

Die Schnittkrümmung als Verallgemeinerung der Gauss-Krümmung

17. Dezember 2021

Yves Scherrer, Klasse 6a

Kantonsschule Hohe Promenade, Zürich
Schuljahr 2021/2022

Betreuer: Martin Berger
Korreferent: Oliver Sieber

Die Schnittkrümmung als Verallgemeinerung der Gauss-Krümmung

Yves Scherrer

Begutachter: Thomas Foertsch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
2	Einführende Überlegungen	12
3	Gauss-Abbildung und Gauss-Krümmung	16
3.1	Gauss-Abbildung	16
3.2	Gauss-Krümmung	16
4	Differenzierbare Mannigfaltigkeit	17
4.1	Differenzierbarkeit	17
4.2	Tangentialvektor und Tangentialraum	19
4.3	Differential	22
4.4	Immersion und Einbettung	24
4.5	Vektorfeld und Lie-Klammer	25
5	Riemannsche Mannigfaltigkeit	28
5.1	Riemannsche Metrik	28
6	Levi-Civita-Zusammenhang	29
6.1	Affiner Zusammenhang	29
6.2	Levi-Civita-Zusammenhang	34
7	Geodäten und Exponentialabbildung	37
7.1	Geodäten	37
7.2	Exponentialabbildung	42
8	Krümmung	43
8.1	Riemannscher Krümmungstensor	43
8.2	Schnittkrümmung	48
9	Untermannigfaltigkeit	51
9.1	Levi-Civita-Zusammenhang	51
9.2	Zweite Fundamentalform	52
9.3	Schnittkrümmung	55
10	Zusammenhang zwischen Schnitt- und Gauss-Krümmung	59
10.1	Auf regulären Flächen	59
10.2	Allgemeiner Fall	60
11	Anhang	63
11.1	Tensoren	63
11.2	Tensorkontraktionen	64
11.3	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit	64

11.4	Beziehung der Schnittkrümmung zu weiteren Krümmungsgrößen	65
11.4.1	Riemannscher Krümmungstensor	65
11.4.2	Ricci-Krümmung	66
11.4.3	Skalarkrümmung	66
12	Schlusswort	67
13	Quellenverzeichnis	68

Vorwort

Ich befasse mich in dieser Arbeit hauptsächlich mit den Konzepten der differenzierbaren Mannigfaltigkeit, insbesondere mit jenen der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dabei halte ich mich an die Bücher [DC2] und [O'Neill].

Für eine Einführung in die Konzepte der Analysis, der linearen Algebra sowie der elementaren Differentialgeometrie, derer ich mich in dieser Arbeit bediene, verweise ich auf die Bücher [OF1], [OF2], [OF3] sowie [GF] und [DC1].

Danksagung

Ein grosser Dank gebührt meinen Eltern Andrea und Michael Scherrer. Ihr habt mich nicht nur während des Arbeitsprozesses sondern auch im Allgemeinen über viele Jahre hinweg stets unterstützt und mir neue Möglichkeiten aufgezeigt.

Einen ebenfalls grossen Dank möchte ich an Thomas Foertsch aussprechen. War der Kontakt zu Dir ursprünglich entstanden, weil ich Fragen bezüglich der Allgemeinen Relativitätstheorie klären wollte, hast Du Dich schnell zu einer Betreuungsperson für meine Maturitätsarbeit entwickelt. Obwohl ich erst im Herbst mit Dir Kontakt aufgenommen habe, hast Du ein äusserst grosses Engagement gezeigt, das, insbesondere im Angesicht Deiner Beschäftigung als Gymnasiallehrer, auf keinen Fall selbstverständlich ist.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit stelle ich diejenigen Konzepte der Riemannschen Geometrie vor, deren semi-Riemannschen Pendant die Grundlage für ein mathematisch fundiertes Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie bilden.

Schliesslich identifiziere ich die Schnittkrümmung als Verallgemeinerung der Gauss-Krümmung. Ausserdem wird gezeigt dass die Schnittkrümmung im Punkt p einer allgemeinen Mannigfaltigkeit M bezüglich eines zwei-dimensionalen Unterraums σ von $T_p M$ identisch mit der Gauss-Krümmung im Punkt p einer Untermannigfaltigkeit S von M ist, die in p tangential zu σ ist.

1 Einleitung

Schon von früher Kindheit an habe ich mich für die Forschung, für das Lesen von Büchern und für das Verstehen von Zusammenhängen interessiert. Zuerst äusserte sich dies vor allem im Züchten und Sezieren von Tieren, wobei mir die Erfahrung meiner Mutter als Laborantin eine grosse Hilfe war.

Einige Jahre später, im Alter von neun Jahren, habe ich damit begonnen, in Java zu programmieren. In den folgenden Jahren habe ich mir diesbezüglich viel Wissen durch das Lesen von Fachbüchern angeeignet. Aufgrund meines wachsenden Interesses schenkte mir mein Vater während der zweiten Klasse des Gymnasiums vier Bücher, die die mathematischen Grundlagen der Informatik und sogar das Grundstudium der Mathematik abdeckten.

Das erste dieser vier Bücher, nämlich ein Buch zur Grundvorlesung Analysis I, las ich im selben Jahr noch etwa bis zur Hälfte. Schliesslich hörte ich mit dem Lesen auf, um wieder über mehr Zeit für das Programmieren zu verfügen.

Durch den Lockdown im Frühjahr 2020, wurde mir die Möglichkeit geboten, endlich nach meinem eigenen Rhythmus die schulischen Aufträge zu bearbeiten. Dadurch erlangte ich sehr viel freie Zeit, die ich damit verbracht habe, das bereits zwei Jahre zuvor begonnene Buch zur Analysis weiterzulesen.

So arbeitete ich mich vom Frühjahr 2020 bis zum Frühjahr 2021 durch die Lehrbücher „Analysis 1“, „Analysis 2“ und „Analysis 3“ von Otto Forster ([OF1], ([OF2], [OF3]) und „Lineare Algebra“ von Gerd Fischer ([GF]), die etwa den Vorlesungen Analysis I, II und III und der Linearen Algebra I und II des Mathematik-Grundstudiums entsprechen.

Schliesslich entschloss ich mich, herauszufinden, ob ich auf der Grundlage des mir bis dahin angeeigneten Wissens in der Lage sein würde, die Grundzüge der mathematischen Formulierung einer mich schon lange faszinierenden physikalischen Theorie, nämlich der Allgemeinen Relativitätstheorie, zu verstehen. Dieser Frage wollte ich also im Rahmen meiner Maturitätsarbeit auf den Grund gehen und dazu empfahl mir mein Vater die Lektüre des mathematischen Fachbuchs „Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity“ von Barrett O’Neill ([O’Neill]).

Zur Vorbereitung auf dieses Buch las ich im Frühling des Jahres 2021 das Buch „Differentialgeometrie von Kurven und Flächen“ von Manfredo Perdigão do Carmo ([DC1]). Mitte September desselben Jahres war ich mit der Lektüre des im oberen Abschnitt genannten Buches zur semi-Riemannschen Geometrie fertig und las zur letzten Vorbereitung auf meine Maturitätsarbeit noch das Buch „Riemannian Geometry“, ebenfalls von Manfredo Perdigão do Carmo ([DC2]).

In der von Albert Einstein in den Jahren von 1907 bis 1915 entwickelten Gravitationstheorie resultiert die Materieverteilung im Universum in einer Krümmung der Raumzeit, in der sich wiederum die Grundkraft der Gravitation manifestiert. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Materieverteilung einerseits und der daraus resultierenden Krümmung andererseits durch die sogenannten Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

beschrieben, in der c für die Lichtgeschwindigkeit, G für die Gravitationskonstante, $g_{\mu\nu}$ für den Metriktensor, $R_{\mu\nu}$ für den Ricci-Tensor, $T_{\mu\nu}$ für den Energie-Impuls-Tensor und R für den sogenannten Krümmungsskalar stehen.

Dabei handelt es sich beim Metriktensor $g_{\mu\nu}$ um ein sogenanntes Tensorfeld auf einer vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit, der dieser lokal die Struktur des Minkowskiraums verleiht und seinerseits sowohl die Raumzeit-Ricci-Krümmung $R_{\mu\nu}$ also auch den Krümmungsskalar R determiniert.

Vermöge dieser Theorie bewegen sich einzig der Gravitation ausgesetzte Teilchen und Körper auf ihrerseits durch den Metriktensor ausgezeichneten Kurven, den sogenannten Geodäten, die die kürzesten Verbindungen zwischen Punkten darstellen und somit das Pendant zu den Geraden im Euklidischen Raum darstellen, entlang denen sich kräftefreie Körper in der Newtonschen Mechanik (geradlinig gleichförmig, also mit konstantem Geschwindigkeitsvektor) bewegen.

Dass die Raumzeit-Geodäten tatsächlich von der Masse der Sonne gekrümmt um diese herumlaufen, konnte Sir Arthur Eddington schliesslich 1929 während einer Sonnenfinsternis bestätigen, um damit eine wesentliche Vorhersage Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie zu verifizieren.

Wäre es mir also möglich, diese Konzepte streng mathematisch zu verstehen?

Wie sich herausgestellt hat, ist ein prinzipielles Verständnis dieser Konzepte tatsächlich möglich. Jedoch musste ich mich aufgrund der zeitlichen Rahmenbedingungen meiner Maturitätsarbeit einerseits und meinem Anspruch daran, die Dinge technisch möglichst vollständig darzustellen, andererseits, dazu entschliessen, mich in meinen Ausführungen auf die sogenannte Riemannsche Geometrie zu beschränken, deren Mannigfaltigkeiten mit einem Riemannschen Metriktensor ausgestattet sind, der ihre Tangentialräume nicht mit einer Minkowski-Raumzeit-Struktur, sondern einer Euklidischen Struktur, also einem Skalarprodukt, ausstattet.

Die Krümmung der Raumzeit spielt also in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle, und so zielt die vorliegende Arbeit darauf ab, die soge-

nannte Schnittkrümmung, in der bereits die volle Information des Riemannschen Krümmungstensors kodiert liegt, als direkte Verallgemeinerung der geometrisch sehr anschaulichen Gaußschen Krümmung einer im \mathbb{R}^3 eingebetteten parametrisierten Regulären Fläche zu begreifen. Dazu wiederum werde ich unterschiedliche Konzepte der Riemannschen Geometrie vorstellen, deren semi-Riemannsche Pendanten auf den die Raumzeiten der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibenden Mannigfaltigkeiten allesamt für das Verständnis und die geometrische Interpretation der Einsteinschen Feldgleichungen relevant sind.

Zu diesem Zweck präsentiere ich in Kapitel 2 zunächst das Beispiel des schiefen Wurfs in der Newtonschen Mechanik, um dabei diejenigen klassischen Konzepte vorzustellen, deren Verallgemeinerungen uns im weiteren Verlauf der Arbeit interessieren werden.

Ich werde nun etwas genauer auf den Inhalt der einzelnen Kapitel eingehen.

Kapitel 3: Wir stellen zwei wichtige Begriffe der elementaren Differentialgeometrie vor. Es geht um den Krümmungsbegriff regulärer Flächen im \mathbb{R}^3 : Zuerst wird die Gaussabbildung eingeführt und damit dann die Gauss-Krümmung definiert.

Kapitel 4: Der Begriff der regulären Fläche wird zum Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit verallgemeinert. Mannigfaltigkeiten sind Räume, die, im Unterschied zu regulären Flächen, gekrümmt sein können, ohne in einen Vektorraum eingebettet zu sein. Schliesslich werden Konzepte aus der reellen Analysis, wie zum Beispiel das Konzept des Tangentialvektors auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert.

Kapitel 5: Wir definieren den Begriff der Riemannschen Metrik. Bei regulären Flächen wird diese Metrik vom umgebenden Raum \mathbb{R}^3 „automatisch“ induziert. Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist die Metrik im Allgemeinen eine intrinsische Grösse.

Kapitel 6: Der Levi-Civita-Zusammenhang wird vorgestellt. Er ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Ableitung von Vektorfeldern im \mathbb{R}^n . Er ist nötig, um in Kapitel 8 den Riemannschen Krümmungstensor definieren zu können.

Kapitel 7: Zunächst wird der Begriff der Geodäte definiert. Er ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Gerade der euklidischen Geometrie. Mit dem Begriff der Geodäte wird schliesslich die Exponentialabbildung definiert. Mit ihrer Hilfe wird es in Kapitel 10 möglich sein, den Begriff der Schnittkrümmung zu veranschaulichen.

Kapitel 8: Es wird zunächst der Begriff des Riemannschen Krümmungstensors

definiert. Damit wird schliesslich die Schnittkrümmung definiert. Es handelt sich dabei um eine Zahl, die einem zweidimensionalen Untervektorraum des Tangentialraums in einem Punkt der Mannigfaltigkeit zugeordnet wird.

Kapitel 9: Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel damit, inwiefern die Geometrie einer Mannigfaltigkeit die Geometrie einer Untermannigfaltigkeit beeinflusst.

Kapitel 10: Zuerst zeigen wir, dass im Fall regulärer Flächen die Gauss-Krümmung identisch ist mit der Schnittkrümmung. Diese Eigenschaft macht bereits klar, dass die Schnittkrümmung die Gauss-Krümmung verallgemeinert. Schliesslich zeigen wir einen Zusammenhang zwischen der Schnittkrümmung allgemeiner Mannigfaltigkeiten und der Gauss-Krümmung.

Kapitel 11: Im Anhang werden der Begriff der semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit und die Ricci- und Skalar­krümmung eingeführt. Dabei werden sowohl Ricci- als auch Skalar­krümmung mit der Schnittkrümmung in Beziehung gesetzt. Dies ermöglicht es interessierten Lesern, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Krümmungsgrössen sowie zentrale mathematische Konzepte der Einsteinschen Feldgleichung in Zusammenhang mit dieser Arbeit zu verstehen.

2 Einführende Überlegungen

In diesem Abschnitt stellen wir den schiefen Wurf im Gravitationsfeld der Erde klassisch dar, um anhand der angestellten Überlegungen die unterschiedlichen differentialgeometrischen Konzepte zu motivieren, die wir im Folgenden vorstellen werden.

Selbstverständlich treffen wir bei der mathematischen Modellierung des physikalischen schiefen Wurfs einige vereinfachende Annahmen. Beispielsweise wollen wir jegliche Reibungseffekte ausser Acht lassen, die Erdoberfläche in erster Näherung lokal durch ihre Tangentialebene approximieren und ebenfalls in erster Näherung davon ausgehen, dass die (senkrecht zur Tangentialebene gerichtete) Gravitationsfeldstärke und damit die resultierende Gravitationsbeschleunigung auf dem von uns betrachteten Bereich konstant ist.

Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem, dessen x - und z -Achse die betrachtete Tangentialebene parametrisieren (siehe folgende Abbildung 1). Schliesslich werfen wir ein Objekt zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Höhe $h(0) = 10\text{ m}$ von Punkt $c(0) = (0, 0, 10)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

also unter dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ zur betrachteten Tangentialebene und mit dem Anfangsgeschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}_0| = 25\text{ m/s}$ in die Höhe.

Nach dem ersten Newtonschen Axiom bewegt sich ein Körper geradlinig gleichförmig, solange keine Kraft auf ihn wirkt. D.h., dass unser Körper konstanter Masse m ohne den Einfluss der Gravitationskraft mit konstanter Geschwindigkeit einer Gerade folgen würde.

Erst die auf den Körper im Punkt $c(t)$ wirkende Gravitationskraft $\vec{F}(c(t))$ resultiert nach dem zweiten Newtonschen Axiom

$$\vec{F}(c(t)) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{c}(t)$$

in der Beschleunigung

$$a(t) = \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(also der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit), die der Körper zum Zeitpunkt t erfährt, und die proportional zur einwirkenden Kraft ist. Es ist hier also die einwirkende Kraft, die den Körper von der Bahn der Geraden auf die

Flugkurve c ablenkt, entlang der der Geschwindigkeitsvektor nicht mehr konstant ist.

Tatsächlich ist es mit der Schulmathematik der Oberstufe nicht schwer, die daraus resultierende parametrisierte Flugkurve $c(t)$ zu bestimmen. Die zweifache Integration der konstanten Beschleunigung liefert nämlich (in der Einheit m/s)

$$\vec{v}(t) = \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{25}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 10t + \frac{25}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c(t) = \begin{pmatrix} \frac{25}{\sqrt{2}}t \\ 0 \\ 5t^2 + \frac{25}{\sqrt{2}}t + 10 \end{pmatrix}.$$

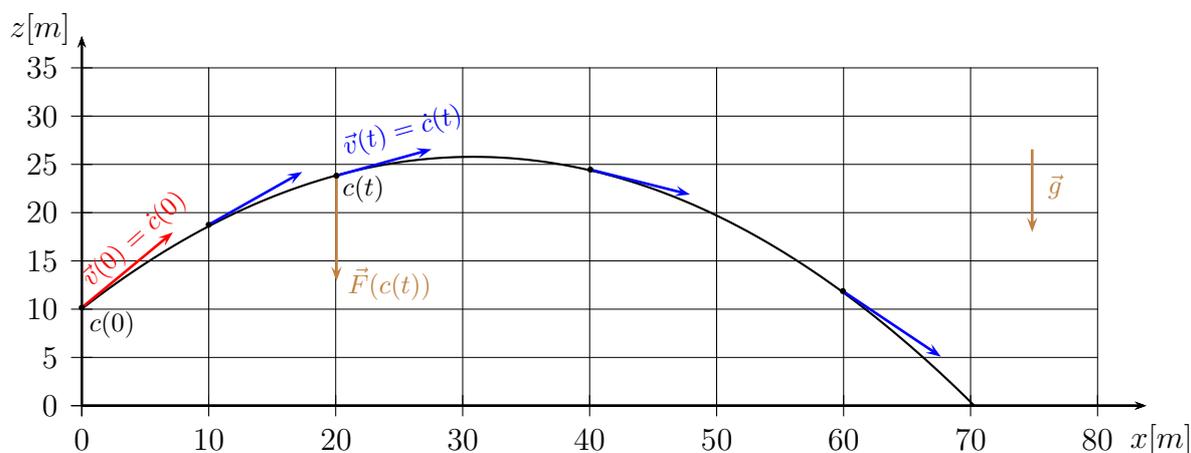


Abbildung 1 (Flugkurve) Eine Flugkurve $c(t)$ mit einigen Geschwindigkeitsvektoren $v(t) = \dot{c}(t)$.

Betrachten wir die Konzepte, die in dieser klassischen Beschreibung auftreten, etwas näher:

- Der Umgebungsraum, in dem die Bewegung stattfindet, ist der **dreidimensionale euklidische Raum**. Die klassische Raumzeit ist dann vierdimensional mit dreidimensionalen euklidischen Schnitten konstanter Zeit.
- Auf diesem Umgebungsraum ist der Begriff der **Differenzierbarkeit** von Kurven und, allgemeiner, von Funktionen erklärt.
- In diesem Umgebungsraum wird die Gravitation durch ein sogenanntes **Vektorfeld** dargestellt, eine Zuordnung, die jedem Punkt des Raumes einen Gravitationsfeldstärkevektor \vec{g} zuordnet (der mit der Masse des geworfenen Körpers skaliert in der auf diesen Körper wirkenden Kraft resultiert).
- Diese Gravitationsfeldstärkevektoren sind insofern ortsgebunden, als man sie sich formal als Vektoren in Vektorräumen vorstellen muss, die den Punkten des Umgebungsraumes angeheftet sind - den sogenannten **Tangentialräumen**.

- Auch das Geschwindigkeitsvektorfeld $\dot{c}(t)$ entlang der parametrisierten Kurve $c(t)$ ist ein **Vektorfeld**, wenngleich es nicht auf dem ganzen Raum sondern nur **entlang der Kurve** c definiert ist und mit den Tangentenvektoren an die Kurve in jedem Kurvenpunkt seinerseits einen Tangentialvektor $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^3$ im an $c(t)$ angehefteten Tangentialraum liefert.
- Den Elementen eines Tangentialraums kann man schliesslich mittels eines **Skalarproduktes** im jeweiligen Tangentialraum eine **Länge** zuordnen (beispielsweise den Betrag der Momentangeschwindigkeit $|\vec{v}(0)| = |\dot{c}(0)|$). Ebenso ist mit diesem Skalarprodukt auch der Winkel zwischen Vektoren erklärt. Wirkt die einzige Kraft, wie in unserem Beispiel, in Richtung der z -Achse, so bleibt der Geschwindigkeitsanteil **orthogonal dazu** (also entlang der Richtungen der (x, y) -Ebene) konstant. (Die y -Achse ist nicht eingezeichnet in obiger Abbildung 1.)
- Die parametrisierten Kurven, auf denen sich die kräftefreien Objekte geradlinig gleichförmig (also mit konstanter Geschwindigkeit) bewegen, sind die nach dem Vielfachen ihrer Bogenlänge parametrisierten **Geraden**.
- Entlang der anderen parametrisierten Kurven ändert sich das Geschwindigkeitsfeld entlang der Kurve. Doch was ist damit genau gemeint? Die unterschiedlichen Tangentialvektoren leben doch in den unterschiedlichen Tangentialräumen, die an unterschiedlichen Kurvenpunkten des Raumes sitzen. Wie werden diese dann miteinander verglichen?
Dies geschieht im Vektorraum, den man kanonisch mit all seinen Tangentialräumen identifizieren kann, über die **Parallelverschiebung**, mit der man Vektoren aus einem Tangentialraum in den anderen verschieben kann, um ihn dann mit anderen Vektoren dieses Raumes zu vergleichen.
Schliesslich ist diese Parallelverschiebung entlang beliebiger differenzierbarer Kurven erklärt, während sie im euklidischen Raum nicht von der Wahl der Kurve, sondern nur von dem Punktepaar abhängt, zwischen dem verschoben wird. Dies ist letztlich so, da es sich bei dem euklidischen Raum, wie wir noch sehen werden, um einen Raum mit verschwindender Krümmung handelt.

Gemäss Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie manifestiert sich die durch Massen induzierte Gravitation in der Krümmung der Raumzeit selbst. Die Teilchen, die sich ausschliesslich unter dem Einfluss der Gravitation bewegen, folgen dann den gekrümmten Geodäten (den Analoga der Geraden im euklidischen Raum), die sich dadurch auszeichnen, dass die der Raumzeit zugrundeliegende intrinsische Parallelverschiebung das Geschwindigkeitsvektorfeld entlang der (nach einem Vielfachen der Bogenlänge parametrisierten) Kurven als konstant erkennt. Nun werde ich in dieser Arbeit, wie bereits erwähnt, nicht die semi-Riemannschen Raumzeiten der Allgemeinen Relativitätstheorie betrachten, sondern ihre rein

räumlichen riemannschen Geschwister. Doch werde ich mich in diesem Rahmen genau mit den Konzepten auseinandersetzen, die für das Verständnis der mathematischen Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie unabdingbar sind.

3 Gauss-Abbildung und Gauss-Krümmung

In diesem Kapitel wird die Gauss-Krümmung regulärer Flächen in Erinnerung gerufen. Die Gauss-Abbildung ist nötig, um damit die Gauss-Krümmung zu definieren.

3.1 Gauss-Abbildung

Definition 1 *Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche. Die Gauss-Abbildung $N : S \rightarrow S^2, p \mapsto N(p)$ ordnet jedem Punkt $p \in S$ seinen Orthonormalvektor $N(p)$ bezüglich der gegebenen Orientierung zu (siehe Abbildung 2). Hierbei ist S^2 die Einheitskugel.*

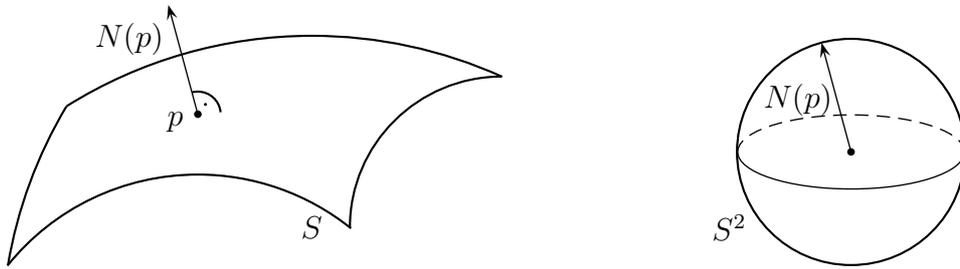


Abbildung 2 (Gauss-Abbildung). Die Gaussabbildung ordnet jedem Punkt p der regulären Fläche S ihren Einheitsnormalvektor $N(p)$ bezüglich der Orientierung zu. Sie ist also eine Abbildung $N : S \rightarrow S^2$.

3.2 Gauss-Krümmung

Definition 2 *Wenn λ_1, λ_2 die beiden Hauptkrümmungen im Punkt p einer regulären Fläche S bezeichnen, so ist die Gausskrümmung $K_s(p)$ definiert als*

$$K_s(p) := \lambda_1 \lambda_2.$$

Der folgende Satz liefert eine geometrische Interpretation der Gauss-Krümmung.

Satz 1 *Es sei p ein Punkt auf einer regulären Fläche S , so dass die Gauss-Krümmung $K_s(p) \neq 0$ ist. V sei eine zusammenhängende Umgebung von p , in der K_s sein Vorzeichen nicht ändert. Dann gilt:*

$$K_S(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

wobei A der Flächeninhalt eines abgeschlossenen Gebietes $B \subset V$ ist, das p enthält, und A' der Flächeninhalt des Bildes $N(B)$ von B unter der Gauss-Abbildung $N : S \rightarrow S^2$ ist (siehe Abbildung 3).

Für einen Beweis dieses Satzes siehe zum Beispiel [DC1], S. 125. \square

Der Grenzwert in obigem Satz ist so zu verstehen, dass man eine Folge von abgeschlossenen Gebieten B_n betrachtet, die in dem Sinn gegen p konvergieren, dass jede Kugel um p alle B_n , für n hinreichend gross, enthält.

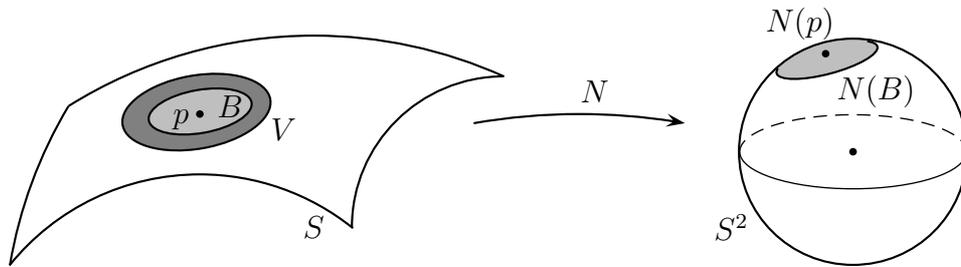


Abbildung 3 (Gauss-Krümmung). Zur Veranschaulichung der Gauss-Krümmung mit dem Gebiet B und dem Bild $N(B)$ von B .

Beispiel 1 (Gauss-Krümmung der Einheitskugel).

Mit obigem Satz ist leicht ersichtlich, dass die Gauss-Krümmung der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 in jedem Punkt gleich eins ist. Denn in diesem Fall ist die Gauss-Abbildung die Identität id_{S^2} auf S^2 . Mit den Bezeichnungen im obigen Satz gilt dann $A' = A$ und somit $\frac{A'}{A} = 1$, also $K_S \equiv 1$.

4 Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Im einführenden Beispiel des klassischen schiefen Wurfs haben wir festgestellt, dass wir als Trajektorie unseres Wurfgeschosses eine differenzierbare Kurve erhalten, deren Tangentialvektoren wir als Elemente der längs der Kurve angehefteten Tangentialräume des euklidischen Anschauungsraumes interpretieren konnten. Und tatsächlich lässt sich auch das totale Differential einer total differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $p \in \mathbb{R}^m$ als lineare Abbildung $D_p f : T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ interpretieren. In diesem Abschnitt geht es um die Verallgemeinerung dieser Konzepte.

4.1 Differenzierbarkeit

Die Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ in m Veränderlichen an einer Stelle $p \in \mathbb{R}^m$ ist eine lokale Eigenschaft der Funktion insofern, als sie auf beliebig kleinen Umgebungen U von p in \mathbb{R}^m entschieden wird. Um diesen lokalen Begriff der Differenzierbarkeit auf Abbildungen zwischen allgemeineren Mengen als den Vektorräumen zu verallgemeinern, fordert man daher, dass die entsprechenden Mengen lokal wie die Vektorräume \mathbb{R}^n beschaffen sein sollen.

Denn auch, wenn sie global eine ganz andere Topologie tragen mögen, so soll es möglich sein, sie stückweise aus zu offenen Mengen des \mathbb{R}^n homöomorphen Teilstücken zusammenzusetzen, die, gleich den Parametrisierungen einer differenzierbaren Struktur, in ihren jeweiligen Überschneidungsgebieten einer Verträglichkeitsbedingung zu genügen haben.

Im Folgenden bedeutet *differenzierbar* immer *unendlich oft differenzierbar*.

Definition 3 Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist eine Menge M mit einer Familie injektiver Abbildungen $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ von offenen Mengen $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ nach M , sodass Folgendes gilt:

- (i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$,
- (ii) Für jedes Paar α, β , mit $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, sind die Mengen $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ und $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ offene Umgebungen im \mathbb{R}^n und die Abbildungen $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ differenzierbar (siehe folgende Abbildung 4).
- (iii) Die Familie U_α ist maximal bezüglich der Bedingungen (i) und (ii).

Das Paar $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ mit $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ heisst Parametrisierung von M im Punkt p .

Mit „maximal“ in Bedingung (iii) ist Folgendes gemeint: Ist $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ eine Parametrisierung der Mannigfaltigkeit, die mit allen anderen Karten der Familie verträglich ist, so gehört $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ bereits zur Familie.

Die in Bedingung (ii) beschriebene Abbildung $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ heisst differenzierbarer Kartenwechsel.

$\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ heisst dann Koordinatenumgebung um p . Eine Familie, $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$, welche die Bedingungen (i) und (ii) in der Definition erfüllt, heisst differenzierbare Struktur auf M .

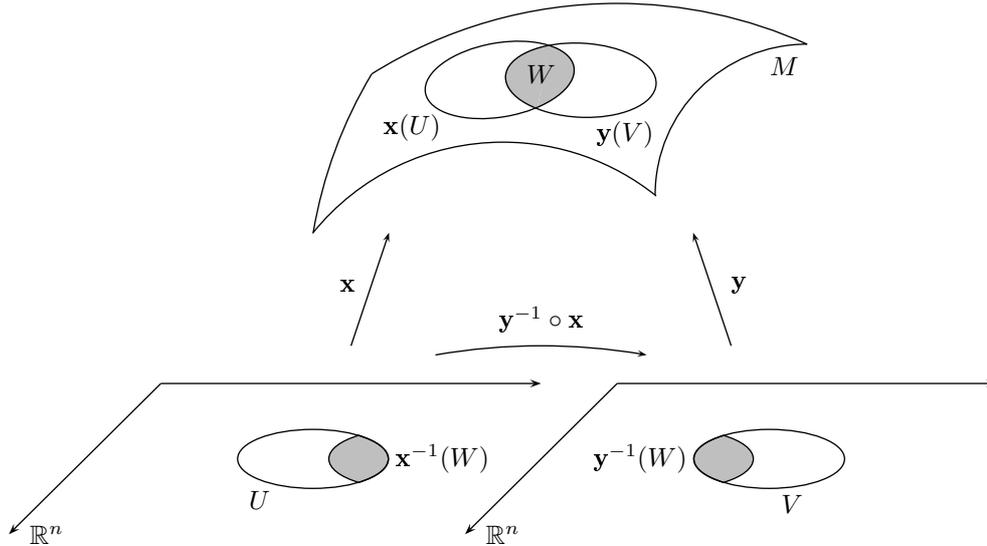


Abbildung 4 (Differenzierbarer Kartenwechsel). Kartenwechsel $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ mit Parametrisierungen \mathbf{x} und \mathbf{y} .

Bemerkung 1 Eine differenzierbare Struktur auf einer Menge M induziert eine natürliche Topologie auf M . Man definiere dafür, dass eine Menge $A \subset M$ offen ist, wenn $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ für alle α eine offene Menge in \mathbb{R}^n ist. Die Axiome einer Topologie sind in diesem Fall leicht nachzuprüfen. Ausserdem kann man nachweisen, dass die Mengen $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ offen sind und dass die Abbildungen \mathbf{x}_α stetig.

Definition 4 Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wobei $\dim(M) = n$ und $\dim(N) = m$ ist. Eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ ist differenzierbar im Punkt $p \in M$, wenn es zu einer gegebenen Parametrisierung $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ im Punkt $\varphi(p)$ eine Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ im Punkt p gibt, sodass $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ gilt und die Abbildung

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

differenzierbar im Punkt $\mathbf{x}^{-1}(p)$ ist. Die Abbildung φ heisst differenzierbar auf einer offenen Menge von M , wenn φ in allen Punkten dieser offenen Menge differenzierbar ist.

Definition 5 Die in Definition 4 definierte Abbildung $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nennt man die Darstellung von φ in den Parametrisierungen \mathbf{x} und \mathbf{y} .

4.2 Tangentialvektor und Tangentialraum

Wie unser Beispiel des klassischen schiefen Wurfs bereits suggeriert, erhalten wir, mittels des Geschwindigkeitsfeldes einer parametrisierten Kurve, Tangentialvektoren entlang der Kurve. Da unsere Mannigfaltigkeiten lokal aber wie der

\mathbb{R}^n beschaffen sind, verwundert es nicht, dass wir die Menge der Tangentialvektoren in einem Punkt, genau wie im \mathbb{R}^n , einerseits als Menge aller möglichen Geschwindigkeitsvektoren an parametrisierte Kurve erhalten können, und andererseits auch als Richtungsableitungen differenzierbarer Funktionen in die durch sie vorgegebenen Richtungen interpretieren können.

Bemerkung 2 Die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ wird im Folgenden mit $\mathfrak{F}(M)$ bezeichnet.

Definition 6 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Funktion $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, wobei $\varepsilon > 0$ ist, heisst differenzierbare Kurve in M .

Definition 7 Es seien eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M und eine differenzierbare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gegeben. Weiter sei $\alpha(0) = p$. Der Tangentialvektor an die Kurve α bei $t = 0$ ist eine Funktion $\alpha'(0) : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \text{ wobei } f \in \mathfrak{F}(M).$$

Ein Tangentialvektor im Punkt p ist der Tangentialvektor an eine Kurve α bei $t = 0$ mit $\alpha(0) = p$ (siehe Abbildung 5).

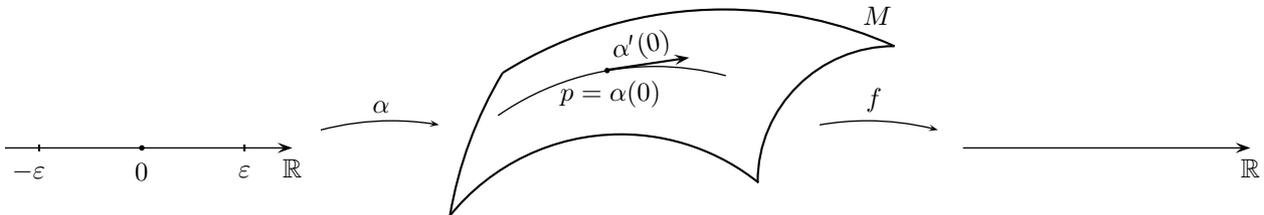


Abbildung 5 (Tangentialvektor). Der Tangentialvektor wird als Differentialoperator aufgefasst, der einer Funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ ihre Richtungsableitung in Richtung des Tangentialvektors zuordnet.

Definition 8 Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt $p \in M$ ist ein Vektorraum und wird mit $T_p M$ bezeichnet. $T_p M$ nennt man den Tangentialraum im Punkt p .

Bei gewählter Parametrisierung $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ schreiben wir von jetzt an $f(q) := (f \circ \mathbf{x})(q)$, wobei $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ist.

Die Kurve α kann man in dieser Parametrisierung folgendermassen ausdrücken:

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Man definiert:

$$\alpha'(0)f := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0}.$$

Weiter gilt nach der Kettenregel

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Nach Definition der Addition von Abbildungen kann man das schreiben als

$$\alpha'(0)f = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) f.$$

An der letzten Gleichung sieht man, dass man $\alpha'(0)$ in der Parametrisierung \mathbf{x} folgendermassen ausdrücken kann:

$$(1) \quad \alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Andererseits gilt nach der Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0)e_i$$

wobei (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis im \mathbb{R}^n ist. Also gilt

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Bemerkung 3 Wir stellen uns $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bildlich als Tangentialvektor der i -ten Koordinatenkurve in der Mannigfaltigkeit im Punkt p vor.

Bemerkung 4 Aus Gleichung (1) folgt, dass die Wahl einer Parametrisierung $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ eine assoziierte Basis $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right)$ in $T_p M$ bestimmt.

Satz 2 Es seien v ein Tangentialvektor sowie $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ und $p \in M$. Dann gilt:

$$(i) \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g) \quad (\text{Linearitat})$$

$$(ii) \quad v(fg)(p) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad (\text{Produktregel})$$

Beweis: Ich werde beweisen, dass $v(f + g) = v(f) + v(g)$ ist. Der restliche Beweis geht analog. Es sei $v := \alpha'(0)$. Dann gilt $v(f + g) = \alpha'(0)(f + g)$. Nach der Definition des Tangentialvektors gilt dann

$$\alpha'(0)(f + g) = \frac{d}{dt}[(f + g) \circ \alpha].$$

Es gilt natürlich

$$\frac{d}{dt}[(f + g) \circ \alpha] = \frac{d}{dt}[f \circ \alpha + g \circ \alpha].$$

Nach der Summenregel ist dann

$$\frac{d}{dt}[f \circ \alpha + g \circ \alpha] = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) + \frac{d}{dt}(g \circ \alpha).$$

Und schliesslich gilt wieder nach der Definition des Tangentialvektors

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) + \frac{d}{dt}(g \circ \alpha) = \alpha'(0)(f) + \alpha'(0)(g).$$

Dies entspricht $v(f) + v(g)$. \square

4.3 Differential

Wie bereits oben bemerkt, kann das totale Differential $D_p f$ einer total differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $p \in \mathbb{R}^m$ als lineare Abbildung $D_p f : T_p \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ interpretiert werden, die die Funktion f in einer Umgebung von p besser approximiert, als jede andere solche lineare Abbildung. Mittels der üblichen Identifikation der Tangentialvektoren als Geschwindigkeitsvektoren parametrisierter Kurven, bildet dieses totale Differential die Tangentialvektoren dann sehr anschaulich vermöge

$$D_{\alpha(t)} f(\dot{\alpha}(t)) = (f \circ \dot{\alpha})(t)$$

ab.

Mit dem Begriff des Tangentialraums können wir jetzt den Begriff des Differentials im \mathbb{R}^n auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Satz 3 *Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Weiter sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Für jedes $p \in M$ und für jedes $v \in T_p M$ wähle man eine differenzierbare Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v$. Ausserdem sei $\beta = \varphi \circ \alpha$. Die Abbildung $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$, gegeben durch $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$, ist eine lineare Abbildung, die nicht von der Wahl der Kurve α abhängt (siehe Abbildung 6).*

Beweis: Es seien $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ und $\mathbf{y} : V \rightarrow N$ Parametrisierungen im Punkt p und $\varphi(p)$. Wenn man φ in diesen Parametrisierungen ausdrückt, erhält man

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x})(q) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$q = (x_1, \dots, x_n) \in U, (y_1, \dots, y_m) \in V.$$

Wenn man weiter α in der Parametrisierung \mathbf{x} ausdrückt, erhält man

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Somit folgt dann

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)(t) = (y_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), \dots, x_n(t))).$$

Somit kann man $\beta'(0)$ mithilfe der Basis $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})\}$ von $T_{\varphi(p)}N$ folgendermassen darstellen:

$$(3) \quad \beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x'_i(0) \right).$$

Aus Gleichung (3) folgt direkt, dass $\beta'(0)$ nicht von der Wahl der Kurve α abhängt. Ausserdem gilt

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (x'_j(0)), \text{ wobei } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n \text{ ist.}$$

Dabei bezeichnet $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ eine $m \times n$ Matrix und $x'_j(0)$ bezeichnet eine Spaltenmatrix mit n Elementen. Somit folgt mittels linearer Algebra, dass $d\varphi_p$ eine lineare Abbildung von T_pM nach $T_{\varphi(p)}N$ ist, deren Matrix, dargestellt in der zu \mathbf{x} und \mathbf{y} assoziierten Basis, $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$ ist. \square

Definition 9 Die lineare Abbildung $d\varphi_p$, definiert wie in Satz 3, nennt man das Differential von φ im Punkt p .

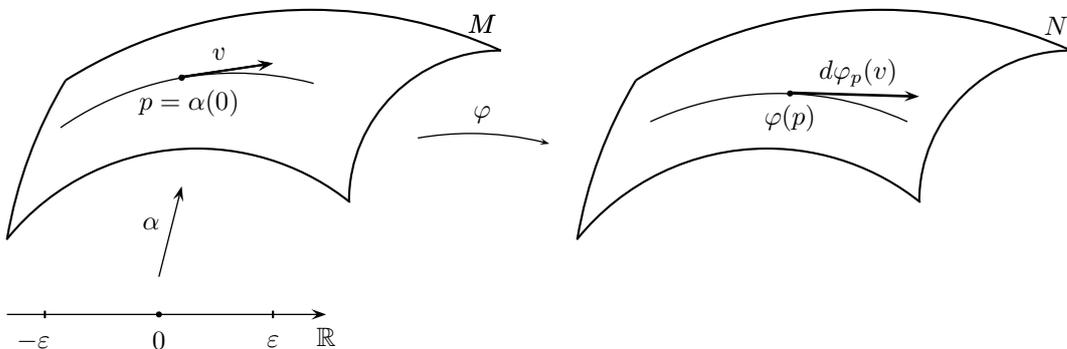


Abbildung 6 (Differential). Das Differential wird mithilfe einer Kurve definiert.

Definition 10 Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N ist ein Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und sowohl f selbst, als auch ihre Umkehrabbildung f^{-1} differenzierbar sind.

Satz 4 Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist lokal diffeomorph zum \mathbb{R}^n .

Beweis: Dies folgt direkt aus der Definition der differenzierbaren Mannigfaltigkeit und der Definition des Diffeomorphismus. \square

Satz 5 Es sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Wenn φ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ ein Isomorphismus für alle $p \in M$.

Beweis: Dieser Satz ist eine direkte Konsequenz aus der Kettenregel:

$$id = d(id)_p = d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_p = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1} \circ d\varphi_p.$$

Das bedeutet $(d\varphi_p)^{-1} = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}$, d.h. die Inverse der linearen Abbildung $d\varphi_p$ existiert. Also ist $d\varphi_p$ ein Isomorphismus. \square

Theorem 1 Es sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Ausserdem sei $p \in M$ so gewählt, dass $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Dann ist φ ein lokaler Diffeomorphismus im Punkt p .

Beweis: Das Theorem folgt als Anwendung des Theorems über Umkehrfunktionen im \mathbb{R}^n . \square

4.4 Immersion und Einbettung

In diesem Abschnitt werden die Begriffe der Immersion und der Einbettung eingeführt, um anschliessend die Untermannigfaltigkeit definieren zu können.

Definition 11 Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ ist eine Immersion, wenn ihr Differential $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

Definition 12 Es seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus, wenn f folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) f ist bijektiv
- (2) f ist stetig
- (3) die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls stetig.

Definition 13 Es sei X die Grundmenge eines topologischen Raumes mit der Topologie T (Schreibweise: (X, T)). Weiter sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die von X induzierte Topologie auf Y die Topologie $T_Y = \{U \cap Y \mid U \in T\}$.

Nach Bemerkung 1 ist jede Mannigfaltigkeit ein topologischer Raum.

Definition 14 Eine Immersion $\varphi : M \rightarrow N$ ist eine Einbettung, wenn φ ein Homöomorphismus auf $\varphi(M) \subset N$ ist und $\varphi(M)$ die induzierte Topologie von M hat.

Definition 15 Für zwei Mengen A und B mit $A \subseteq B$ ist die Inklusionsabbildung $i : A \subset B$ gegeben durch $i(x) = x$.

Definition 16 Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Wenn $M \subset N$ und die Inklusionsabbildung $i : M \subset N$ eine Einbettung ist, dann nennt man M eine Untermannigfaltigkeit von N .

4.5 Vektorfeld und Lie-Klammer

In diesem Abschnitt geht es um die Verallgemeinerung von Vektorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ausserdem wird die Lie-Klammer eingeführt, die zur Definition des Levi-Civita-Zusammenhangs in Kapitel 6 benötigt wird.

Definition 17 Das Tangentialbündel TM auf einer Mannigfaltigkeit M ist definiert durch

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Bemerkung 5 Das Tangentialbündel ist eine Mannigfaltigkeit (der Dimension $2n$, wobei n die Dimension von M ist). Für einen Beweis dafür siehe z.B [DC2], Seite 15.

Definition 18 Ein Vektorfeld X auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $X(p) \in T_p M$ zuordnet. Anders ausgedrückt ist X eine Abbildung von M auf das Tangentialbündel TM . Das Vektorfeld X ist differenzierbar, wenn die Abbildung $X : M \rightarrow TM$ differenzierbar ist.

Wenn eine Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ gegeben ist, kann man schreiben

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

wobei jedes $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf U ist und $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die zu \mathbf{x} assoziierte Basis ist. X ist genau dann differenzierbar, wenn die Funktionen a_i differenzierbar sind.

Ein Vektorfeld X liefert eine Abbildung

$$X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

definiert durch

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Die Menge aller differenzierbarer Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M wird im Folgenden mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Lemma 1 *Es seien X und Y differenzierbare Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld Z , sodass für alle $f \in \mathfrak{F}(M)$ gilt:*

$$Z(f) = (XY - YX)f.$$

Das Vektorfeld $[X, Y] := XY - YX = Z$ nennt man die Lie-Klammer.

Beweis: Zuerst beweisen wir die Eindeutigkeit. Wir nehmen an, es sei ein solches Z gegeben. Es seien $p \in M$ und $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung bei p . Weiter seien

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{bzw.} \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

die Darstellungen der Vektorfelder X und Y in der Parametrisierung \mathbf{x} . Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{F}(M)$

$$XY(f) = X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Mithilfe der Produktregel erhält man nun weiter

$$(1) \quad XY(f) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Analog gilt natürlich

$$(2) \quad YX(f) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Mit den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich jetzt, dass Z in der Parametrisierung \mathbf{x} gegeben ist durch

$$(3) \quad Z(f) = XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Diese Gleichung beweist die Eindeutigkeit von Z . Um die Existenz von Z zu beweisen, braucht man lediglich Z_α in jeder Koordinatenumgebung $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ einer differenzierbaren Struktur $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ auf M durch (3) zu definieren. Wegen der Eindeutigkeit folgt dann, dass $Z_\alpha = Z_\beta$ auf $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$. Dies erlaubt es uns, Z auf der ganzen Mannigfaltigkeit M zu definieren. \square

Satz 6 Wenn X, Y und Z differenzierbare Vektorfelder auf M sowie a, b reelle Zahlen und f, g differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:

i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antikommutativität),

ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (Linearität),

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi-Identität),

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Beweis: Die Eigenschaften i) und ii) sind offensichtlich. Wir beweisen iii) und iv). Aufgrund der Definition der Lie-Klammer gelten folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \\ [[Y, Z], X] &= YZX - ZYX - XYZ + XZY \\ [[Z, X], Y] &= ZXY - XZY - YZX + YXZ \end{aligned}$$

Addition dieser drei Gleichungen liefert dann

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Nun zu iv): Es gilt

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)X - gY(f)X. \end{aligned}$$

Die erste und die dritte Gleichheit gelten nach Definition der Lieklammer, die zweite wegen der Produktregel. \square

Weil eine differenzierbare Mannigfaltigkeit lokal diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist, kann man den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf auch auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten anwenden. Es gilt also folgender Satz.

Satz 7 Es sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Weiter sei $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von p , ein Intervall $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ und eine differenzierbare Abbildung $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$, sodass die Kurve $t \rightarrow \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in U$ die eindeutig bestimmte Kurve ist, welche die Bedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$ und $\varphi(0, q) = q$ erfüllt.

Definition 19 Die Abbildung φ heisst lokaler Fluss des Vektorfelds X . Oft schreibt man $\varphi_t(q) := \varphi(t, q)$.

Definition 20 Eine Kurve $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, welche die Bedingungen $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ und $\alpha(0) = q$ erfüllt, nennt man Trajektorie des Vektorfelds X , welche für $t = 0$ durch q geht.

5 Riemannsche Mannigfaltigkeit

Bislang haben wir das Konzept der Differenzierbarkeit von Funktionen zwischen Vektorräumen auf Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Um nun aber auch Winkel zwischen und Längen von Tangentialvektoren, wie beispielsweise den Geschwindigkeitsvektoren, zu definieren, benötigen wir eine zusätzliche Struktur, nämlich die Riemannsche Metrik, die die Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit mit einem Skalarprodukt ausstattet.

5.1 Riemannsche Metrik

Definition 21 Eine symmetrische Bilinearform b auf einem Vektorraum V ist positiv definit, wenn aus $v \in V$, $v \neq 0$ folgt, dass $b(v, v) > 0$ ist.

Definition 22 Ein Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

Definition 23 Eine Riemannsche Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im Tangentialraum $T_p M$ zuordnet, welche im folgenden Sinn differenzierbar variiert: Wenn $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ein Koordinatensystem bei p ist, mit $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ dann ist $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q$ eine differenzierbare Funktion auf U für alle i, j .

Definition 24 Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g) , wobei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf derselben ist.

Satz 8 Es sei $f : M^m \rightarrow N$ eine Immersion. Wenn N eine Riemannsche Metrik besitzt, so induziert f eine Riemannsche Metrik auf M , wenn man definiert:

$$\langle u, v \rangle'_p := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, u, v \in T_p M.$$

Diese Metrik auf M heisst dann die von f induzierte Metrik.

Beweis: Zu zeigen sind die Symmetrie und die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ sowie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ positiv definit ist. Die Bilinearität und die Symmetrie sind einfach zu erkennen: Sie folgen aus der Linearität von df_p und der Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzw. aus der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ positiv definit ist, bleibt zu beweisen. Für $v \neq 0$ gilt wegen der Injektivität von f , dass $df_p v \neq 0$. daraus folgt, dass $\langle df_p(u), df_p(v) \rangle > 0$, d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ ist positiv definit. \square

6 Levi-Civita-Zusammenhang

Wie in unserem einführenden Beispiel des klassischen schiefen Wurfs festgestellt, ist die prinzipielle Frage dahingehend, wie man die Veränderung eines Vektorfeldes entlang einer Kurve, wie beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer parametrisierten Kurve, misst, von essentieller Bedeutung. Im Vektorraum steht uns dafür die affine Parallelverschiebung zur Verfügung, mittels der man die an verschiedenen Punkten angehefteten Vektoren miteinander identifizieren kann.

Die Struktur, die es uns erlauben wird, eine Parallelverschiebung und damit auch den Begriff der Differenzierbarkeit von Vektorfeldern (und allgemeiner von Tensorfeldern) auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern (siehe Satz 10 und die Bemerkung im Anschluss daran) ist die des affinen Zusammenhangs. Führen wir diesen im Abschnitt 6.1 zunächst allgemein ein, so konsultieren wir in Abschnitt 6.2 denjenigen unter allen Zusammenhängen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, bezüglich dem sich der Riemannsche Metriktensor entlang der Mannigfaltigkeit nicht ändert, den sogenannten Levi-Civita Zusammenhang.

6.1 Affiner Zusammenhang

Definition 25 *Ein affiner Zusammenhang auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Abbildung:*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

welche geschrieben wird als $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$ und die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (Linearität im ersten Argument)
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ (Additivität im zweiten Argument)
- (iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (Produktregel)

wobei $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in \mathfrak{F}(M)$

Für den Beweis des nächsten Satzes brauchen wir folgende Aussage aus der Linearen Algebra.

Lemma 2 *Es seien ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt sowie eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von V gegeben. Dann kann man jeden Vektor $v \in V$ darstellen als*

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Beweis: Wir schreiben v als Linearkombination der Basisvektoren:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Nun berechnen wir auf beiden Seiten der Gleichung das Skalarprodukt mit e_j unter Berücksichtigung der Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle v, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j. \quad \square$$

Satz 9 *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zuordnung, welche einem Vektorfeld V entlang der Kurve $c : I \rightarrow M$ ein anderes Vektorfeld $\frac{DV}{dt}$ entlang der Kurve c zuordnet, sodass gilt:*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ wobei } V \text{ ein Vektorfeld längs } c \text{ und } f \text{ eine differenzierbare Funktion auf } I \text{ ist.}$$

$$(c) \quad \text{Wenn } V \text{ durch ein anderes Vektorfeld } Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ induziert ist, das heisst, wenn } V(t) = Y(c(t)) \text{ gilt, dann ist } \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

Man nennt $\frac{DV}{dt}$ kovariante Ableitung von V entlang c .

Beweis: (i) Zuerst zeigen wir die Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass es eine Zuordnung $\frac{DV}{dt}$ gibt, die die Eigenschaften (a), (b) und (c) erfüllt. Weiter seien $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine Parametrisierung mit $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ und $x_1(t), \dots, x_n(t)$ die lokale Darstellung von $c(t), t \in I$. Ausserdem sei $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nach Lemma 2 kann man das Vektorfeld V lokal schreiben als $V = \sum_{j=1}^n v_j X_j$, wobei $v_j = v_j(t)$ und $X_j = X_j(c(t))$. Deshalb gilt nach a), dass

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{D}{dt}(v_j X_j)$$

ist. Weiter gilt nach b):

$$\sum_{j=1}^n \frac{D}{dt}(v_j X_j) = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \frac{DX_j}{dt}.$$

Setzt man dies in die obere Gleichung ein, ergibt sich

$$(1) \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \frac{DX_j}{dt}.$$

Weil $X_j = X_j(c(t))$ ist, gilt wegen c), dass

$$(2) \quad \frac{DX_j}{dt} = \nabla_{dc/dt} X_j$$

ist. Mit

$$\frac{dc}{dt} = \sum \frac{dx_i}{dt} X_i$$

erhält man aus Gleichung (2):

$$(3) \quad \frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j$$

ist. Aus Eigenschaft (i) der Definition des affinen Zusammenhangs folgt, dass

$$\nabla_{\sum \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j$$

ist. Setzt man dies in Gleichung (3) und die resultierende Gleichung anschliessend in (1) ein, so erhält man

$$(4) \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist durch den vorgegebenen Zusammenhang ∇ und die Wahl der Parametrisierung \mathbf{x} eindeutig bestimmt. Also ist es auch die linke Seite $\frac{DV}{dt}$.

ii) Für den Existenzbeweis definieren wir $\frac{DV}{dt}$ auf $\mathbf{x}(U)$ wie in Gleichung (4). Es ist einfach nachzuprüfen, dass das so definierte Vektorfeld $\frac{DV}{dt}$ die Eigenschaften a), b) und c) hat.

Wenn $\mathbf{y}(W)$ eine andere Parametrisierung ist, mit $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ und wenn wir $\frac{DV}{dt}$ auf $\mathbf{y}(W)$ definieren wie in Gleichung (1), dann stimmen diese beiden Definitionen von $\frac{DV}{dt}$ auf $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$ wegen der Eindeutigkeit überein. Daraus folgt schliesslich, dass sich die Definition von $\frac{DV}{dt}$ auf ganz M fortsetzen lässt. \square

Definition 26 *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ . Ein Vektorfeld V längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$ heisst parallel, wenn $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ gilt.*

Theorem 2 *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem affinen Zusammenhang ∇ . Weiter sei $c : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve in M und V_0 ein Tangentialvektor im Punkt $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes paralleles Vektorfeld V auf c , sodass $V(t_0) = V_0$ gilt. $V(t)$ nennt man dann die Parallelverschiebung von $V(t_0)$ entlang c .*

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass das Theorem für den Fall, dass $c(I)$ in einer lokalen Koordinatenumgebung enthalten ist, bewiesen ist. Aufgrund der Kompaktheit aus der Analysis 2, kann das Segment $c([t_0, t_1]) \subset M$ für beliebiges t_1 von einer endlichen Anzahl an Koordinatenumgebungen bedeckt werden. Nach Voraussetzung kann V in jedem dieser Koordinatensysteme definiert werden. Wegen der Eindeutigkeit stimmen die Definitionen von V auf den Überschneidungsgebieten der Koordinatensysteme überein. Dies erlaubt die Definition von V auf ganz $[t_0, t_1]$.

Deshalb müssen wir nur den Fall beweisen, in dem $c(I)$ in einer Koordinatenumgebung $\mathbf{x}(U)$ eines Koordinatensystems $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ enthalten ist. Es sei $\mathbf{x}^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ die lokale Darstellung von $c(t)$. Weiter sei $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$, wobei $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$ ist.

Wir nehmen an, es gäbe ein Vektorfeld V in $\mathbf{x}(U)$, das längs c parallel ist, mit $V(t_0) = V_0$. Dann erfüllt $V = \sum v_j X_j$ die Gleichung

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v_j \nabla_{X_i} X_j.$$

Setzen wir $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ und ersetzen wir in der ersten Summe j mit k , so erhalten wir

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right\} X_k = 0.$$

Das System von n Differentialgleichungen

$$0 = \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k v_j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1, \dots, n,$$

besitzt genau eine Lösung, welche die Anfangsbedingung $v_k(t_0) = v_0^k$ erfüllt. Es folgt deshalb, dass V , im Fall der Existenz, eindeutig bestimmt ist. Weil das System linear ist, ist jede Lösung für alle $t \in I$ definiert. Dies beweist die Existenz und Eindeutigkeit von V mit den geforderten Eigenschaften. \square

Definition 27 *Es seien eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M sowie ein Zusammenhang ∇ und eine Riemannsche Metrik \langle, \rangle gegeben. Man nennt ∇ kompatibel mit der Metrik \langle, \rangle , wenn für jede glatte Kurve c und jedes Paar paralleler Vektorfelder P, P' , die längs c verlaufen*

$$\langle P, P' \rangle = \text{konstant} \text{ gilt.}$$

Satz 10 *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Zusammenhang ∇ auf M ist genau dann kompatibel mit einer Metrik, wenn für beliebige Vektorfelder V und W entlang der differenzierbaren Kurve $c : I \rightarrow M$*

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \text{ gilt.}$$

Beweis: Dass obige Gleichung impliziert, dass ∇ kompatibel mit \langle, \rangle ist, ist klar: Sind V, W je parallele Vektorfelder, d.h. $\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} \equiv 0$, so verschwindet die rechte Seite obiger Gleichung. Also ist auch die linke Seite null. Das bedeutet $\langle V, W \rangle = \text{konstant}$.

Wir wählen eine Orthonormalbasis $P_1(c(t_0)), \dots, P_n(c(t_0))$ von $T_{c(t_0)}(M)$, mit $t_0 \in I$. Wegen Theorem 2 kann man die Vektoren $P_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, durch Parallelverschiebung längs c erweitern. Weil ∇ kompatibel mit der Metrik ist, ist $P_1(t), \dots, P_n(t)$ eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}(M)$, für jedes $t \in I$. Deshalb kann man schreiben $V = \sum_{i=1}^n v_i P_i$ und $W = \sum_{i=1}^n w_i P_i$, mit $i = 1, \dots, n$, wobei v_i und w_i differenzierbare Funktionen auf I sind. Es folgt jetzt wegen Satz 9, (b), dass

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dv_i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dw_i}{dt} P_i.$$

Also gilt

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i \right\}.$$

Der rechte Teil der Gleichung lässt sich aufgrund der Produktregel schreiben als

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i w_i \right\}.$$

Weil

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i w_i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle$$

ist, folgt die Behauptung. \square

Satz 11 *Ein Zusammenhang ∇ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist genau dann kompatibel mit der Metrik, wenn gilt:*

$$(1) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Beweis: Es sei ∇ kompatibel mit der Metrik. Ausserdem sei $p \in M$ und $c : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$ und mit $\frac{dc}{dt}|_{t_0} = X(p)$. Dann gilt:

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{dc}{dt}|_{t_0} \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} (\langle Y, Z \rangle \circ c(t))|_{t=t_0}.$$

Die zweite Gleichung folgt aus der Definition des Tangentialvektors. Weiter gilt wegen Satz 10 sowie Satz 9, c)

$$\frac{d}{dt}(\langle Y, Z \rangle \circ c(t))|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle.$$

Setzt man die linke Seite obiger Gleichung in die linke Seite der unteren Gleichung ein, erhält man schliesslich:

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle.$$

Weil p beliebig war, folgt (1). Die Umkehrung ist offensichtlich. \square

Definition 28 *Ein affiner Zusammenhang ∇ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heisst symmetrisch, wenn*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

6.2 Levi-Civita-Zusammenhang

Theorem 3 (*Levi-Civita*). *Es sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M gegeben. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten affinen Zusammenhang ∇ auf M , der folgende Eigenschaften besitzt:*

- a) ∇ ist symmetrisch,
- b) ∇ ist kompatibel mit der Riemannschen Metrik.

Diesen durch das Theorem definierten affinen Zusammenhang nennt man den Levi-Civita-Zusammenhang auf M .

Beweis: Für den Beweis der Eindeutigkeit setzen wir die Existenz voraus. Nach Satz 11 gelten dann folgende drei Gleichungen:

$$(1) \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$(2) \quad Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$(3) \quad Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Wenn man jetzt die Gleichungen (1) und (2) addiert und Gleichung (3) subtrahiert, erhält man wegen der Symmetrie von ∇

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Umformen dieser Gleichung liefert

$$(4) \quad \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle \\ - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}.$$

Nun lässt sich nach Lemma 2 allgemein in einem n -dimensionalen Vektorraum V mit Basis E_1, \dots, E_n jeder Vektor $v \in V$ schreiben als:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, E_i \rangle E_i.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (4):

$$(5) \quad \nabla_Y X = \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla_Y X \rangle E_i \\ \stackrel{(4)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \{ X \langle Y, E_i \rangle + Y \langle E_i, X \rangle - E_i \langle X, Y \rangle - \langle [X, E_i], Y \rangle \\ - \langle [Y, E_i], X \rangle - \langle [X, Y], E_i \rangle \} E_i$$

Die rechte Seite hängt nur von der Metrik \langle, \rangle ab. Also auch die linke Seite $\nabla_Y X$.

Zu beweisen ist jetzt noch die Existenz von ∇ . Dazu definiert man ∇ durch obige Gleichung. Dann ist ∇ offensichtlich wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass der Zusammenhang die geforderten Bedingungen a) und b) im Satz erfüllt. \square

Definition 29 *Es sei ein Koordinatensystem (U, \mathbf{x}) gegeben und es bezeichne $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$. Die Funktionen Γ_{ij}^k , welche durch $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ definiert sind, nennt man Christoffelsymbole oder Koeffizienten des Zusammenhangs ∇ auf U .*

Satz 12 *Es sei ein Koordinatensystem (U, \mathbf{x}) gegeben. Dann gilt*

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \},$$

wobei $g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ ist.

Beweis: Der Satz folgt im Wesentlichen aus Gleichung (5) im Beweis von Theorem 3, indem man dort $\partial_i = X$, $\partial_j = Y$ und $\partial x_k = Z$ einsetzt:

$$\begin{aligned}
\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} \\
&= \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle \partial_k, \partial_l \rangle \\
&= \langle \partial_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l \partial_l \rangle \\
&= \langle \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle \\
&= \langle \partial_k, \nabla_{\partial_j} \partial_i \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\
&\quad - \langle [\partial_i, \partial_k], \partial_j \rangle - \langle [\partial_j, \partial_k], \partial_i \rangle - \langle [\partial_i, \partial_j], \partial_k \rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt wegen der Symmetrie des metrischen Tensors, die zweite nach Definition von g_{ij} im Satz. Die dritte Gleichung gilt wegen der Bilinearität des Skalarprodukts. Die vierte Gleichung gilt nach Definition der Christoffelsymbole, die fünfte wegen der Symmetrie des Levi-Civita-Zusammenhangs. Die zweit-letzte Gleichung gilt wegen der erwähnten Gleichung (5) im Beweis des obigen Satzes. Die letzte Gleichung folgt aus $[\partial_i, \partial_j] = 0$. \square

Korollar 1 *Es sei ein Koordinatensystem (U, \mathbf{x}) gegeben. Dann gilt*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km},$$

wobei (g^{km}) die Inverse der Matrix (g_{km}) ist.

Beweis: Die Matrix (g_{kl}) ist invertierbar, weil der metrische Tensor eine positiv definite Bilinearform ist. Wir bezeichnen mit g^{km} den Eintrag in der k -ten Zeile und m -ten Spalte der inversen Matrix. Nun multiplizieren wir die Gleichung

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \}$$

aus obigem Satz auf beiden Seiten mit g^{km} und erhalten

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km}$$

Jetzt summieren wir auf beiden Seiten über alle k :

$$\sum_k \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = \sum_k \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht bereits der gewünschte Term. Wir formen noch den linken um, bis dort auch das Gewünschte steht:

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} &= \sum_l \sum_k \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} \\ &= \sum_l \Gamma_{ij}^l \sum_k g_{lk} g^{km} \\ &= \sum_l \Gamma_{ij}^l \sum_k \delta_{lm} \\ &= \Gamma_{ij}^m. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt wegen des Kommutativgesetzes der Addition in \mathbb{R} . Die zweite Gleichung gilt, weil die Christoffelsymbole nicht vom Summationsindex k abhängen und wir sie deshalb aus der inneren Summe herausziehen können. Die dritte Gleichung gilt, weil die Matrizen (g_{lk}) und (g^{km}) zueinander invers sind, ihr Produkt also die Einheitsmatrix (δ_{lm}) ist. Die letzte Gleichung folgt nach Definition des Kronecker-Symbols δ_{lm} . \square

Korollar 2 *Es sei ein Koordinatensystem (U, \mathbf{x}) gegeben. Dann gilt*

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} \partial_k.$$

Beweis: Dies folgt, wenn man in Gleichung (4) des Beweises von Satz 9 den Ausdruck $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ ersetzt durch die rechte Seite der definierenden Gleichung $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ der Christoffelsymbole. \square

7 Geodäten und Exponentialabbildung

7.1 Geodäten

Bewegen sich die kräftefreien Objekte in der klassischen Mechanik mit konstanter Geschwindigkeit im Euklidischen Anschauungsraum entlang nach Vielfachem ihrer Bogenlänge parametrisierten Geraden, so werden sich die nur der Gravitation ausgesetzten Massen in der Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie analog auf ausgezeichneten Kurven bewegen, die durch die Gravitation und die daraus resultierende Raumzeitkrümmung charakterisiert sind. Mit der Möglichkeit, über den Levi-Civita Zusammenhang die Veränderung des Tangentenfeldes

einer parametrisierten Kurve entlang der Kurve zu messen, steht uns nun auch eine Möglichkeit zur Verfügung, diese ausgezeichneten Kurven, die sogenannten Geodäten, darüber zu definieren, dass ihr Geschwindigkeitsfeld entlang der Kurve (wie bei den nach Vielfachem der Bogenlänge parametrisierten Geraden des Euklidischen Raums) konstant sein soll.

Definition 30 Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ ist eine Geodäte, wenn sie die folgende Differentialgleichung, die Geodätengleichung, erfüllt, wobei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang ist:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

Satz 13 Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ ist genau dann eine Geodäte, wenn sie folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0.$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 9, (c). \square

Koordinatendarstellung der Geodätengleichung $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$

Wir wollen jetzt die Geodätengleichung in Koordinaten darstellen. Eine parametrisierte Kurve γ ist nach obigem Satz eine Geodäte, wenn sie die Gleichung

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0.$$

erfüllt. $\frac{d\gamma}{dt}$ ist ein Vektorfeld längs der Kurve γ . Setzt man in Korollar 2 dieses Vektorfeld ein für V , erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left\{ \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right\} \partial_k.$$

Da die Tangentialvektoren $\partial_i|_p$ für jedes $p \in M$ eine Basis im Tangentialraum $T_p M$ bilden, müssen bereits die einzelnen Summanden (der äusseren Summe) verschwinden. Also:

Geodätengleichungen 2. Ordnung in Koordinaten:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Das ist ein System von k Differentialgleichungen **2. Ordnung** in den Koordinatenfunktionen $x_i(t)$. Wir wollen daraus ein System von k Differentialgleichungen **1. Ordnung** in den Koordinatenfunktionen $y_i := \frac{dx_i}{dt}$ der Geschwindigkeit machen. Dazu betrachten wir das Tangentialbündel TM der Mannigfaltigkeit. Es ist wie folgt definiert: TM ist zunächst eine Menge, nämlich

$$TM := \{(q, v) | q \in M, v \in T_p M\}.$$

Wir können diese Menge zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, indem wir darauf eine differenzierbare Struktur definieren: Jedes Koordiantensystem (U, x) von M liefert nämlich mit der Abbildung

$$\varphi : TU := U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n), \sum_i y_i \partial_i \right)$$

eine Parametrisierung und damit lokale Koordinaten von TM . Für den Nachweis, dass diese Parametrisierungen eine differenzierbare Struktur bilden auf TM , siehe z.B. [DC2]. S. 15. Hat die Mannigfaltigkeit M die Dimension n , hat die Mannigfaltigkeit TM offensichtlich die Dimension $2n$.

Wir betrachten jetzt eine differenzierbare Kurve $t \mapsto \gamma(t)$ in M . Sie definiert eine differenzierbare Kurve $t \mapsto (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$ in TM . Wegen

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum_i \frac{dx_i}{dt}(t) \partial_i$$

lässt sich diese Kurve lokal darstellen als

$$t \mapsto \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right).$$

Setzt man $y_i := \frac{dx_i}{dt}$, folgt aus obigem System der n Geodätengleichungen 2. Ordnung direkt das folgende, dazu äquivalente System von n Gleichungen 1. Ordnung:

Geodätengleichungen 1. Ordnung in Koordinaten:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \end{array} \right| \quad k = 1, \dots, n$$

Mit diesen Geodätengleichungen 1. Ordnung können wir das folgenden Lemma beweisen.

Lemma 3 *Es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld G auf TM , dessen Trajektorien die Form $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$ haben, wobei γ eine Geodäte auf M ist.*

Beweis: Nach den obigen Überlegungen ist die Geodätengleichung

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$$

äquivalent zum Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \quad k = 1, \dots, n \end{array} \right|$$

Dieses besitzt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz über die Lösungen von Differentialgleichungen von Picard-Lindelöf genau eine Lösung. \square

Definition 31 *Das durch Lemma 3 definierte Vektorfeld G nennt man das geodätische Feld auf TM . Der Fluss von G nennt man den geodätischen Fluss auf TM .*

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir folgendes Theorem:

Theorem 4 *Wenn X ein C^∞ Vektorfeld auf der offenen Menge V in der Mannigfaltigkeit M und $p \in V$ ist, dann gibt es eine offene Menge $V_0 \subset V$ mit $p \in V_0$, eine Zahl $\delta > 0$ und eine C^∞ -Abbildung $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$, sodass die Kurve $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$ für jedes $q \in V_0$ die eindeutig bestimmte Trajektorie von X ist, die zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Punkt q geht.*

Beweis: Da eine differenzierbare Mannigfaltigkeit lokal diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist, folgt das Theorem direkt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz vom Picard-Lindelöf für Differentialgleichungen. \square

Wendet man Theorem 4 auf das geodätische Feld G im Punkt $(p, 0) \in TM$ an, ergibt sich folgender Satz.

Satz 14 *Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Menge $\mathbf{U} \subset TU$, wobei (U, \mathbf{x}) ein Koordinatensystem bei p und $(p, 0) \in U$ ist, eine Zahl $\delta > 0$ und eine C^∞ -Abbildung $\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathbf{U} \rightarrow TU$, sodass $t \mapsto \varphi(t, q, v)$ die eindeutig bestimmte Trajektorie von G ist, die die Anfangsbedingung $\varphi(0, q, v) = (q, v)$, für jedes $(q, v) \in U$, erfüllt. \square*

Nach Definition der Produkttopologie kann man \mathbf{U} in folgender Form wählen:

$$\mathbf{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ und } v \in T_q M \text{ mit } |v| < \varepsilon_1\},$$

wobei $V \subset U$ eine Umgebung von $p \in M$ ist.

Setzt man $\gamma := \pi \circ \varphi$, wobei $\pi : TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion ist, so kann man Satz 14 folgendermassen ausdrücken.

Satz 15 *Es sei ein Punkt $p \in M$ gegeben. Dann gibt es eine offene Menge $V \subset M$, in der p enthalten ist, sowie zwei Zahlen $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ und eine C^∞ -Abbildung*

$$\gamma : [-\delta, \delta] \times U \rightarrow M, \quad U = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

sodass die Kurve $t \rightarrow \gamma(t, q, v), t \in [-\delta, \delta]$ die eindeutig bestimmte Geodäte von M ist, die für jedes $q \in V$ und jedes $v \in T_q M$ mit $|v| < \varepsilon_1$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v durch den Punkt p geht.

Lemma 4 *(Homogenität von Geodäten) Wenn die Geodäte $\gamma(t, q, v)$ auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ definiert ist, dann ist die Geodäte $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, auf dem Intervall $[-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}]$ definiert und es gilt*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Beweis: Es sei $h : [-\delta, \delta] \rightarrow M$ eine Kurve, gegeben durch $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Dann gilt nach Satz 15, dass $h(0) = q$. Aus der Kettenregel folgt, dass

$$(1) \quad h'(t) = [\gamma(at, q, v)]' = \gamma'(at, q, v) \cdot a$$

ist. Deshalb ist

$$h'(0) = \gamma'(0, q, v) \cdot a = a \cdot v.$$

Weil $\frac{dh}{dt} = h'$ ist und wegen Satz 9 c) gilt

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h'(t)} h'(t).$$

Setzt man jetzt Gleichung (1) auf der rechten Seite ein, ergibt sich aus der Definition des affinen Zusammenhangs:

$$\nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at, q, v)} \gamma'(at, q, v) = 0.$$

Deshalb folgt jetzt aus der Geodätengleichung, dass $h(t)$ eine Geodäte durch q mit der Geschwindigkeit av am Anfangsort $t = 0$ ist. Wegen des Satzes von Picard-Lindelöf folgt, dass

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av). \quad \square$$

Satz 16 *Es sei ein Punkt $p \in M$ gegeben. Dann gibt es eine Umgebung V von p in M , eine Zahl $\varepsilon > 0$ sowie eine C^∞ Abbildung $\gamma : (-2, 2) \times \mathbf{U} \rightarrow M$, wobei $\mathbf{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$, sodass $t \rightarrow \gamma(t, q, w), t \in (-2, 2)$, die eindeutig bestimmte Geodäte auf M ist, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit w durch den Punkt q geht, für jedes $q \in M$ und für jedes $w \in T_q M$, mit $|w| < \varepsilon$.*

Beweis: Die Geodäte $\gamma(t, q, v)$ in Satz 15 ist definiert für $|t| < \delta$ und für $|v| < \varepsilon_1$. Wendet man Lemma 4 an, so ergibt sich, dass $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ definiert ist für $t \in [-\frac{\delta}{\delta/2}, \frac{\delta}{\delta/2}]$. Weil $\frac{\delta}{\delta/2} = \frac{\delta}{1} \cdot \frac{2}{\delta} = 2$ ist, ist $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ definiert für $|t| < 2$. Setzt man jetzt $\varepsilon < \frac{\delta \varepsilon_1}{2}$, folgt, dass $\gamma(t, q, w)$ definiert ist für $|t| < 2$ und $|w| < \varepsilon$. \square

7.2 Exponentialabbildung

Es wird jetzt die Exponentialabbildung eingeführt. Mit dieser ist es möglich, eine Umgebung eines Punktes auf einer Mannigfaltigkeit mit einer Umgebung der Null im Tangentialraum an diesen Punkt zu identifizieren.

Definition 32 *Es seien ein Punkt $p \in M$ und eine offene Menge $U \subset TM$ gegeben wie in Satz 16. Dann heisst die Abbildung*

$$\exp(q, v) := \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$$

Exponentialabbildung auf U .

In den meisten folgenden Anwendungen benutzen wir die Beschränkung der Exponentialabbildung auf eine offene Teilmenge von T_qM , die q enthält. Das heisst, wir definieren die Abbildung

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$$

durch

$$\exp_q(v) := \exp(q, v)$$

wobei $B_\varepsilon(0)$ der offene Ball mit Radius $\varepsilon > 0$ mit Zentrum im Ursprung von T_qM ist.

Satz 17 *Zu gegebenem $q \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(0)$ auf eine offene Teilmenge von M ist (siehe Abbildung 7).*

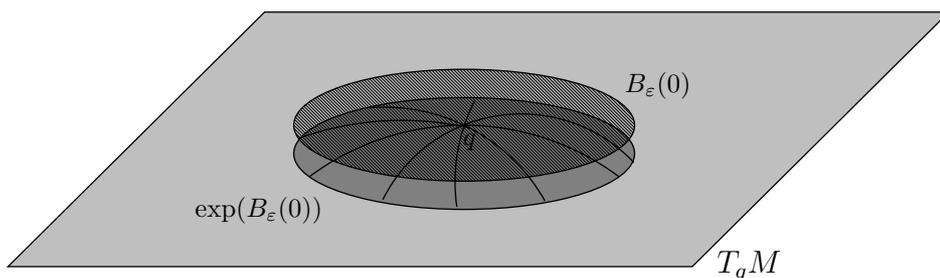


Abbildung 7 (Exponentialabbildung) *Die Exponentialabbildung: Ein Diffeomorphismus $B_\varepsilon(0) \rightarrow \exp(B_\varepsilon(0))$, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Jedem Tangentialvektor $v \in T_qM$ wird der Punkt $\gamma(1, q, v)$ der eindeutig bestimmten Geodäte γ mit der Geschwindigkeit v zugeordnet.*

Beweis: Zuerst berechnen wir $d(\exp_q)_o$. Es gilt nach der Kettenregel

$$(1) \quad d(\exp_q)_o(v) = \left. \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \right|_{t=0} .$$

Nach der Definition der Exponentialabbildung ist

$$(2) \quad \exp_q(tv) = \exp(q, tv) = \gamma(1, q, tv).$$

Weiter ist nach Lemma 4

$$\gamma(1, q, tv) = \gamma(t, q, v).$$

Setzt man dies in Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$\exp_q(tv) = \gamma(t, q, v).$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (1) ergibt sich:

$$d(\exp_q)_o(v) = \left. \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \right|_{t=0}.$$

Wegen Satz 16 ist

$$\left. \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \right|_{t=0} = v.$$

Folglich ist $d(\exp_q)_o(v) = v$. Deshalb ist $d(\exp_q)_o$ die Identitätsabbildung von T_qM . Daher folgt aus dem Theorem über Umkehrfunktionen, dass \exp_q ein lokaler Diffeomorphismus auf eine Umgebung von 0 ist. \square

8 Krümmung

8.1 Riemannscher Krümmungstensor

Der Riemannsche Krümmungstensor, der im semi-Riemannschen Fall der Raumzeiten der Allgemeinen Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle bei der Interpretation der Gravitation als Raumzeitkrümmung spielt, kann in gewisser Weise dahingehend interpretiert werden, dass er ein Mass dafür ist, in wie weit die durch den Levi-Civita-Zusammenhang beschriebene Parallelverschiebung vom Weg, entlang dem verschoben wird, abhängt.

Gehen wir auf diesen Aspekt nur am Rande ein, zielt dieser Abschnitt darauf ab, die Schnittkrümmung einzuführen, die dieselbe Information wie der Riemannsche Krümmungstensor trägt. Schliesslich ist es das erklärte Ziel dieser Arbeit, die Schnittkrümmung als Verallgemeinerung der Gausschen Flächenkrümmung zu identifizieren.

Definition 33 *Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ . Die Funktion $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, definiert durch:*

$$R_{XY}Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

heisst Riemannscher Krümmungstensor von M .

Korollar 3 Wenn $M = \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $R_{XY}Z = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir betrachten das Vektorfeld $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Weil der Levi-Civita-Zusammenhang eine Verallgemeinerung der Richtungsableitung darstellt und man die Anwendung eines Vektorfelds auf eine Funktion $f \in \mathfrak{F}(M)$ als Richtungsableitung auffassen kann, darf man in diesem Fall schreiben

$$(1) \quad \nabla_Y \nabla_X Z = (Y(X(z_1)), \dots, Y(X(z_n))).$$

Und analog gilt:

$$(2) \quad \nabla_X \nabla_Y Z = (X(Y(z_1)), \dots, X(Y(z_n))) \text{ und}$$

$$(3) \quad \nabla_{[X,Y]} Z = ([X, Y]z_1, \dots, [X, Y]z_n).$$

Also kann man wegen (1) und (2) schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z &= (Y(X(z_1)), \dots, Y(X(z_n))) - (X(Y(z_1)), \dots, X(Y(z_n))) \\ &= ([Y, X]z_1, \dots, [Y, X]z_n). \end{aligned}$$

Mit (3) und den Eigenschaften des affinen Zusammenhangs folgt jetzt, dass

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_{[Y,X]} Z = -\nabla_{[X,Y]} Z$$

ist. Setzt man dieses Ergebnis in die Definition des Riemannschen Krümmungstensors ein, so erhält man

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0. \quad \square$$

Satz 18 Der Riemannsche Krümmungstensor R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M hat folgende Eigenschaften:

(i) R ist $\mathfrak{F}(M)$ -bilinear in $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, das heisst:

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$$f, g \in \mathfrak{F}(M), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$$

(ii) Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist der Krümmungsoperator $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ $\mathfrak{F}(M)$ -linear, das heisst:

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$$f \in \mathfrak{F}(M), \quad Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Teil i) ist einfach zu beweisen. Deshalb beweise ich nur ii). Nach der Definition des Riemannsches Krümmungstensors gilt:

$$R_{XY}(Z + W) = \nabla_Y \nabla_X(Z + W) - \nabla_X \nabla_Y(Z + W) + \nabla_{[X, Y]}(Z + W).$$

Weil der Levi-Civita-Zusammenhang auch ein affiner Zusammenhang ist, gilt nach der Definition des affinen Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} & \nabla_Y \nabla_X(Z + W) - \nabla_X \nabla_Y(Z + W) + \nabla_{[X, Y]}(Z + W) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[X, Y]} W. \end{aligned}$$

Dies entspricht genau $R_{XY}Z + R_{XY}W$.

Für den zweiten Teil von (ii) wird wieder auf die Definition des affinen Zusammenhangs zurückgegriffen:

$$\begin{aligned} (1) \quad \nabla_Y \nabla_X(fZ) &= \nabla_Y(f \nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &= f \nabla_Y \nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + (Xf)(\nabla_Y Z) + (Y(Xf))Z. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) sowie der Definition des affinen Zusammenhangs folgt:

$$(2) \quad \nabla_Y \nabla_X(fZ) - \nabla_X \nabla_Y(fZ) = f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z.$$

Denn die zwei mittleren Terme der rechten Seite der Gleichung (1) kürzen sich weg. Setzt man jetzt Gleichung (2) in die Definition des Riemannsches Krümmungstensors ein, so erhält man:

$$(3) \quad R_{XY}(fZ) = f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z + \nabla_{[XY]}(fZ).$$

Aus der Definition des affinen Zusammenhangs folgt jetzt

$$R_{XY}(fZ) = f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + ((YX - XY)f)Z + f \nabla_{[XY]} Z + ([X, Y]f)Z.$$

Weil $(YX - XY) = [Y, X]$ ist, folgt

$$(4) \quad R_{XY}(fZ) = f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + ([Y, X]f)Z + f \nabla_{[XY]} Z + ([X, Y]f)Z.$$

Da $[X, Y] = -[Y, X]$ ist, lässt sich Gleichung (4) folgendermassen schreiben:

$$R_{XY}(fZ) = f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + f \nabla_{[XY]} Z.$$

Weil dies genau der Definition von $fR_{XY}Z$ entspricht, folgt, dass

$$R_{XY}(fZ) = fR_{XY}Z$$

ist. \square

Satz 19 *Es seien $X, Y, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt:*

- (i) $R_{XY} = -R_{YX}$,
- (ii) $\langle R_{XY}V, W \rangle = -\langle R_{XY}W, V \rangle$,
- (iii) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$.

Beweis: Zuerst zu (i): Nach der Definition des Riemannschen Krümmungstensors ist

$$(1) \quad R_{XY} = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}$$

und

$$(2) \quad R_{YX} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[Y,X]}.$$

Offensichtlich gilt

$$(3) \quad -R_{YX} = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]}.$$

Aufgrund der Definition des affinen Zusammenhangs ist $-\nabla_{[Y,X]} = \nabla_{-[Y,X]}$ und wegen den Eigenschaften der Lie-Klammer $\nabla_{-[Y,X]} = \nabla_{[X,Y]}$. Also gilt

$$-\nabla_{[Y,X]} = \nabla_{[X,Y]}.$$

Einsetzen in (3) liefert:

$$-R_{YX} = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist die Definition von R_{XY} . Folglich ist

$$R_{XY} = -R_{YX}.$$

Nun zum Beweis von ii): Zuerst wird bewiesen, dass Eigenschaft ii) äquivalent ist zu $\langle R_{XY}W, W \rangle = 0$. Anschliessend wird bewiesen, dass diese Gleichung korrekt ist. Zum Äquivalenzbeweis:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R_{XY}(W - V), W - V \rangle \\ &= \langle R_{XY}(W - V), W \rangle + \langle R_{XY}(W - V), -V \rangle \\ &= \langle R_{XY}(W - V), W \rangle - \langle R_{XY}(W - V), V \rangle \\ &= \langle R_{XY}W - R_{XY}V, W \rangle - \langle R_{XY}W - R_{XY}V, V \rangle \\ &= \langle R_{XY}W, W \rangle - \langle R_{XY}W, V \rangle - \langle R_{XY}V, W \rangle + \langle R_{XY}V, V \rangle \\ &= -\langle R_{XY}W, V \rangle - \langle R_{XY}V, W \rangle \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt nach Voraussetzung, die zweite und dritte wegen den Axiomen des Skalarprodukts, die vierte wegen den Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors und die fünfte wieder wegen den Axiomen des Skalarprodukts. Schliesslich gilt die letzte Gleichung nach Voraussetzung.

Durch Umformen der letzten Gleichung erhält man jetzt

$$-\langle R_{XY}W, V \rangle = \langle R_{XY}V, W \rangle,$$

was der Eigenschaft ii) entspricht.

Es bleibt zu beweisen, dass die erste der oberen Gleichungen korrekt ist. Durch Einsetzen der Definition des Riemannschen Krümmungstensors erhält man

$$(4) \quad \langle R_{XY}W, W \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Y W + \nabla_{[X,Y]} W, W \rangle.$$

Wegen Satz 11 ist

$$(5) \quad \langle \nabla_Y \nabla_X W, W \rangle = Y \langle \nabla_X W, W \rangle - \langle \nabla_X W, \nabla_Y W \rangle.$$

Analog gelten die Gleichungen

$$(6) \quad \langle \nabla_X \nabla_Y W, W \rangle = X \langle \nabla_Y W, W \rangle - \langle \nabla_Y W, \nabla_X W \rangle$$

und

$$(7) \quad \langle \nabla_{[X,Y]} W, W \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle.$$

Setzt man die Gleichungen (5), (6) und (7) in Gleichung (4) ein, so ergibt sich wegen der Eigenschaften des Skalarprodukts, dass

$$(8) \quad \langle R_{XY}W, W \rangle = Y \langle \nabla_X W, W \rangle - X \langle \nabla_Y W, W \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle.$$

Für den Teil auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gilt

$$\begin{aligned} & Y \langle \nabla_X W, W \rangle - X \langle \nabla_Y W, W \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y (X \langle W, W \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle W, W \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle W, W \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jetzt zum Beweis von (iii): Mit der Definition des Riemannschen Krümmungstensors kann man schreiben:

$$\begin{aligned} & R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = \\ & \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z + \\ & \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X + \\ & \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Levi-Civita-Zusammenhangs folgt

$$\begin{aligned}
& \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
& + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X \\
& + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y \\
& = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X,Z]} Y - \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X \\
& = [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]].
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist aufgrund der Jacobi-Identität für Vektorfelder null. \square

Bemerkung 6 *Der Wert von $R_{XY}Z$ im Punkt p hängt lediglich von den Werten von X , Y und Z im Punkt p ab.*

Für einen Beweis dieser Bemerkung siehe zum Beispiel [DC2], Seite 92.

8.2 Schnittkrümmung

Wir definieren in diesem Abschnitt die Schnittkrümmung. Die Schnittkrümmung ordnet jeder Ebene im Tangentialraum an einen Punkt einer Mannigfaltigkeit eine Zahl als Krümmung zu.

Wir führen zuerst folgenden Begriff ein:

Definition 34 *Ein Prähilbertraum V ist ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt.*

Ausserdem führen wir eine abkürzende Schreibweise ein: Es sei V ein Prähilbertraum. Man schreibt:

$$|x \wedge y| := \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad x, y \in V.$$

Anschaulich ist dieser Ausdruck gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren x und y aufgespannt wird. Dies sieht man folgendermassen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2} &= \sqrt{|x|^2 |y|^2 - |x|^2 |y|^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{|x|^2 |y|^2 (1 - \cos^2 \alpha)} \\
&= \sqrt{|x|^2 |y|^2 \sin^2 \alpha} = |x| |y| \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet α den von x und y eingeschlossenen Winkel. Der letzte Term stellt bekanntlich im \mathbb{R}^3 den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms dar.

Satz 20 *Es seien $\sigma \subset T_p M$ ein 2-dimensionaler Unterraum des Tangentialraums $T_p M$ und $x, y \in \sigma$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann hängt*

$$(*_1) \quad K(x, y) := \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

nicht von der Wahl der Vektoren x, y ab.

Beweis: Man kann nachrechnen, dass man mit den folgenden Transformationen von jeder Basis $\{x, y\}$ in $T_p M$ zu jeder anderen Basis $\{x', y'\}$ wechseln kann, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\{x, y\} \rightarrow \{y, x\}$
2. $\{x, y\} \rightarrow \{\lambda x, y\}$
3. $\{x, y\} \rightarrow \{x + \lambda y, y\}$

Es bleibt also zu zeigen, dass $K(x, y)$ invariant unter solchen Transformationen ist.

(a) $K(x, y) = K(y, x)$

Dass $|x \wedge y| = |y \wedge x|$ ist, ist offensichtlich. Damit klar wird, dass $\langle R_{xy}x, y \rangle = \langle R_{yx}y, x \rangle$ ist, werden die Eigenschaften (i) und (ii) von Satz 19 benötigt. Durch das Einsetzen von (i) in (ii) erhält man direkt $\langle R_{xy}x, y \rangle = \langle R_{yx}y, x \rangle$.

(b) $K(x, y) = K(\lambda x, y)$

Den Ausdruck $|\lambda x \wedge y| = \sqrt{|\lambda x|^2 |y|^2 - \langle \lambda x, y \rangle^2}$ kann man wegen den Axiomen für das Skalarprodukt und für die Norm sowie aufgrund der Eigenschaften derselben umschreiben zu $|\lambda x \wedge y| = \sqrt{\lambda^2 |x|^2 |y|^2 - \lambda^2 \langle x, y \rangle^2}$. Durch Ausklammern ergibt sich $|\lambda x \wedge y| = \sqrt{\lambda^2 (|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}$. Wenn man nun λ aus der Wurzel zieht, erhält man

$$(*_2) \quad |\lambda x \wedge y| = \lambda \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2} = \lambda |x \wedge y|.$$

Aus Satz 18 Eigenschaft (i) folgt, dass $R_{(\lambda x)y}x = \lambda R_{xy}x$. Also gilt $\langle R_{(\lambda x)y}x, z \rangle = \langle \lambda R_{xy}x, z \rangle$. Deshalb folgt jetzt mit den Axiomen des Skalarprodukts, dass

$$(*_3) \quad \langle R_{(\lambda x)y}x, z \rangle = \lambda \langle R_{xy}x, z \rangle.$$

Kombiniert man die beiden Gleichungen $(*_2)$ und $(*_3)$ mit Gleichung $(*_1)$, so erhält man

$$K(\lambda x, y) = \frac{\lambda \langle R_{xy}x, y \rangle}{\lambda |x \wedge y|^2}.$$

Weil λ sowohl im Nenner als auch im Zähler vorkommt, kann man kürzen und erhält:

$$K(\lambda x, y) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Weil dies aber genau $K(x, y)$ entspricht, folgt:

$$K(x, y) = K(\lambda x, y).$$

$$(c) K(x, y) = K(x + \lambda y, y)$$

Zuerst beweise ich, dass $\langle R_{(x+\lambda y)y}(x + \lambda y), y \rangle = \langle R_{xy}x, y \rangle$ ist. Aufgrund der Linearitätseigenschaft des Riemannschen Krümmungstensors ist

$$(*_4) \quad \langle R_{(x+\lambda y)y}(x + \lambda y), y \rangle = \langle (R_{xy} + \lambda R_{yy})(x + \lambda y), y \rangle.$$

Weil nach Satz 19, i) $R_{yy} = 0$ gilt, ist auch $\lambda R_{yy} = 0$. Setzt man dies in Gleichung $(*_4)$ ein, so erhält man

$$(*_5) \quad \langle R_{(x+\lambda y)y}(x + \lambda y), y \rangle = \langle R_{xy}(x + \lambda y), y \rangle.$$

Wieder wegen der Linearitätseigenschaft des Riemannschen Krümmungstensors gilt

$$\langle R_{xy}(x + \lambda y), y \rangle = \langle (R_{xy}x + R_{xy})(\lambda y), y \rangle.$$

Aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts kann man dies umschreiben zu

$$(*_6) \quad \langle R_{xy}(x + \lambda y), y \rangle = \langle R_{xy}x, y \rangle + \langle R_{xy}(\lambda y), y \rangle.$$

Nach Satz 19, i) ist $\langle R_{xy}(\lambda y), y \rangle = 0$. Durch Einsetzen in Gleichung $(*_6)$ ergibt sich

$$\langle R_{xy}(x + \lambda y), y \rangle = \langle R_{xy}x, y \rangle.$$

Setzt man dies jetzt in Gleichung $(*_5)$ ein, sieht man, dass

$$\langle R_{(x+\lambda y)y}(x + \lambda y), y \rangle = \langle R_{xy}x, y \rangle \text{ ist.}$$

Es bleibt zu beweisen, dass $|(x + \lambda y) \wedge y| = |x \wedge y|$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} |(x + \lambda y) \wedge y|^2 &= |x + \lambda y|^2 |y|^2 - \langle x + \lambda y, y \rangle^2 \\ &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle |y|^2 - [\langle x, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle]^2 \\ &= [\langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle] |y|^2 - [\langle x, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle]^2 \\ &= [|x|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 |y|^2] |y|^2 - [\langle x, y \rangle^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle |y|^2 + \lambda^2 |y|^4] \\ &= |x|^2 |y|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle |y|^2 + \lambda^2 |y|^4 - \langle x, y \rangle^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle |y|^2 - \lambda |y|^4 \\ &= |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\ &= |x \wedge y|^2. \end{aligned}$$

Weil also $|(x + \lambda y) \wedge y|^2 = |x \wedge y|^2$ ist, ist auch $|(x + \lambda y) \wedge y| = |x \wedge y|$. \square

Definition 35 Es seien ein Punkt $p \in M$ und ein 2-dimensionaler Unterraum $\sigma \subset T_p M$ gegeben. Die reelle Zahl $K(\sigma) := K(x, y)$, wobei x, y eine beliebige Basis von σ ist, heisst Schnittkrümmung von σ in p .

Korollar 4 Ist $M = \mathbb{R}^n$, so gilt für jeden Punkt $p \in M$:

$$K(\sigma) = 0,$$

wobei $\sigma \subset T_p M$ ist.

Beweis: Wegen Corollar 3 ist klar, dass der Riemannsche Krümmungstensor im \mathbb{R}^n verschwindet. Folglich verschwindet im Euklidischen Raum auch jedes Skalarprodukt mit dem Riemannschen Krümmungstensor. Deshalb ist der Zähler in der Definition der Schnittkrümmung von Satz 20 null und somit ist die Schnittkrümmung null. \square

9 Untermannigfaltigkeit

Es sei $f : M \rightarrow \overline{M}$ eine differenzierbare Immersion einer Mannigfaltigkeit M in eine Mannigfaltigkeit \overline{M} , wobei $\dim(M) = n$ und $\dim(\overline{M}) = k = n + m$ gilt. Die Riemannsche Metrik von \overline{M} induziert auf natürliche Weise eine Riemannsche Metrik auf M . In diesem Kapitel werden wir die Zusammenhänge zwischen der Geometrie von M und derjenigen von \overline{M} näher beleuchten.

9.1 Levi-Civita-Zusammenhang

In diesem Abschnitt betrachten wir die Beziehung zwischen dem Levi-Civita-Zusammenhang $\overline{\nabla}$ einer Mannigfaltigkeit \overline{M} und dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ einer Untermannigfaltigkeit M von \overline{M} .

Für jeden Punkt $p \in M$ wird der Tangentialraum $T_p \overline{M}$ durch das Skalarprodukt auf diesem in die direkte Summe $T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$ aufgeteilt. Dabei bezeichnet $(T_p M)^\perp$ das orthogonale Komplement von $T_p M$ in $T_p \overline{M}$. Wenn $v \in T_p \overline{M}$, mit $p \in M$ ist, dann kann man schreiben:

$$v = v^T + v^N.$$

Dabei sind $v^T \in T_p M$ und $v^N \in (T_p M)^\perp$. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Definition 36 In obiger Notation heisst v^T die Tangentialkomponente und v^N die Normalkomponente von v .

Definition 37 Es sei V ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt g . Zwei Vektoren $v, w \in V$ sind orthogonal, wenn $g(v, w) = 0$. Man schreibt dann: $v \perp w$. Zwei Teilmengen $A, B \subset V$ sind orthogonal, wenn $g(v, w) = 0$ für alle $v \in A$ und $w \in B$. Analog schreibt man $A \perp B$.

Satz 21 Wenn X und Y lokale Vektorfelder auf M und \bar{X}, \bar{Y} lokale Erweiterungen derselben auf \bar{M} sind, so gilt für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇ und $\bar{\nabla}$ auf M und \bar{M} :

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

Beweis: Wir definieren $\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$. Es muss jetzt gezeigt werden, dass ∇ kompatibel mit der Metrik auf M und symmetrisch ist. Zuerst zur Kompatibilität. Auf M gilt

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \bar{X} \langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_{\bar{X}} Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

Nun zum Symmetriebeweis. Es gilt

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})^T = [\bar{X}, \bar{Y}]^T = [X, Y]. \quad \square$$

9.2 Zweite Fundamentalform

Die zweite Fundamentalform kann als Abbildung interpretiert werden, die die geometrischen Eigenschaften einer Untermannigfaltigkeit in Abhängigkeit des sie umgebenden Raums beschreibt.

Satz 22 Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$. Die Abbildung $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ definiert durch

$$B(X, Y) := \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

ist bilinear und symmetrisch.

Beweis: Aus der Linearitätseigenschaft des affinen Zusammenhangs folgt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} B(X_1 + X_2, Y) &= B(X_1, Y) + B(X_2, Y), \\ B(X, Y_1 + Y_2) &= B(X, Y_1) + B(X, Y_2) \end{aligned}$$

und

$$B(fX, Y) = fB(X, Y), \quad f \in \mathfrak{F}(U)$$

ist.

Es bleibt zu beweisen, dass $B(X, fY) = fB(X, Y)$ ist. Wenn wir mit \bar{f} eine Erweiterung von f auf \bar{U} bezeichnen, ergibt sich aus der Definition von $B(X, Y)$:

$$B(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{fY} - \nabla_X (fY).$$

Aus den Eigenschaften des affinen Zusammenhangs erhält man:

$$(1) \quad B(X, fY) = \bar{f} \cdot \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - f \nabla_X Y + \bar{X}(\bar{f}) \bar{Y} - X(f)Y.$$

Weil $f = \bar{f}$, $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$ und $\bar{Y} = Y$ auf ganz M ist, subtrahieren sich die beiden letzten Terme in Gleichung (1) weg, und der Faktor \bar{f} vor $\bar{\nabla}$ ist identisch mit f . Aus Gleichung (1) wird daher

$$B(X, fY) = f \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - f \nabla_X Y.$$

Die rechte Seite ist gleich $fB(X, Y)$. Deshalb gilt

$$B(X, fY) = fB(X, Y).$$

Um die Symmetrie von $B(X, Y)$ zu zeigen, benutzen wir die Symmetrie des Levi-Civita-Zusammenhangs. Es ist

$$(2) \quad B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Weil $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ auf M , wird Gleichung (2) zu

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} - \nabla_Y X.$$

Die rechte Seite ist nach Definition gleich $B(Y, X)$. Also ist $B(X, Y) = B(Y, X)$. \square

Lemma 5 *Die Abbildung*

$$H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definiert durch } H_\eta(x, y) := \langle B(x, y), \eta \rangle$$

ist eine symmetrische Bilinearform.

Beweis: Dies folgt direkt aus der Bilinearität des Skalarprodukts und derjenigen von B . \square

Definition 38 *Die Abbildung $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch*

$$II_\eta(x) := H_\eta(x, x)$$

heißt die zweite Fundamentalform von f im Punkt p längs des Normalenvektors η .

Definition 39 *Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein symmetrischer Operator, wenn gilt:*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Satz 23 *Der bilinearen Abbildung $H_\eta(x, y)$ kann man einen symmetrischen Operator S_η zuordnen, definiert durch*

$$\langle S_\eta(x), y \rangle := H_\eta(x, y)$$

Beweis: (i) S_η ist wohldefiniert, d.h. durch diese Gleichung eindeutig bestimmt. Denn (es sei e_1, \dots, e_n eine Basis in \mathbb{R}^n)

$$\begin{aligned} S_\eta(x) &= \sum_{i=1}^n \langle S_\eta(x), e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n H_\eta(x, e_i) e_i \end{aligned}$$

d.h. $S_\eta(x)$ ist durch die Werte $H_\eta(x, e_i)$ eindeutig bestimmt.

(ii) S_η ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &\stackrel{\text{Def. } S_\eta}{=} H_\eta(x, y) \\ &\stackrel{\text{Def. } H_\eta}{=} \langle B(x, y), \eta \rangle \\ &\stackrel{\text{Sym. B}}{=} \langle B(y, x), \eta \rangle \\ &\stackrel{\text{Def. } H_\eta}{=} H_\eta(y, x) \\ &\stackrel{\text{Def. } S_\eta}{=} \langle S_\eta(y), x \rangle \\ &\stackrel{\text{Sym. } \langle, \rangle}{=} \langle x, S_\eta(y) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 24 *Es seien $p \in M, x \in T_p M$ und $\eta \in (T_p M)^\perp$. Ausserdem sei N eine lokale Erweiterung von η , welche normal zu M ist. Dann gilt:*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Beweis: Es sei $y \in T_p M$ und es seien X, Y lokale Erweiterungen von x bzw. y , tangential zu M . Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(x, y), N \rangle \\ &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\ &= X \langle Y, N \rangle(p) - \langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= -\langle y, \bar{\nabla}_x N \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_x N, y \rangle \\ &= -\langle (\bar{\nabla}_x N)^T, y \rangle \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt nach Definition von S_η , die zweite nach Definition der beiden Vektorfelder X, Y , die dritte nach Definition von B , die vierte wegen der Bilinearität des Skalarprodukts und die fünfte, weil $\nabla_X Y(p) \in T_p M$ und daher $\nabla_X Y(p) \perp N(p)$. Die sechste Gleichung gilt nach Satz 11. Die viertletzte Gleichung gilt wegen $\langle Y, N \rangle(p) = 0$. Die drittletzte Gleichung gilt wegen $y = Y(p)$, die zweitletzte wegen der Symmetrie des Skalarprodukts und die letzte, weil $\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T$. \square

9.3 Schnittkrümmung

Wir setzen jetzt die Schnittkrümmung von M in Beziehung zu der von \overline{M} . Für linear unabhängige Vektoren $x, y \in T_p M$ bezeichnen $K(x, y)$ und $\overline{K}(x, y)$ die Schnittkrümmungen von M bzw. \overline{M} in der von x, y aufgespannten Ebene.

Theorem 5 (*C. F. Gauss*) *Es seien $p \in M$ und $x, y \in T_p M$ orthonormale Vektoren. Dann gilt:*

$$(1) \quad K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Beweis: Es seien X, Y lokale orthogonale Erweiterungen der Vektoren x, y , welche tangential zu M sind. Die lokalen Erweiterungen von X und Y auf \overline{M} bezeichnen wir mit \overline{X} und \overline{Y} . Nun gilt nach der Definition der Schnittkrümmung:

$$(2) \quad K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} - \frac{\langle \overline{R}_{xy}x, y \rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

Wegen $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ und $x \perp y$, ist $|x \wedge y| = 1$. Deshalb ist auch $|x \wedge y|^2 = 1$. Daher kann man in Gleichung (2) den Nenner streichen und man erhält:

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle R_{xy}x, y \rangle - \langle \overline{R}_{xy}x, y \rangle.$$

Setzt man in diese Gleichung die Definition des Riemannschen Krümmungstensors (Definition 33) ein, so ergibt sich am Punkt p :

$$\begin{aligned} K(x, y) - \overline{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X + \nabla_{[X, Y]} X, Y \rangle(p) - \langle \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{X} \\ &\quad - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{X} + \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p). \end{aligned}$$

Nach den Axiomen für das Skalarprodukt kann man dies umschreiben zu:

$$(3) \quad \begin{aligned} K(x, y) - \overline{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \overline{X} - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \overline{X}), Y \rangle(p) \\ &\quad + \langle \nabla_{[X, Y]} X - \overline{\nabla}_{[\overline{X}, \overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p). \end{aligned}$$

Nach Definition 36 ist $\nabla_{[X,Y]}X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X} = -(\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X})^N$. Denn $\nabla_{[X,Y]}X$ ist die Tangentialkomponente von $\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}$. Damit lässt sich der letzte Term von Gleichung (3) folgendermassen schreiben:

$$(4) \quad \langle \nabla_{[X,Y]}X - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X}, Y \rangle(p) = \langle -(\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X})^N, Y \rangle(p).$$

Wegen $-(\overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]} \overline{X})^N \perp Y$, ist der Ausdruck (4) null und Gleichung (3) lässt sich schreiben als:

$$(5) \quad K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} - \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}), Y \rangle(p).$$

Wegen den Eigenschaften des Skalarprodukts kann man Gleichung (5) folgendermassen ausdrücken:

$$(6) \quad K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle(p) - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle(p) \\ - \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}, Y \rangle(p) + \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X}, Y \rangle(p).$$

Andererseits, seien E_1, \dots, E_m lokale Orthonormalfelder, die normal zu M sind, wobei $m = \dim \overline{M} - \dim M$. Weil $B(X, Y) \in T_p M^\perp$ und E_i eine Orthonormalbasis von $T_p M^\perp$ ist, gilt nach Lemma 2:

$$B(X, Y) = \sum_{i=1}^m \langle B(X, Y), E_i \rangle E_i.$$

Jetzt erhalten wir wegen der Definition von H in Satz 5:

$$(7) \quad B(X, Y) = \sum_{i=1}^m H_i(X, Y) E_i, \quad H_i = H_{E_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weil $B(X, X) + \nabla_X X = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}$ ist, kann man $\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}$ schreiben als

$$\overline{\nabla}_{\overline{Y}}(B(X, X) + \nabla_X X).$$

Setzt man in diesen Ausdruck noch Gleichung (7) ein, so ergibt sich:

$$(8) \quad \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X} = \overline{\nabla}_{\overline{Y}}(\sum_{i=1}^m H_i(X, X) E_i + \nabla_X X).$$

Der rechte Teil dieser Gleichung lässt sich aufgrund Definition 25, Eigenschaft (2) schreiben als:

$$(\sum_{i=1}^m \overline{\nabla}_{\overline{Y}} H_i(X, X) E_i) + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X.$$

Diesen Ausdruck kann man aufgrund derselben Definition aber Eigenschaft (3), darstellen als:

$$\sum_{i=1}^m \{H_i(X, X) \overline{\nabla}_{\overline{Y}} E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i\} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X.$$

Setzt man dies nun in Gleichung (8) ein und nimmt gleichzeitig das Skalarprodukt, so erhält man:

$$(9) \quad \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X}, Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^m \{H_i(X, X) \overline{\nabla}_{\overline{Y}} E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i\}, Y \rangle + \langle \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \nabla_X X, Y \rangle.$$

Wegen Definition 21 gilt für den letzten Summanden von Gleichung (9) im Punkt p :

$$(10) \quad \langle \overline{\nabla_Y} \nabla_X X, Y \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Durch Einsetzen von (10) in Gleichung (9) erhält man

$$(11) \quad \langle \overline{\nabla_Y} \overline{\nabla_X} \overline{X}, Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^m \{H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i\}, Y \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Wegen der Axiome des Skalarprodukts kann man Folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} & \langle \sum_{i=1}^m \{H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i\}, Y \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle + \langle \sum_{i=1}^m \overline{Y} H_i(X, X) E_i, Y \rangle. \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist jedoch null, weil $E_i \perp Y$ ist. Deshalb gilt sogar:

$$(12) \quad \langle \sum_{i=1}^m \{H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i + \overline{Y} H_i(X, X) E_i\}, Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle.$$

Setzt man jetzt Gleichung (12) in (11) ein, erhält man

$$(13) \quad \langle \overline{\nabla_Y} \overline{\nabla_X} \overline{X}, Y \rangle = \langle \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Aufgrund der Axiome des Skalarprodukts kann man Gleichung (13) folgendermassen darstellen:

$$(14) \quad \langle \overline{\nabla_Y} \overline{\nabla_X} \overline{X}, Y \rangle = \sum_{i=1}^m H_i(X, X) \langle \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Wegen Satz 11 gilt

$$\overline{Y} \langle E_i, Y \rangle = \langle \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle + \langle E_i, \overline{\nabla_Y} Y \rangle.$$

Weil aber $E_i \perp Y$ ist, folgt, dass $\overline{Y} \langle E_i, Y \rangle = 0$ ist. Daher gilt

$$(*_1) \quad \langle \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle = -\langle E_i, \overline{\nabla_Y} Y \rangle.$$

Jetzt ist

$$H_i(Y, Y) = \langle B(Y, Y), E_i \rangle = \langle \overline{\nabla_Y} \overline{Y} - \nabla_X Y, E_i \rangle.$$

Aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts kann man schreiben

$$H_i(Y, Y) = \langle \overline{\nabla_Y} \overline{Y}, E_i \rangle - \langle \nabla_X Y, E_i \rangle.$$

Weil aber $Y \perp E_i$ gilt, ist der zweite Summand null und man erhält

$$H_i(Y, Y) = \langle \overline{\nabla_Y} \overline{Y}, E_i \rangle.$$

Speziell auf M gilt also

$$(*_2) \quad H_i(Y, Y) = \langle \overline{\nabla_Y} Y, E_i \rangle.$$

Setzt man jetzt $(*_2)$ in $(*_1)$ ein, so ergibt sich, dass

$$(15) \quad \langle \overline{\nabla_Y} E_i, Y \rangle = -H_i(Y, Y) \text{ ist.}$$

Setzt man jetzt Gleichung (15) in Gleichung (14) ein, so ergibt sich

$$(16) \quad \langle \overline{\nabla_Y} \overline{\nabla_X} \overline{X}, Y \rangle = -\sum_{i=1}^m H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Wegen der Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs sowie wegen der Eigenschaften von H_i gilt auch

$$(17) \quad \langle \overline{\nabla_X} \overline{\nabla_Y} \overline{X}, Y \rangle = -\sum_{i=1}^m H_i(X, Y) H_i(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle.$$

Durch Einsetzen von (16) und (17) in Gleichung (6) erhält man jetzt

$$(18) \quad K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \sum_{i=1}^n H_i(x, x) H_i(y, y) - \sum_{j=1}^n H_i(x, y) H_i(x, y).$$

Weil nach Definition von H_i

$$\sum_{i=1}^n H_i(x, y) H_i(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle B(x, y), E_i \rangle \langle B(x, y), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle B(x, y), E_i \rangle^2 = |B(x, y)|^2$$

ist und weil analog gilt, dass

$$\sum_{i=1}^n H_i(x, x) H_i(y, y) = \sum_{i=1}^n \langle B(x, x), E_i \rangle \langle B(y, y), E_i \rangle = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle$$

ist, wird Gleichung (18) zu

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad \square$$

Korollar 5 *Im Fall einer Hyperfläche M^n in $\overline{M}^{(n+1)}$ kann man die Gauss-Formel folgendermassen ausdrücken:*

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Beweis: Es seien $p \in M$ und $\eta \in (T_p M)^\perp$ normiert. Ausserdem sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$, in der S_η diagonal ist, das heisst $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von S_η sind. Weil nach Satz 23 $H(e_i, e_j) = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle$ ist und weil nach Voraussetzung $\langle S(e_i), e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle$ ist, folgt aus den Axiomen des Skalarprodukts, dass

$$H(e_i, e_j) = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle$$

gilt. Weil $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ für $i = j$, folgt

$$H(e_i, e_i) = \lambda_i.$$

Wegen $H(e_i, e_j) = 0$ und Lemma 5 folgt, dass

$$(1) \quad B(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

ist. Gleichung (7) aus dem Beweis des Gauss-Theorems kann man wegen $\dim(\overline{M}) - \dim(M) = 1$ in unserem Fall so schreiben:

$$B(e_i, e_j) = H_\eta(e_i, e_j)\eta.$$

Setzt man dies zusammen mit Gleichung (1) in die Gauss-Formel ein, so erhält man

$$(2) \quad K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \langle H_\eta(e_i, e_i)\eta, H_\eta(e_j, e_j)\eta \rangle.$$

Nach den Axiomen des Skalarprodukts gilt:

$$\langle H_\eta(e_i, e_i)\eta, H_\eta(e_j, e_j)\eta \rangle = H_\eta(e_i, e_i)H_\eta(e_j, e_j)\langle \eta, \eta \rangle.$$

Weil η normiert ist, folgt

$$\langle H_\eta(e_i, e_i)\eta, H_\eta(e_j, e_j)\eta \rangle = H_\eta(e_i, e_i)H_\eta(e_j, e_j) = \lambda_i\lambda_j.$$

Setzt man dies in Gleichung (2) ein, so ergibt sich

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i\lambda_j. \square$$

10 Zusammenhang zwischen Schnitt- und Gauss-Krümmung

In diesem Kapitel wird in Abschnitt 10.1 zuerst gezeigt, dass die Schnittkrümmung auf einer regulären Fläche stets der Gauss-Krümmung auf dieser entspricht. Im Abschnitt 10.2 wird dann schliesslich ein Zusammenhang zwischen der Schnittkrümmung allgemeiner Mannigfaltigkeiten und der Gauss-Krümmung hergestellt.

10.1 Auf regulären Flächen

Satz 25 *Im Fall, dass $M = M^2 \subset \overline{M} = \mathbb{R}^3$, ist die Schnittkrümmung K identisch mit der Gauss-Krümmung $K_s(p)$.*

Beweis: Weil nach Corollar 4 die Schnittkrümmung im \mathbb{R}^3 verschwindet, reduziert sich die Formulierung der Gauss-Formel aus Corollar 5 für unseren Fall auf $K(e_1, e_2) = \lambda_1\lambda_2$. Weil aber $\lambda_1\lambda_2 = K_s(p)$ ist, folgt

$$K(e_1, e_2) = K_s(p). \square$$

10.2 Allgemeiner Fall

Definition 40 Eine Immersion $f: M \rightarrow \overline{M}$ ist geodätisch im Punkt $p \in M$, wenn für jedes $\eta \in T_p M$ die zweite Fundamentalform H_η null ist.

Satz 26 Eine Immersion $f: M \rightarrow \overline{M}$ ist genau dann geodätisch im Punkt $p \in M$, wenn jede Geodäte γ in M mit Startpunkt p auch eine Geodäte von \overline{M} im Punkt p ist.

Beweis: Es sei $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = x$. Weiter sei η ein Normalenvektor im Punkt p . Ausserdem seien N ein lokales Normalenvektorfeld auf einer Umgebung von p , welches η erweitert und X ein lokales Tangentialvektorfeld, welches x erweitert. Es gilt $\langle X, N \rangle \equiv 0$. Aus Satz 23 folgt

$$(1) \quad H_\eta(x, x) = \langle S_\eta(x), x \rangle.$$

Weiter gilt nach Satz 24:

$$(2) \quad \langle S_\eta(x), x \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_x N)^T, x \rangle.$$

Weil $(\overline{\nabla}_x N) = (\overline{\nabla}_x N)^T + (\overline{\nabla}_x N)^N$ ist, gilt nach den Axiomen des Skalarprodukts:

$$(3) \quad \langle -(\overline{\nabla}_x N), x \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_x N)^T, x \rangle + \langle -(\overline{\nabla}_x N)^N, x \rangle.$$

Wegen $x \in T_p M$ fällt der zweite Summand der rechten Seite von Gleichung (3) weg:

$$\langle -(\overline{\nabla}_x N), x \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_x N)^T, x \rangle.$$

Aus diesem Grund kann man Gleichung (2) schreiben als:

$$\langle S_\eta(x), x \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_x N), x \rangle.$$

Speziell im Punkt p gilt dann offensichtlich

$$(4) \quad \langle S_\eta(x), x \rangle = \langle -(\overline{\nabla}_X N), X \rangle.$$

Nach Satz 11 gilt:

$$(5) \quad \langle -(\overline{\nabla}_X N), X \rangle = -X \langle N, X \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X X \rangle.$$

Weil $\langle X, N \rangle \equiv 0$ ist, fällt der erste Summand der rechten Seite von Gleichung (5) weg und man erhält:

$$\langle -(\overline{\nabla}_X N), X \rangle = \langle N, \overline{\nabla}_X X \rangle.$$

Kombiniert man dies mit Gleichung (1), so ergibt sich:

$$(6) \quad H_\eta(x, x) = \langle N, \overline{\nabla}_X X \rangle.$$

Wegen Definition 40 folgt mittels Gleichung (6), dass f genau dann geodätisch im Punkt p ist, wenn für ein (und somit für alle) $x \in T_p M$, die Geodäte γ in M , die im Punkt p tangential zu x verläuft, folgende Bedingung erfüllt: $\overline{\nabla}_X X$ hat keine Normalenkomponente. Also folgt aus der Definition 30 mittels der Geodätengleichung, dass f genau dann geodätisch im Punkt p ist, wenn jede Geodäte γ von M mit Startpunkt p auch eine Geodäte von \overline{M} in p ist. Denn ist $\overline{\nabla}_X X(p) = 0$, so entspricht dies der Geodätengleichung $\overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = 0$ in \overline{M} . \square

Theorem 6 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Weiter sei $B_\varepsilon(0_p) \subset T_p M$ eine offene Kugel mit dem Radius $\varepsilon > 0$, sodass \exp_p ein Diffeomorphismus ist. Es sei σ ein 2-dimensionaler Unterraum von $T_p M$. Dann ist $S = \exp_p(\sigma \cap B_\varepsilon(0_p))$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M , die durch den Punkt p geht, und es gilt:

$$K_s(p) = K(p, \sigma)$$

wobei $K_s(p)$ die Gauss-Krümmung von S im Punkt p und $K(p, \sigma)$ die Schnittkrümmung von M im Punkt p bezüglich σ ist (siehe Abbildung 8).

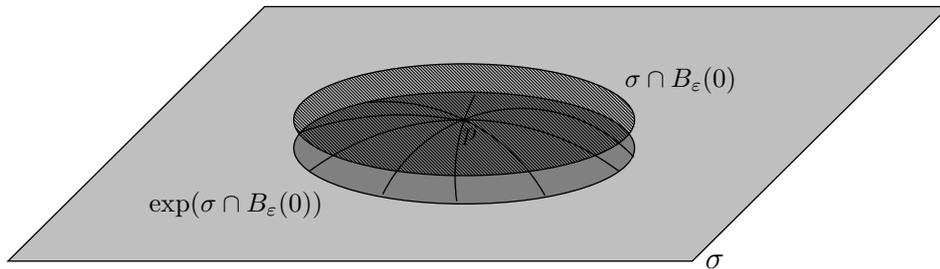


Abbildung 8 (Schnittkrümmung). Die Schnittkrümmung im Punkt $p \in M$ bezüglich σ ist identisch mit der Gauss-Krümmung im Punkt p der regulären Fläche, die dem Bild der Exponentialabbildung einer kleinen Epsilonumgebung aus σ entspricht.

Beweis: Das Differential $di_p : T_p S \subset T_p M$ der Inklusionsabbildung $i : S \subset M$ ist die Identitätsabbildung und somit injektiv. Deshalb ist sie eine Immersion. Weil die Inklusionsabbildung offensichtlich alle Eigenschaften eines Homöomorphismus aufweist und weil $S \subset M$ ist und S somit die von M induzierte Topologie besitzt, ist die Inklusionsabbildung sogar eine Einbettung. Aus dieser Erkenntnis sowie aus Satz 17 folgt aufgrund der offensichtlichen Tatsache, dass $\sigma \cap B$ 2-dimensional ist, dass S eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist. Wenn man S mit der Inklusionsabbildung $i : S \subset M$ identifiziert und B_ε klein genug ist, dann sind die Geodäten auf S im Punkt p auch Geodäten in M . Aus Satz 26 folgt

deshalb, dass S geodätisch im Punkt p ist. Also ist die Zweite Fundamentalform der Inklusionsabbildung null. Weil S eine Untermannigfaltigkeit von M ist, folgt aus Satz 8, dass S eine von M induzierte Riemannsche Metrik hat. Die Gauss-Krümmung dieser Metrik im Punkt p wird im Folgenden als $K_s(p)$ bezeichnet. Weil die zweite Fundamentalform null ist, ist die bilineare Abbildung $B(x, x)$ ebenfalls null. Weil B auch symmetrisch ist, kann man $B(x, y) = \frac{1}{2}[B(x + y, x + y) + B(x - y, x - y)]$ schreiben. Der letzte Ausdruck ist offensichtlich null. Setzt man $B(x, x) = 0$ und $B(x, y) = 0$ in die Gauss-Formel (Theorem 5) ein, so erhält man

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle 0, 0 \rangle - |0|^2 = 0.$$

Folglich ist $K(x, y) = \overline{K}(x, y)$. Weil nach Corollar 25 $K(x, y) = K_s(p)$ gilt, folgt nun also, dass

$$K_s(p) = \overline{K}(p, \sigma)$$

ist. \square

11 Anhang

Dieser Abschnitt dient dazu, den Zusammenhang zwischen der Schnittkrümmung und weiteren Krümmungsgrößen aufzuzeigen, die für das Verständnis der Einsteinschen Feldgleichungen von grosser Bedeutung sind.

11.1 Tensoren

Tensoren stellen eine Struktur dar, die viele bekannte Konzepte der Mathematik, wie zum Beispiel das des Vektorfelds, verallgemeinert.

Definition 41 *Es sei V ein Vektorraum über K und V^* die Menge aller K -linearen Funktionen von V nach K . Für ganze Zahlen $r \geq 0$, $s \geq 0$, wobei nicht $r = s = 0$ sein darf, heisst eine K -multilineare Funktion $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ Tensor des Typs (r, s) über V .*

Im Folgenden bezeichnet $\mathfrak{X}^*(M)$ die Menge aller Pfaffschen Formen auf M .

Definition 42 *Ein Tensorfeld A auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Tensor über $\mathfrak{X}(M)$. Ist A ein (r, s) -Tensor, so handelt es sich dabei um eine $\mathfrak{F}(M)$ -multilineare Funktion*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M).$$

Das Tensorfeld A ist also eine multilineare Abbildung, die r Pfaffschen Formen und s Vektorfeldern eine reell-wertige Funktion

$$f = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in \mathfrak{F}(M)$$

zuordnet. Die Stellen 1 bis r heissen kontravariant. Die Stellen 1 bis s heissen kovariant.

Die Menge aller Tensorfelder des Typs (r, s) auf M wird im Folgenden mit $\mathfrak{T}_s^r(M)$ bezeichnet.

Es seien $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ und $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$. Man definiert

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

durch

$$\begin{aligned} & (A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ &= A((\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'})) \end{aligned}$$

Definition 43 *Die oben definierte Abbildung $A \otimes B$ nennt man das Tensorprodukt von A und B .*

11.2 Tensorkontraktionen

Die Abbildung, um die es in diesem Kapitel geht, ordnet einem Tensor vom Typ (r, s) einen Tensor vom Typ $(r - 1, s - 1)$ zu.

Lemma 6 *Es gibt eine eindeutig bestimmte $\mathfrak{F}(M)$ -lineare Funktion $\mathbf{C} : \mathfrak{T}_1^1(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$, genannt (1, 1)-Kontraktion, sodass für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ $\mathbf{C}(X \otimes \theta) = \theta X$ gilt.*

Für einen Beweis dieses Satzes siehe zum Beispiel [O'Neill], Seite 40.

Um die (1, 1)-Kontraktion \mathbf{C} auf Tensoren höheren Typs zu erweitern, wählen wir eine kovariante und eine kontravariante Stelle aus und wenden \mathbf{C} auf diese an.

Es seien $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ sowie $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq s$. Wir fixieren Pfaffsche Formen $\theta^1, \dots, \theta^{r-1}$ sowie Vektorfelder X_1, \dots, X_{s-1} . Dann ist die Funktion

$$(\theta, X) \rightarrow A(\theta^1, \dots, \theta, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X, \dots, X_{s-1})$$

ein (1, 1)-Tensor. Dabei ist θ an der i -ten kontravarianten sowie X an der j -ten kovarianten Stelle.

Wendet man auf diesen Tensor nun die (1, 1)-Kontraktion \mathbf{C} an, so erhält man eine reell-wertige Funktion

$$(C_j^i A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}).$$

Die Abbildung $C_j^i A$ ist $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear in ihren Argumenten. Also ist $C_j^i A$ ein Tensor des Typs $(r - 1, s - 1)$.

Definition 44 *Der oben definierte Tensor $C_j^i A$ heisst die Kontraktion von A über i, j .*

11.3 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit

Definition 45 *Eine symmetrische Bilinearform b auf einem Vektorraum V ist nicht entartet, wenn aus $b(v, w) = 0$, für alle $w \in V$, folgt, dass $v = 0$ ist.*

Definition 46 *Der Index ν einer symmetrischen Bilinearform b auf V ist die grösste ganze Zahl, die der Dimension eines Unterraums $W \subset V$ entspricht, auf dem $b|_W$ negativ definit ist.*

Definition 47 *Ein metrischer Tensor \mathbf{g} auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist ein symmetrisches, nicht entartetes (0, 2)-Tensorfeld auf M mit konstantem Index.*

Definition 48 *Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem metrischen Tensor \mathbf{g} .*

Bemerkung 7 *Hat der metrische Tensor einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit den Index $\nu = 0$, so spricht man von einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, wie sie in Kapitel 5 definiert wurde.*

In den folgenden Abschnitten bezeichnet M immer eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.

11.4 Beziehung der Schnittkrümmung zu weiteren Krümmungsgrößen

11.4.1 Riemannscher Krümmungstensor

Dass der Riemannsche Krümmungstensor die Schnittkrümmung bestimmt ist klar. Dass die Schnittkrümmung aber auch den Riemannschen Krümmungstensor bestimmt, wird in diesem Abschnitt anhand eines Satzes gezeigt.

In diesem Kapitel bezeichnet $F : (T_p M)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $F(x, y, v, w) = -F(y, x, v, w)$
- (ii) $F(x, y, v, w) = -F(x, y, w, v)$
- (iii) $F(x, y, v, w) = F(v, w, x, y)$

Satz 27 *Es sei F eine Funktion in obigem Sinn, die die folgende Gleichung erfüllt:*

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{|v \wedge w|^2},$$

wobei v, w linear unabhängige Vektoren sind und K die Schnittkrümmung bezeichnet.

Dann gilt $\langle R_{vw}x, y \rangle = F(v, w, x, y)$.

Für einen Beweis dieses Satzes siehe zum Beispiel [O'Neill], Seite 79.

Der obige Satz zeigt, dass die Schnittkrümmung den Riemannschen Krümmungstensor eindeutig bestimmt.

Satz 28 *Der Riemannsche Krümmungstensor ist ein $(1, 3)$ -Tensorfeld.*

Für einen Beweis siehe zum Beispiel [O'Neill], Seite 74.

11.4.2 Ricci-Krümmung

Definition 49 Es sei R der Riemannsche Krümmungstensor von M . Die Ricci-Krümmung Ric von M ist die Kontraktion $C_3^1(R)$.

Weil die Schnittkrümmung den Riemannschen Krümmungstensor bestimmt, bestimmt sie dadurch auch die Ricci-Krümmung.

Tatsächlich ist es sogar möglich, den Ricci-Tensor mithilfe der Schnittkrümmung auszudrücken. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 29 Es seien ein Punkt $p \in M$ sowie eine Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) von $T_p M$ gegeben. Dann gilt

$$Ric(e_1, e_1) = \sum \varepsilon_m \langle R_{e_1 e_m}(e_1), e_m \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle \sum K(e_1, e_m).$$

Dabei bezeichnet K die Schnittkrümmung und es ist $\varepsilon_m = \langle e_m, e_m \rangle$.

Für einen Beweis dieses Satzes siehe zum Beispiel [O'Neill], Seite 88.

Nach diesem Satz entspricht $Ric(e_1, e_1)$ bis auf das Vorzeichen $\langle e_1, e_1 \rangle = \pm 1$ der Summe der Schnittkrümmungen aller $n-1$ orthogonalen, nicht entarteten Ebenen durch e_1 .

11.4.3 Skalarkrümmung

Definition 50 Die Skalarkrümmung S von M ist die Kontraktion $\mathbf{C}(Ric) \in \mathfrak{F}(M)$ des Ricci-Tensors von M .

Weil die Schnittkrümmung den Riemannschen Krümmungstensor bestimmt, bestimmt sie dadurch auch die Skalar-Krümmung.

Allerdings ist es wieder wie im Fall des Ricci-Tensors möglich, die Skalarkrümmung mit der Schnittkrümmung auszudrücken. Dies wird durch den folgenden Satz deutlich.

Satz 30 Es seien E_1, \dots, E_n orthonormale Vektorfelder, die jedem $T_p M$ eine Basis zuordnen. Dann gilt

$$S = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{i < j} K(E_i, E_j).$$

Dabei bezeichnet K wieder die Schnittkrümmung.

Für einen Beweis dieses Satzes siehe zum Beispiel [O'Neill], Seite 88.

12 Schlusswort

Weil ich bereits früh in meinem Leben damit angefangen habe, zu programmieren, habe ich schon an diversen Projekten gearbeitet. Deshalb war das zielstrebige Arbeiten an einem Projekt über einen längeren Zeitraum an sich nichts Neues für mich.

Meine ambitionierte Zielsetzung führte während der Arbeit zu drei Herausforderungen.

Die erste Herausforderung stellte hierbei die genaue Dokumentation meiner Vorgehensweise dar: Weil in meinen bisherigen Projekten lediglich das Endprodukt von Bedeutung war, dokumentierte ich weder den Vorgang noch meine Arbeitsweise. Diese Umstellung führte jedoch zu keinerlei Schwierigkeiten, weil ich mich bereits in die Mathematik, auf der meine Maturitätsarbeit basiert, eingelesen hatte, bevor ich mit dem Schreiben begann. Deshalb gab es keine Lücken im mathematischen Verständnis, welche den Arbeitsprozess verlangsamten. Dadurch war es mir überhaupt erst möglich, die vorliegende Arbeit innerhalb von nur sieben Wochen zu schreiben.

Die zweite Herausforderung bestand darin, die mathematische Beweisführung weiter verfeinern. Diese Herausforderung habe ich, weil ich bisher praktisch nie Übungen auf diesem Niveau der Mathematik gelöst habe, als die grösste eingeschätzt. Aufgrund dessen, dass ich mich bereits über einen längeren Zeitraum in die Mathematik eingearbeitet habe, konnte ich mich jedoch schnell an die mathematische Beweisführung anpassen.

Die letzte Herausforderung bestand schliesslich darin, dass ich, bevor ich gegen Ende der Herbstferien mit dem Schreiben der Maturarbeit begonnen habe, noch nie etwas mit LaTeX zu tun hatte. Deshalb musste ich den Umgang mit LaTeX zuerst lernen. Dabei kam mir meine langjährige Programmiererfahrung erneut zu Gute.

Aus den oberen Abschnitten geht hervor, wie wichtig der Aspekt des Planens bei der Verfassung einer Maturitätsarbeit, aber auch einer Arbeit im Allgemeinen ist.

Das Meistern der oben genannten Herausforderungen war eine grosse Bereicherung für mich. Dabei werden mir besonders die ersten beiden genannten Herausforderungen im Studium, aber auch im Alltag, nämlich wenn präzises Denken gefragt ist, zu Gute kommen. Die letzte der oben genannten Herausforderungen wird mir sicherlich ebenfalls in Zukunft beim Schreiben von Arbeiten zu Gute kommen.

13 Quellenverzeichnis

Literatur

- [GF] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, Springer Spektrum, 18. Aufl. 2014
- [OF1] Otto Forster, *Analysis 1*, Springer Spektrum, 12. Aufl. 2016
- [OF2] Otto Forster, *Analysis 2*, Springer Spektrum, 11. Aufl. 2017
- [OF3] Otto Forster, *Analysis 3*, Springer Spektrum, 8. Aufl. 2016
- [DC1] Manfredo P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 3. Aufl. 1993
- [DC2] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992
- [O'Neill] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity*, Academic Press, 1983

Ich, Yves Scherrer aus der Klasse 6a, erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit «Die Schnittkrümmung als Verallgemeinerung der Gauss-Krümmung» selbständig und ohne Benützung anderer als der angegebenen Quellen oder Hilfsmittel verfasst bzw. gestaltet habe.

Ort, Datum: _____

Unterschrift: _____