefiles/media/JavaTools/popltkvl.html>
- [11] [http://www.treccani.it/enciclopedia/sistemi-dinamici-e-sistemi-caotici_\(XXI_Secolo\)/](http://www.treccani.it/enciclopedia/sistemi-dinamici-e-sistemi-caotici_(XXI_Secolo)/)
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory
- [13] <http://matematica.unibocconi.it/caos/home.htm>