

LICEO CANTONALE DI LOCARNO

IL MODELLO
DI
ISING

LAVORO DI MATURITÀ

ROMEO NICOLI

2011-2012

Professore responsabile:

CHRISTIAN FERRARI

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Alcune note storiche	3
1.2	Il fenomeno	4
1.3	Breve descrizione delle transizioni di fase	5
2	Concetti generali	7
2.1	Il modello	7
2.2	Termodinamica	8
2.3	Fisica Statistica	9
3	L'approssimazione del campo medio	12
3.1	Introduzione	12
3.2	Caso senza interazioni fra spins	12
3.3	Energia libera e magnetizzazione	13
3.4	Energia libera di Helmholtz e teoria di Landau	16
3.5	Studio del caso $h = 0$	18
3.5.1	Magnetizzazione ed equilibrio	18
3.5.2	Esponenti critici	20
3.5.3	Rottura spontanea di simmetria	21
3.6	Studio del caso $h \neq 0$	22
3.6.1	Caso $T > T_c$	22
3.6.2	Caso $T < T_c$	23
3.7	Conclusione	27
4	Soluzione esatta a una dimensione	28
4.1	Energia libera e magnetizzazione	28
4.2	Assenza di transizioni di fase	31
5	Studio del caso a due dimensioni	33
5.1	L'argomento di Peierls	33
5.1.1	Hamiltoniana H^+ e limite termodinamico	35
5.1.2	Convessità di f e stima di m con m^+	35
5.1.3	L'argomento di Peierls	37
5.2	La dualità di Kramers-Wannier	41
5.2.1	Rappresentazione a bassa temperatura	41
5.2.2	Rappresentazione ad alta temperatura	43
5.2.3	Dualità	45
5.3	La soluzione esatta di Onsager	47

Ringraziamenti	50
Bibliografia	51

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Alcune note storiche

Tutto nacque alla fine del XIX secolo quando il celebre fisico teorico di origini austriache Ludwig Boltzmann si accorse che, con l'utilizzo di metodi statistici, possiamo dotare di un fondamento microscopico i fenomeni termodinamici osservati sperimentalmente. Diede vita così alla fisica statistica, disciplina che, costituendo una novità, colse da subito l'interesse di numerosi scienziati.

Uno di questi fu il tedesco Wilhelm Lenz, allora professore all'università di Rostock, che nel 1920, con l'intento di studiare le proprietà di alcuni metalli, pose le basi di quello che oggi è conosciuto come modello di Ising. Costretto ad abbandonare il suo progetto non avendo ottenuto i crediti dalla comunità fisica, egli si trasferì in seguito ad Amburgo, dove ottenne una cattedra all'università. Là introdusse nel 1922 Ernst Ising, uno dei suoi primi allievi, nello studio dei fenomeni del ferromagnetismo. Il giovane, nato a Colonia il 10 maggio del 1900, riprese il modello del suo supervisore e, sotto la sua guida, arrivò nel 1925 a presentare nella sua tesi di laurea la soluzione esatta a una dimensione, che mostrava l'assenza di transizione di fase tra lo stato paramagnetico e quello ferromagnetico. La delusione generata dall'irrilevanza di questo risultato dal punto di vista fisico, lo portò erroneamente a supporre che anche le soluzioni di dimensione maggiore non presentassero la transizione di fase, dissuadendo numerose persone dal portare avanti il lavoro svolto sin d'ora. Egli infatti, convinto della correttezza dei suoi calcoli, supponeva che l'incongruenza con la fisica fosse generata dall'eccessiva esemplificazione che stava alla radice del modello.

Per questo motivo degli sviluppi consistenti del modello dovettero attendere il 1936, quando il britannico Rudolf Peierls riuscì a dimostrare l'esistenza di una transizione di fase nei reticoli planari, ossia quelli di dimensione uguale a due. Nel 1941 Hendrik Kramers e Gregory Wannier individuarono il valore esatto della temperatura di Curie del modello di Ising bidimensionale, ma bisognò attendere fino al 1944 per la soluzione analitica esatta di Lars Onsager. Infine, da essa, nel 1952 Chen Ning Yang riuscì a ricavare il valore della magnetizzazione spontanea. I lunghi tempi d'attesa tra una scoperta e l'altra ci rivelano la presenza di significative difficoltà tecniche riscontrate nella risoluzione dei modelli. Oggigiorno non siamo ancora a conoscenza di una soluzione esatta per il modello a tre dimensioni. Ising, essendo stato perseguitato dai nazisti a causa della sua fede ebraica, rimase lontano dalla comunità scientifica dal 1933, quando perse la sua cattedra, fino al 1947, quando finalmente riuscì a raggiungere gli Stati Uniti. Là tornò a insegnare e solo allora realizzò che i glifi del suo nome erano ormai stati scolpiti in eterno sulle tavole della scienza. Egli morì l'11 maggio 1998 nella sua casa a Peoria, nell'Illinois.

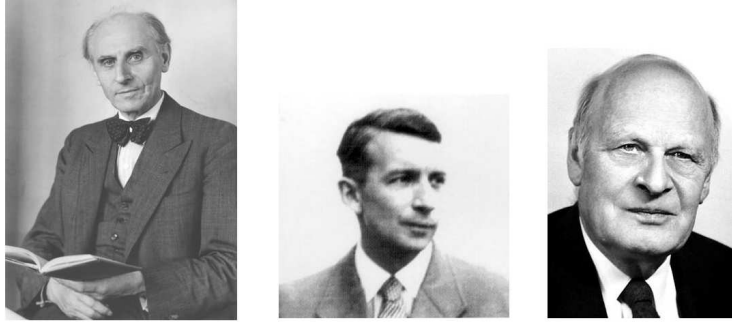


Figura 1.1: A sinistra il professor Wilhelm Lenz, al centro il suo allievo Ernst Ising e a destra Lars Onsager, il risolutore del modello a due dimensioni.

1.2 Il fenomeno

Ferro, cobalto, nichel e magnetite sono metalli di cui i momenti magnetici tendono ad allinearsi spontaneamente in una direzione. Questa proprietà, detta ferromagnetica, va ricercata nel comportamento cooperativo degli spins dei loro atomi: un numero considerevole dei loro elettroni si “orienta” nella medesima direzione dando al metallo il carattere magnetico, definito da una grandezza chiamata magnetizzazione.

Aumentando la temperatura osserviamo però un curioso comportamento: la loro attrazione magnetica improvvisamente sembra venir meno. Eppure fino a qualche istante prima erano ben saldi! L’agitazione termica impedisce agli spins di interagire tra loro, perciò il loro allineamento diventa aleatorio. Di conseguenza nell’istante in cui viene raggiunta la temperatura di Curie, notata T_c , il metallo perde in modo brusco la magnetizzazione. Questo fenomeno è noto come transizione di fase ferromagnetica-paramagnetica.

Esistono due tipi di transizione di fase: nel primo al punto di transizione c’è un equilibrio fra le due fasi. È questo il caso dell’evaporazione, ovvero del passaggio dallo stato liquido a quello gassoso, dove ad esempio a $100\text{ }^\circ\text{C}$ sono presenti sia acqua sia vapore acqueo. Secondo la classificazione proposta da Paul Ehrenfest nel 1933, in questo caso parliamo di transizione di fase di primo ordine e la constatiamo dalla discontinuità di almeno una derivata prima di una funzione termodinamica del sistema. Nell’esempio abbiamo una discontinuità dell’entropia ($-S = \frac{\partial F}{\partial T}$), da cui la presenza del calore latente di trasformazione. Nel nostro caso invece la transizione dalla fase ferromagnetica a quella paramagnetica avviene sì in modo continuo, ma non assistiamo mai a una situazione di equilibrio tra fasi. Da notare che questo avviene pure per i fluidi durante il passaggio attraverso il punto critico, punto terminale della linea di coesistenza liquido-gas. In questo caso parliamo di transizione di fase continua. Nel 1937 il russo Lev Davidovič Landau essendosi accorto del cambiamento (rottura) di simmetria del sistema quando avviene una transizione di questo tipo, introduce il concetto di parametro d’ordine, ossia una grandezza che è nulla quando il sistema è nella fase ad alta temperatura (fase disordinata e con maggior simmetria) e diversa da zero quando il sistema è nella fase a bassa temperatura (fase ordinata con minor simmetria). Nell’esempio dell’acqua il parametro d’ordine è la differenza di densità tra la fase liquida e quella gassosa $\rho_\ell - \rho_g$, che in effetti si annulla al punto critico. Nel caso ferromagnetico invece il parametro d’ordine è la magnetizzazione che, come abbiamo accennato, è nulla oltre la temperatura di Curie.

La classificazione delle transizioni di fase è abbastanza complessa, per i nostri scopi legati al magnetismo è sufficiente seguire Landau che propone, per i casi in cui vi è una rottura

di simmetria, di suddividere le transizioni di fase nel modo seguente:

- transizioni di I ordine: quelle in cui il parametro d'ordine è discontinuo;
- transizioni continue: quelle in cui il parametro d'ordine varia in modo continuo alla transizione.

Da segnalare che anche nel caso magnetico, oltre alla transizione di fase continua ferro-paramagnetica già descritta, vi è pure una transizione di fase di I ordine al di sotto della temperatura T_c , in modo analogo alla transizione liquido-gas per l'acqua sotto la temperatura del punto critico. Il successo del modello di Ising a due dimensioni è proprio dovuto al fatto che, nonostante la sua apparente semplicità, i risultati matematici conseguiti possono facilmente venir interpretati dal punto di vista fisico. Esso infatti, stabilisce in modo rigoroso la transizione di fase ferromagnetica-paramagnetica che, presentando un esponente critico universale, cioè che non dipende dalla struttura microscopica del materiale ma unicamente dalle caratteristiche generali della transizione di fase, può essere ricondotto ad altre situazioni. Inoltre, anche se in questo lavoro non tratteremo questo aspetto, il modello di Ising può assumere le caratteristiche di un modello aleatorio, e venir di conseguenza trattato con la matematica probabilistica.

1.3 Breve descrizione delle transizioni di fase

Nelle figure seguenti riportiamo il comportamento del parametro d'ordine, ovvero della magnetizzazione m , dapprima in funzione della temperatura in assenza di campo magnetico esterno ($h = 0$), poi in funzione di h . Infine rappresentiamo il digramma di fase nel piano (T, h) . Questi tre elementi ci permettono di illustrare il problema delle transizioni di fase nel modello di Ising.

Nella figura 1.2, che mostra il comportamento della magnetizzazione in funzione della temperatura in assenza di un campo magnetico esterno, osserviamo che esiste un valore della temperatura, $T = T_c$, a partire dal quale essa si annulla: è la temperatura di Curie o temperatura critica.

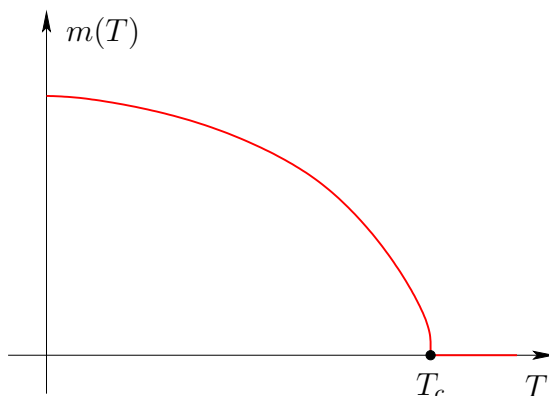


Figura 1.2: Comportamento della magnetizzazione in funzione della temperatura per $h = 0$.

Nella figura 1.3, che rappresenta il comportamento della magnetizzazione in funzione del campo esterno h , osserviamo che per $T < T_c$ la funzione presenta una discontinuità in $h = 0$, mentre per $T > T_c$ la funzione è continua e in $h = 0$ si annulla.

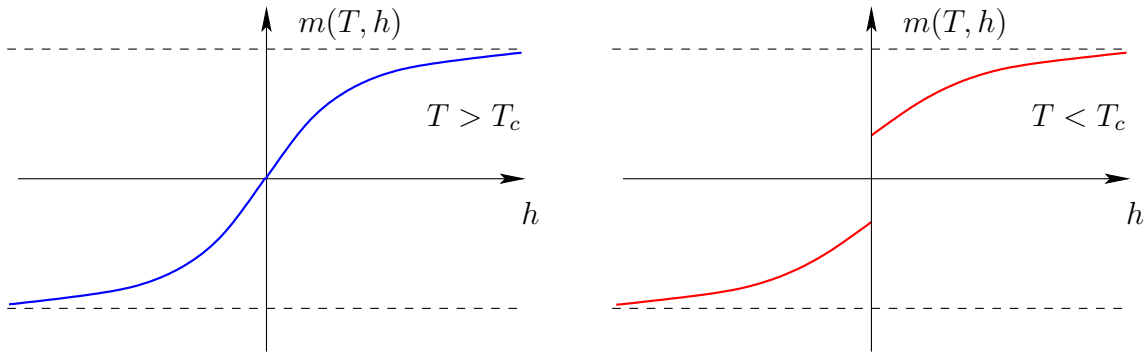


Figura 1.3: Comportamento della magnetizzazione in funzione del campo esterno, nel caso $T > T_c$ (blu) e $T < T_c$ (rosso).

Nella figura 1.4 sono rappresentate le diverse fasi in funzione dei parametri intensivi (T, h) . Quando $h > 0$ abbiamo $m > 0$, mentre quando $h < 0$ abbiamo $m < 0$. In entrambi i casi abbiamo due fasi ferromagnetiche. Quando $h = 0$ constatiamo due comportamenti differenti di m a dipendenza dalla temperatura: il passaggio da $m < 0$ a $m > 0$ avviene o in modo continuo o in modo discontinuo. Per $T < T_c$ abbiamo, infatti, una linea di discontinuità di m che separa la regione rossa da quella blu, provocando un “salto” da $m < 0$ a $m > 0$ (freccia verde). Questa discontinuità coincide con una transizione di fase di I ordine. Per $T \geq T_c$ invece, m si annulla (passa quindi in modo continuo dalla regione $m > 0$ a quella $m < 0$) determinando, quando $T = T_c$, la transizione di fase ferro-paramagnetica, che, come detto, è una transizione di fase continua.

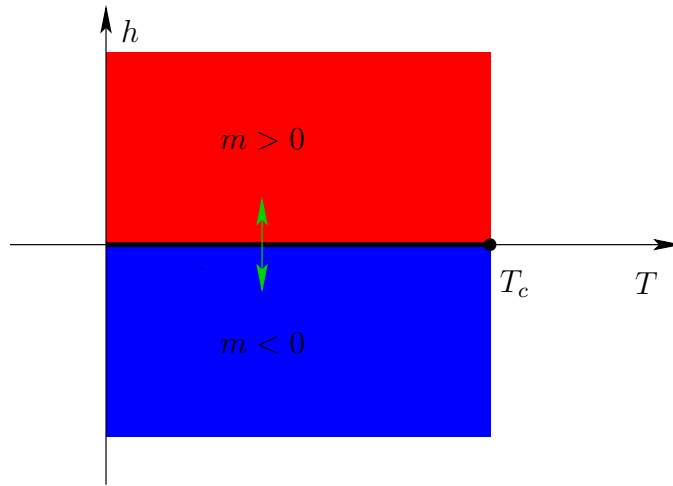


Figura 1.4: Diagramma di fase per il modello di Ising.

Capitolo 2

Concetti generali

2.1 Il modello

Cominciamo col descrivere il modello. In primo luogo, come vediamo nella figura 2.1, poniamo sui punti di un reticolo finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ degli spins σ_i paralleli all'asse O_z a cui assegnamo valore $+1$ quando sono rivolti verso l'alto e valore -1 quando sono rivolti verso il basso. Questi spins rappresentano il momento magnetico degli atomi del metallo. A una dimensione avremo quindi una catena, a due dimensioni un reticolo e a tre dimensioni un cristallo. Per semplicità poniamo inoltre che ogni spin interagisce solo con i suoi più prossimi vicini e con un campo magnetico esterno.

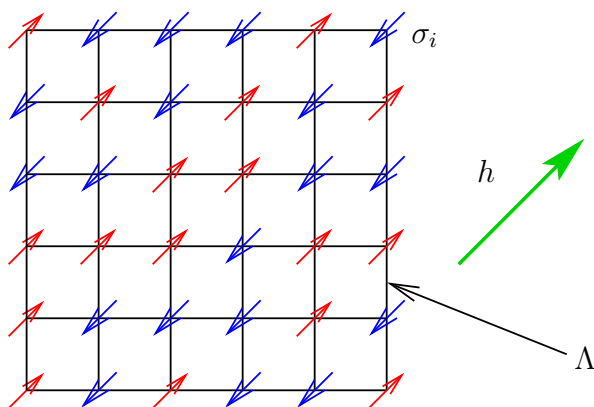


Figura 2.1: Reticolo finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, variabili di spin σ_i e campo magnetico esterno h .

Date queste ipotesi possiamo definire l'Hamiltoniana, ossia l'osservabile energia del sistema, nel seguente modo:

$$H(\sigma) = H_0(\sigma) + H_1(\sigma) \quad (2.1)$$

dove H_0 è il contributo dovuto all'interazione tra gli spins,

$$H_0(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (2.2)$$

mentre H_1 è quello associato all'interazione degli spins con in campo magnetico esterno

$$H_1(\sigma) = -h \sum_i \sigma_i \quad (2.3)$$

dove $\sigma_i = \pm 1$ è il valore dello spin nel punto i , h è il campo magnetico esterno, mentre J è una costante positiva. Utilizzeremo la notazione $\langle i, j \rangle$ per indicare che gli spins σ_i e σ_j sono più prossimi vicini.

L'inserimento di (2.2) e (2.3) in (2.1) ci permette in conclusione di esprimere l'Hamiltoniana nel seguente modo:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i . \quad (2.4)$$

Una grandezza fondamentale è la magnetizzazione totale, definita come la somma di tutti gli spins:

$$M(\sigma) = \sum_i \sigma_i$$

come pure la magnetizzazione per spin $\frac{M(\sigma)}{N}$, dove N è il numero di spins.

Da notare che le configurazioni al bordo, dette condizioni al bordo, possono essere di vario tipo, siccome, come dimostreremo nella sezione 5.1, esse non influiscono sul risultato finale. In questo lavoro potremo ad esempio avere:

- condizioni al bordo libere;
- condizioni al bordo periodiche;
- condizioni al bordo in cui poniamo tutti gli spins rivolti verso l'alto (condizioni al bordo +).

L'indipendenza dalle condizioni al bordo è un risultato generale ottenuto nel limite termodinamico, ossia nel limite $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$.

2.2 Termodinamica

Per determinare le proprietà termodinamiche e descrivere le transizioni di fase dobbiamo poter disporre del potenziale termodinamico dipendente dalle grandezze intensive temperatura T , campo magnetico h e dalla grandezza estensiva numero di spins N , che ci dà un'indicazione sulla sua "taglia". Per ottenere questa funzione $F(\beta, h, N)$ conosciuta come energia libera di Gibbs, che chiameremo semplicemente energia libera, procediamo tramite trasformata di Legendre dell'energia interna $U(S, M, N)$, funzione delle grandezze estensive entropia S , magnetizzazione totale M e numero di spins N .

Unendo il primo principio $dU = \delta Q + \delta L$, il secondo $dS = \frac{\delta Q}{T}$ e la relazione $\delta L = h dM$, per la funzione $U(S, M, N)$ otteniamo:

$$dU = T dS + h dM \quad (2.5)$$

dove, lo ricordiamo, M è la magnetizzazione (grandezza estensiva), h è il campo magnetico esterno e N il numero di spins (che indica la "taglia" del sistema) ed è una grandezza fissata. L'energia libera è così definita (trasformata di Legendre):

$$F = U - TS - hM \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} dF = -SdT - Mdh \\ dF = \frac{\partial F}{\partial T}dT + \frac{\partial F}{\partial h}dh \end{cases} \\ \Rightarrow -S = \frac{\partial F}{\partial T} \quad \text{e} \quad \Rightarrow -M = \frac{\partial F}{\partial h} .$$

Nel limite termodinamico $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$, equivalente a $N \rightarrow +\infty$, possiamo definire la densità di energia libera:

$$f(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{F(T, h, N)}{N} \quad (2.7)$$

dove $\beta = \frac{1}{k_B T}$ è detta temperatura inversa. A sua volta possiamo definire la magnetizzazione per spin:

$$m(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{M(T, h, N)}{N} = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}$$

da cui

$$m(\beta, h) = - \frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h) . \quad (2.8)$$

Sarà lo studio di questa funzione che ci permetterà di spiegare le transizioni di fase e il suo diagramma.

Definiamo inoltre la suscettibilità magnetica:

$$\chi(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial m}{\partial h}(\beta, h) = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\beta, h) . \quad (2.9)$$

2.3 Fisica Statistica

Lo scopo della fisica statistica è quello di chiarire le proprietà macroscopiche di un sistema analizzando i microsistemi che lo compongono. Essa si pone quindi l'obiettivo di giustificare le leggi termodinamiche attraverso una descrizione aleatoria del comportamento e delle caratteristiche del sistema microscopico. Nel nostro caso vogliamo determinare la presenza di transizioni di fase grazie alla costruzione della funzione energia libera sulla base di un modello microscopico. L'elemento di base è la funzione Hamiltoniana, osservabile che rappresenta l'energia del sistema in termini microscopici, dalla quale deriviamo la funzione di partizione Z e quindi tutte le proprietà termodinamiche.

La magnetizzazione del sistema macroscopico è data dalla somma della magnetizzazione di tutti gli spins:

$$M(\sigma) = \sum_i \sigma_i .$$

Data la funzione Hamiltoniana

$$H(\sigma) = -J \underbrace{\sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j}_{H_0(\sigma)} - h \sum_i \sigma_i = H_0(\sigma) - hM(\sigma)$$

definiamo la funzione di partizione gran-canonica, che descrive un sistema a contatto con un reservoir di temperatura β e campo magnetico h :

$$Z(\beta, N, h) = \sum_{\sigma} \exp \left[-\beta [H_0(\sigma) - hM(\sigma)] \right] = \sum_{\sigma} \exp \left[-\beta H(\sigma) \right] \quad (2.10)$$

dove con \sum_{σ} notiamo la somma su tutte le possibili configurazioni di spins.

Definiamo l'energia libera nel quadro della fisica statistica come:

$$e^{-\beta F} = Z \quad \Leftrightarrow \quad F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (2.11)$$

e vediamo che essa può essere connessa alla definizione termodinamica.

Poiché la probabilità di una singola configurazione σ è data dalla misura di Gibbs $\frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z}$, grazie alla definizione probabilistica possiamo trovare il valore atteso di $M(\sigma)$ e $H(\sigma)$:

$$\langle M(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} \frac{M(\sigma) \exp[-\beta(H_0(\sigma) - hM(\sigma))]}{Z(\beta, N, h)} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h}$$

e

$$\langle H(\sigma) \rangle = \sum_{\sigma} \frac{H(\sigma) \exp[-\beta(H_0(\sigma) - hM(\sigma))]}{Z(\beta, N, h)}$$

che corrisponde alla seguente derivata:

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \sum_{\sigma} H(\sigma) e^{-\beta H(\sigma)} .$$

Possiamo anche scrivere:

$$\langle H(\sigma) \rangle = \langle H_0(\sigma) \rangle - h \langle M(\sigma) \rangle . \quad (2.12)$$

Per giungere alla conclusione dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial T} &= -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ &= -k_B \beta^2 \frac{1}{\beta^2} \ln Z - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{T} \left(-\frac{\ln Z}{\beta} + \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) \\ &= \frac{1}{T} (F - \langle H(\sigma) \rangle) . \end{aligned}$$

E in fine, utilizzando (2.12):

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\partial F}{\partial T} &= \frac{1}{T} \left[F - (\langle H_0(\sigma) \rangle - h \langle M(\sigma) \rangle) \right] \\ \Leftrightarrow F &= \langle H_0(\sigma) \rangle + T \frac{\partial F}{\partial T} - h \langle M(\sigma) \rangle . \end{aligned}$$

Quindi definendo l'entropia statistica $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ e identificando $\langle H_0(\sigma) \rangle = U$ e $\langle M(\sigma) \rangle = M$ otteniamo la relazione termodinamica:

$$F = U - TS - hM$$

da cui la connessione tra fisica statistica e termodinamica, e la giustificazione della definizione di energia libera secondo la fisica statistica data da (2.11).

In particolare potremo calcolare le proprietà termodinamiche direttamente dalla funzione di partizione gran-canonica.

Una relazione particolarmente utile è la seguente:

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_0 \rangle = m$$

dove per la prima identità abbiamo utilizzato l'invarianza per traslazione nel limite termodinamico. Per la seconda abbiamo:

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{1}{N} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} = \frac{1}{N} \langle M(\sigma) \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_0 \rangle .$$

Ecco quindi in sintesi come procederemo. Data la funzione Hamiltoniana:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

troveremo il valore della funzione di partizione:

$$Z(\beta, N, h) = \sum_{\sigma} \exp \left[-\beta H(\sigma) \right] .$$

In seguito ricaveremo la densità di energia libera nel limite termodinamico:

$$f(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{N} \frac{1}{\beta} \ln Z$$

da cui potremo ricavare le funzioni termodinamiche magnetizzazione per spin:

$$m(\beta, h) = -\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h)$$

e suscettibilità magnetica:

$$\chi(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial m}{\partial h}(\beta, h) = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\beta, h) .$$

Capitolo 3

L'approssimazione del campo medio

3.1 Introduzione

I grossi pregi di questo primo modello, proposto da P. Weiss nel 1907, sono la sua relativa semplicità e la sua duttilità in ogni dimensione. Pur non essendo un risultato esatto, ci permette di farci una prima idea sul fenomeno, costituendo così una buona introduzione ai modelli più complessi. Quando possibile, infatti, trovare una soluzione analitica esatta non è un compito così scontato. Ricorrere ad un'approssimazione si rivela di conseguenza uno stratagemma idoneo per ricavare un'espressione realistica dell'Hamiltoniana e della magnetizzazione, in modo da poterne studiare il comportamento. I limiti di validità di questo modello sono principalmente posti dal fatto che sfruttando il concetto probabilistico di valore atteso, vengono trascurate le fluttuazioni dei parametri fisici. L'errore commesso è quindi poco rilevante se il valore del parametro varia poco (varianza ridotta), mentre esso si fa già più consistente nei casi in cui il valore dei parametri varia molto. Non dobbiamo quindi attribuire a questo risultato un'importanza eccessiva, visto che per osservare la transizione di fase il nostro interesse si focalizza vicino al punto critico, dove le fluttuazioni sono importanti, ossia dove l'errore è maggiore.

3.2 Caso senza interazioni fra spins

Questo modello preliminare ci fornisce un esempio sul metodo di studio del fenomeno che seguiremo. Grazie alla sua semplicità abbiamo infatti l'opportunità di focalizzarci sulla strategia di risoluzione, senza doverci soffermare troppo sugli aspetti di calcolo. L'obiettivo di questa prima sezione è dunque quello di comprendere in che modo è possibile ricavare i parametri fisici del sistema, in particolare le funzioni $f(\beta, h)$ e $m(\beta, h)$.

Per prima cosa bisogna definire l'energia del sistema. Consideriamo il caso in cui posizioniamo gli spins sui punti di \mathbb{Z}^d e che non ci siano interazioni tra spins. La funzione Hamiltoniana sarà quindi solo data dall'interazione di ogni spin con il campo esterno h :

$$H(\sigma) = -h \sum_i \sigma_i. \quad (3.1)$$

Ora, ricordando che la funzione di partizione è così definita:

$$Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)}$$

possiamo calcolare il suo valore, osservando che per ogni spin $\sigma_i = \pm 1$:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} = \sum_{\sigma} e^{\beta h \sum_i \sigma_i} \\
&= \sum_{\sigma} e^{\beta h (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N)} \\
&= \sum_{\sigma} e^{\beta h \sigma_1} \cdot e^{\beta h \sigma_2} \cdot \dots \cdot e^{\beta h \sigma_N} \\
&= \overbrace{(e^{\beta h} + e^{-\beta h})}^{\sigma_1} \overbrace{(e^{\beta h} + e^{-\beta h})}^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \overbrace{(e^{\beta h} + e^{-\beta h})}^{\sigma_N} \\
&= (e^{\beta h} + e^{-\beta h})^N = [2 \cosh(\beta h)]^N .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Grazie alla funzione di partizione ricaviamo ora la densità di energia libera partendo dalla sua definizione:

$$\begin{aligned}
f(\beta, h) &= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln Z \\
&= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln [2 \cosh(\beta h)]^N \\
&= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 \cdot \ln [2 \cosh(\beta h)] \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta h)] .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Infine dal risultato precedente calcoliamo la magnetizzazione:

$$m(\beta, h) = -\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h) = -\frac{1}{\beta} \frac{1}{2 \cosh(\beta h)} 2 \sinh(\beta h) \cdot \beta = \tanh(\beta h) . \tag{3.4}$$

Abbiamo quindi visto che conoscendo l'Hamiltoniana del sistema, grazie alla funzione di partizione, siamo in grado di ricavare tutte le grandezze termodinamiche come ad esempio la magnetizzazione. Abbiamo di conseguenza la possibilità di studiare le loro variazioni in funzione delle grandezze intensive temperatura (inversa) β e campo magnetico h . Così facendo potremo spiegare l'esperienza iniziale.

3.3 Energia libera e magnetizzazione

Ora studieremo in dettaglio il modello del campo medio. Posizioniamo gli spins sui punti di \mathbb{Z}^d ottenendo così un reticolo di d dimensioni con proprietà magnetiche. Come nell'esempio precedente partiamo dalla definizione dell'Hamiltoniana, questa volta però considerando anche le interazioni fra spins, date dalla seconda somma, che si aggiunge all'interazione di ogni singolo spin con il campo magnetico esterno h :

$$H(\sigma) = -h \sum_i \sigma_i - J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j \tag{3.5}$$

dove con $\langle i, j \rangle$ intendiamo che la somma è solo sugli spins più prossimi vicini. Osserviamo nella figura 3.1 che ogni spin, oltre che dal campo esterno, è influenzato dai $q = 2^d$ spins vicini. Essi infatti generano un campo magnetico, detto molecolare. In complesso sul sito i avremo quindi un campo magnetico effettivo h_i .

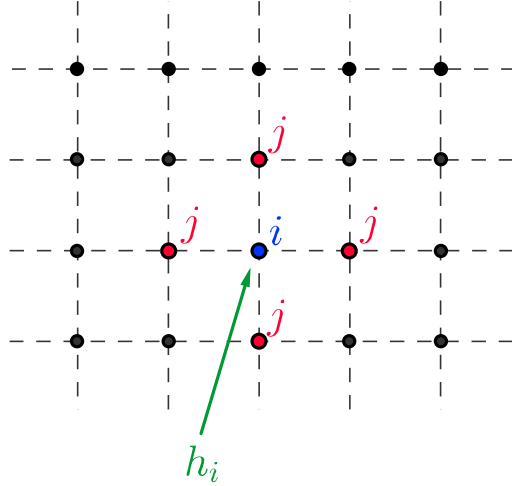


Figura 3.1: Sul sito i , in blu, influisce un campo h_i , in verde, composto dal campo esterno h e dal campo molecolare generato dai suoi più prossimi vicini j , in rosso.

Le caratteristiche del modello trattato nell'approssimazione del campo medio sono la sostituzione del campo molecolare nell'Hamiltoniana con il valore medio che esso assume in ogni sito del reticolo, e l'ipotesi che gli spins siano indipendenti:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle . \quad (3.6)$$

Procediamo quindi trovando l'Hamiltoniana in ogni singolo sito i :

$$H_i = -\sigma_i \left(h + \underbrace{J \sum_{j \in v_i} \sigma_j}_{\text{Campo molecolare}} \right) \quad \text{Campo effettivo } h_i$$

dove v_i è l'insieme degli spins vicini al punto i . Il campo molecolare è il campo generato da ogni spin j appartenente a v_i , mentre il campo effettivo h_i è tutto quello agente sul punto i .

Ora, rimpiazziamo il campo molecolare con il suo valore medio:

$$\langle J \sum_{j \in v_i} \sigma_j \rangle = J \sum_{j \in v_i} \underbrace{\langle \sigma_j \rangle}_m = Jqm$$

ricordando che q è il numero dei vicini e m la magnetizzazione. Inserendo questo risultato nella funzione iniziale otteniamo un'buona approssimazione, a cui aggiungiamo un valore K per far sì che i valori medi delle Hamiltoniane H e H_{CM} coincidano. Scriviamo quindi l'Hamiltoniana del campo medio nel seguente modo:

$$H_{\text{CM}}(\sigma) = - \sum_i \sigma_i \underbrace{(h + Jqm)}_{h_{\text{eff}}} + K = -h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i + K . \quad (3.7)$$

Per trovare il valore di K imponiamo dapprima $\langle H \rangle = \langle H_{\text{CM}} \rangle$, poi utilizziamo l'indipendenza degli spins (3.6):

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= -h \sum_i \langle \sigma_i \rangle - J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \\ &= -h \sum_i \langle \sigma_i \rangle - J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \\ &= -hNm - Jm^2 N \frac{q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle H_{\text{CM}} \rangle &= -h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i + K \\ &= -(h + Jqm) Nm + K \\ &= -hNm - Jqm^2 N + K\end{aligned}$$

da cui

$$Jm^2 N \frac{q}{2} = Jqm^2 N + K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{JqNm^2}{2} .$$

L'espressione dell'Hamiltoniana nell'approssimazione del campo medio è quindi:

$$H_{\text{CM}}(\sigma) = -h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i + \frac{JqNm^2}{2} . \quad (3.8)$$

Notiamo che nella formula che abbiamo ricavato è presente m . Procederemo con questa approssimazione calcolando le proprietà del sistema e mantenendo m come variabile interna. Così facendo ricaveremo una funzione $m(\beta, h, m)$ dalla quale, attraverso il suo studio, sarà possibile trovare tutti i possibili valori di m .

Definiamo e calcoliamo quindi la funzione di partizione nell'approssimazione del campo medio:

$$\begin{aligned}Z_{\text{CM}} &= \sum_{\sigma} e^{-\beta H_{\text{CM}}(\sigma)} \\ &= \sum_{\sigma} \exp \left[-\beta \left(-h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i + K \right) \right] \\ &= e^{-\beta K} \sum_{\sigma} \exp \left[\beta h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i \right]\end{aligned}$$

e ponendo $Z_0 = \sum_{\sigma} \exp \left(\beta h_{\text{eff}} \sum_i \sigma_i \right)$, che equivale alla soluzione della sezione 3.2, otteniamo:

$$Z_{\text{CM}} = e^{-\beta K} Z_0 . \quad (3.9)$$

Ora possiamo calcolare la densità di energia libera nell'approssimazione del campo medio:

$$\begin{aligned}f_{\text{CM}}(\beta, h) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\beta N} \ln(Z_{\text{CM}}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\beta N} \ln(e^{-\beta K}) - \frac{1}{\beta N} \ln(Z_0) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{JqNm^2}{2N} - \frac{N}{\beta N} \ln[2 \cosh(\beta h_{\text{eff}})] \\ &= \frac{Jqm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta h + \beta Jqm)] . \quad (3.10)\end{aligned}$$

Nell'approssimazione del campo medio la magnetizzazione è data da:

$$m_{\text{CM}}(\beta, h) = -\frac{\partial f_{\text{CM}}}{\partial h}(\beta, h) = -\frac{\beta}{2} \frac{2 \sinh(\beta h + \beta J q m)}{2 \cosh(\beta h + \beta J q m)} = \tanh(\beta h + \beta J q m) \quad (3.11)$$

dove m in (3.10) e (3.11) è il valore della magnetizzazione nell'approssimazione del campo medio m_{CM} .

Notiamo che nel seguito non specificheremo più $_{\text{CM}}$, sottintendendo che tutte le grandezze sono calcolate a partire dall'Hamiltoniana H_{CM} , ossia utilizzando l'approssimazione del campo medio.

3.4 Energia libera di Helmholtz e teoria di Landau

Per lo studio della stabilità degli stati ottenuti dalla soluzione dell'equazione:

$$m = \tanh(\beta h + \beta J q m)$$

è necessario determinare l'energia libera in funzione di m , otteniamo così la cosiddetta energia libera di Helmholtz, notata $\tilde{f}(\beta, m)$. Per determinare $\tilde{f}(\beta, m)$ procediamo nel modo seguente: per inversione di $m = \tanh(\beta h + \beta J q m)$ determiniamo innanzitutto l'equazione di stato $h = h(\beta, m)$ e poi per trasformata di Legendre:

$$\tilde{f}(\beta, m) = f(\beta, h(\beta, m)) + h(\beta, m)m. \quad (3.12)$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$h(\beta, m) = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh}(m) - J q m$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\beta, m) &= \frac{J q m^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\operatorname{arctanh}(m))] + \frac{1}{\beta} m \operatorname{arctanh}(m) - J q m^2 \\ &= -\frac{J q m^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln \left(2 \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \right) + \frac{1}{\beta} m \operatorname{arctanh}(m) \\ &= -\frac{J q m^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{1}{\beta} \ln (\sqrt{1-m^2}) + \frac{1}{\beta} m \operatorname{arctanh}(m). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Gli stati di equilibrio saranno classificati come segue, e sono una diretta conseguenza del secondo principio della termodinamica, formulato per l'energia libera di Helmholtz:

- i valori di m per i quali $\tilde{f}(\beta, m)$ è un minimo relativo coincidono con uno stato di equilibrio stabile;
- i valori di m per i quali $\tilde{f}(\beta, m)$ è un massimo relativo coincidono con uno stato di equilibrio instabile.

Da notare che gli estremi relativi coincidono con le soluzioni di $\frac{\partial \tilde{f}(\beta, m)}{\partial m} = 0$, che per costruzione sono dati da:

$$0 = \frac{\partial \tilde{f}(\beta, m)}{\partial m} = h(\beta, m).$$

Infatti, scrivendo esplicitamente il differenziale:

$$d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}(\beta, m)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \tilde{f}(\beta, m)}{\partial m} dm$$

e confrontando con (3.12) otteniamo quanto affermato.

Questo risultato mostra che gli estremi relativi di $\tilde{f}(\beta, m)$ coincidono con le soluzioni di:

$$m = \tanh(\beta J q m)$$

ossia dell'equazione $m = \tanh(\beta h + \beta J q m)$ con $h = 0$, mentre la loro stabilità dipende dal tipo di estremo.

Nel caso generale dobbiamo far capo alla teoria di Landau, che introduce un potenziale termodinamico generalizzato:

$$f^L(\beta, m, h) = \tilde{f}(\beta, m) - hm \quad (3.14)$$

dove m non è necessariamente il valore della magnetizzazione all'equilibrio, ma è considerata una variabile indipendente e il valore all'equilibrio è ottenuto risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial f^L}{\partial m} = 0. \quad (3.15)$$

Osserviamo che la condizione dell'equazione (3.15) coincide con:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial m} - h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh}(m) - J q m - h = 0$$

ossia

$$m = \tanh(\beta h + \beta J q m).$$

Ritroviamo quindi i valori della magnetizzazione all'equilibrio nel caso $h \neq 0$.

Gli stati di equilibrio saranno classificati in modo analogo al caso precedente, ma sulla base del potenziale termodinamico di Landau:

- i valori di m per i quali $f^L(\beta, m, h)$ è un minimo relativo coincidono con uno stato di equilibrio stabile;
- i valori di m per i quali $f^L(\beta, m, h)$ è un massimo relativo coincidono con uno stato di equilibrio instabile.

Da osservare che l'ipotesi cruciale della teoria di Landau (1937) è l'esistenza di un potenziale termodinamico generalizzato, funzione del parametro d'ordine (nel nostro caso la magnetizzazione m), come nell'equazione (3.14), e che esso sia sviluppabile in serie di Taylor in funzione di questo parametro e gli estremi corrispondono agli stati di equilibrio. In generale il potenziale dipenderà pure da alcuni parametri intensivi (nel nostro caso la temperatura (inversa) β e il campo magnetico h). Infine la parte in campo nullo deve riflettere le simmetrie del sistema nella fase ad alta temperatura (nel nostro caso vale $f^L(\beta, m, h = 0) = f^L(\beta, -m, h = 0)$ e la trasformazione $m \rightarrow -m$ è una simmetria del problema ad alta temperatura, non vi è infatti una direzione privilegiata).

3.5 Studio del caso $h = 0$

3.5.1 Magnetizzazione ed equilibrio

Ora cercheremo di studiare il comportamento delle funzioni ricavate matematicamente e di trovare una spiegazione fisica: dato che la magnetizzazione dipende dal campo esterno e dalla temperatura, dovremo procedere per casi, fissando prima una variabile, poi l'altra.

In assenza del campo esterno ($h = 0$), $m(\beta, h = 0)$ e $\tilde{f}(\beta, m) = f^L(\beta, m, h = 0)$ possono essere scritte come:

$$m = \tanh(\beta J q m) \quad (3.16)$$

e

$$\tilde{f}(\beta, m) = -\frac{J q m^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{1}{\beta} \ln(\sqrt{1 - m^2}) + \frac{1}{\beta} m \operatorname{arctanh}(m). \quad (3.17)$$

La prima equazione può essere risolta mediante un grafico ponendo $\alpha = \beta J q m$ e tracciando le funzioni:

$$\tanh \alpha \quad \text{e} \quad m(\alpha, T) = \frac{\alpha}{\beta J q}$$

sappiamo infatti che troveremo i valori di m che risolvono entrambe le equazioni nei punti d'intersezione delle due funzioni.

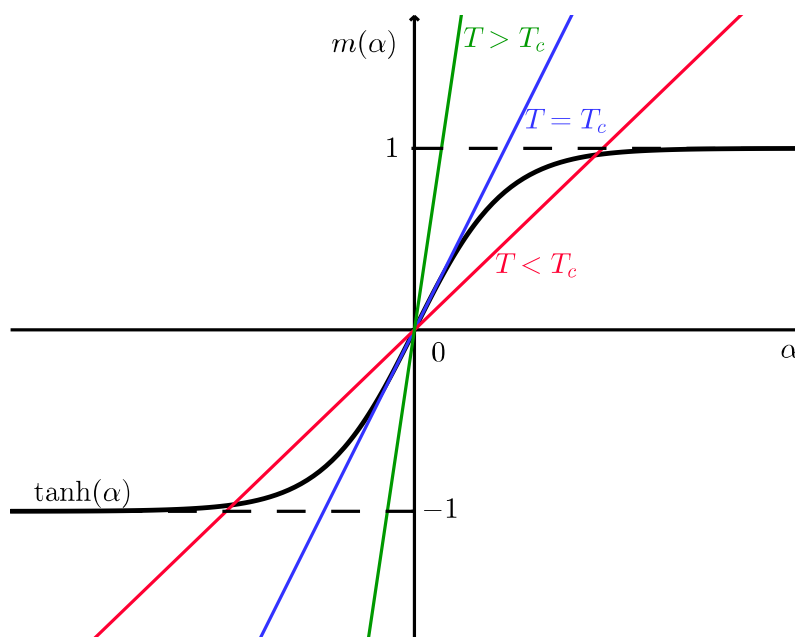


Figura 3.2: Soluzione grafica per determinare la magnetizzazione nel caso $h = 0$.

Vediamo dal grafico della figura 3.2 che le due funzioni si intersecano sempre in $m = 0$, mentre a dipendenza della pendenza della retta, ci possono essere altre due soluzioni simmetriche $\pm m^*$. Visto che la pendenza della retta dipende dalla temperatura, possiamo calcolare il valore della temperatura a partire dal quale ci sono tre punti d'intersezione. Questa temperatura è nota come temperatura di Curie T_c . Riconsiderando la funzione senza cambio di variabile, possiamo tracciare sul medesimo grafico l'identità e la funzione:

$$g(m) = \tanh(\beta J q m). \quad (3.18)$$

Dato che se la pendenza della tangente $g'(m)$ in $m = 0$ è minore di uno c'è solo una soluzione, mentre se è maggiore di uno ci sono tre soluzioni, sappiamo che nel caso in cui

$g'(0) = 1$ ci troviamo nel punto critico. Possiamo perciò ottenere la temperatura di Curie T_c nel modo seguente:

$$g'(m) = [1 - \tanh(\beta J q m)] \beta J q = 1$$

e ponendo $m = 0$:

$$g'(0) = [1 - \tanh(0)] \beta J q = \beta J q = \frac{1}{k_B T} q J = 1$$

da cui:

$$T = T_c = \frac{Jq}{k_B}. \quad (3.19)$$

Possiamo quindi riassumere ciò che vediamo nella figura 3.2:

- se $\underbrace{\frac{Jq}{k_B T}}_{\text{pendenza} < 1} < 1$, ossia $T > T_c$: solo una soluzione ($m = 0$);
- se $\underbrace{\frac{Jq}{k_B T}}_{\text{pendenza} > 1} > 1$, ossia $T < T_c$: tre soluzioni ($m = 0, m = \pm m^*$).

Ora proviamo a studiare la funzione $\tilde{f}(\beta, m)$ per studiare la stabilità delle soluzioni trovate. Possiamo riscrivere $\tilde{f}(\beta, m)$ come segue:

$$\tilde{f}(\beta, m) = \beta^{-1} \left[-\frac{\beta}{\beta_c} \frac{m^2}{2} - \ln 2 + \ln(\sqrt{1 - m^2}) + m \operatorname{arctanh}(m) \right]$$

dove $\beta_c = \frac{1}{k_B T_c} = \frac{1}{Jq}$.

Osserviamo che la funzione è continua e che possiede due asintoti verticali in $m = \pm 1$ e $\lim_{m \rightarrow \pm 1} \tilde{f}(\beta, m) = +\infty$. Come vediamo nelle figure 3.3 e 3.4, possiamo concludere che:

- se $T < T_c$, allora i valori $m = \pm m^*$ coincidono con dei minimi locali di \tilde{f} e caratterizzano degli stati di equilibrio stabile, mentre $m = 0$ è un massimo locale di \tilde{f} e caratterizza uno stato di equilibrio instabile;
- se $T > T_c$, allora il valore $m = 0$ è un minimo locale di \tilde{f} e caratterizza quindi uno stato di equilibrio stabile.

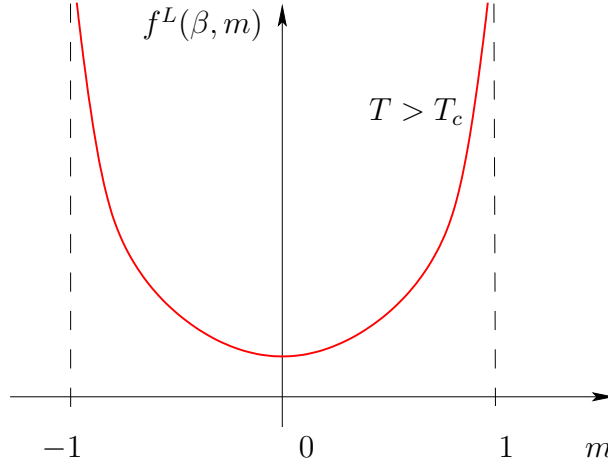


Figura 3.3: Energia libera di Landau, che coincide con l'energia libera di Helmholtz, nel caso $h = 0$ e $T > T_c$. Osserviamo l'esistenza di un solo minimo per $m = 0$.

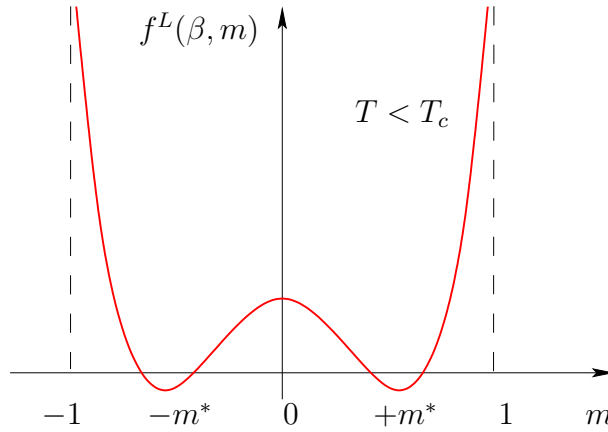


Figura 3.4: Energia libera di Landau, che coincide con l'energia libera di Helmholtz, nel caso $h = 0$ e $T < T_c$. Osserviamo i due minimi per $m = \pm m^*$ e un massimo per $m = 0$.

3.5.2 Esponenti critici

Se ragioniamo in termini fisici, ci accorgiamo che quando la temperatura aumenta anche l'agitazione termica cresce, di conseguenza la magnetizzazione diminuisce. In prossimità di T_c possiamo pertanto calcolare quest'ultimo parametro in modo approssimato grazie agli sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned}
 m = \tanh(\beta J q m) &\approx \beta J q m - \frac{1}{3}(\beta J q m)^3 + \dots \\
 \Rightarrow m - \beta J q m &\approx -\frac{1}{3}(\beta J q m)^3 \\
 \Leftrightarrow m(\beta J q - 1) &\approx \frac{1}{3}(\beta J q m)^3 \\
 \Leftrightarrow m &\approx \sqrt[3]{\frac{\beta J q - 1}{(\beta J q)^3}} \\
 &\approx \frac{\sqrt{3}}{\beta J q} \sqrt{1 - \frac{1}{\beta J q}}.
 \end{aligned}$$

E utilizzando (3.19) otteniamo:

$$m \approx \sqrt{3} \frac{T}{T_c} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{T_c^3}} T (T_c - T)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.20)$$

Il comportamento della magnetizzazione vicino al punto critico è del tipo $m(T) \sim (T_c - T)^\beta$ e l'esponente β (da non confondere con la temperatura inversa) è un numero frazionario. Il risultato dell'equazione (3.20) ci rivela l'esponente critico della magnetizzazione per il campo medio: $\beta_{\text{CM}} = \frac{1}{2}$.

Al punto critico di ogni sistema che presenta una transizione di fase ci sono alcuni parametri fisici che divergono, è il caso della suscettibilità magnetica, infatti vicino al punto critico abbiamo:

$$\chi(T) \approx \begin{cases} \frac{1}{k_B(T-T_c)} & T > T_c \\ -\frac{1}{2k_B(T-T_c)} & T < T_c \end{cases}$$

da cui possiamo dedurre l'esponente critico $\gamma^{(l)}$ per la suscettibilità magnetica:

$$\chi(T) \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\gamma} & T > T_c \\ (T_c - T)^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases}$$

ossia $\gamma = \gamma' = 1$.

Riportiamo ora gli esponenti critici sperimentali della soluzione del campo medio, della soluzione esatta a 2 dimensioni e del caso a 3 dimensioni.

Definizione	Valori sperimentali	Campo Medio	Ising 2D	Ising 3D
$m \sim (T_c - T)^\beta$	$\beta \in [0.32, 0.39]$	$\beta = 1/2$	$\beta = 1/8$	$\beta \approx 5/16$
$\chi \sim \begin{matrix} (T - T_c)^{-\gamma} \\ (T_c - T)^{-\gamma'} \end{matrix}$	$\gamma = \gamma' \in [1.3, 1.4]$	$\gamma = \gamma' = 1$	$\gamma = \gamma' = 7/4$	$\gamma = \gamma' = 5/4$

Tabella 3.1: Esponenti critici per la magnetizzazione e la suscettibilità magnetica.

3.5.3 Rottura spontanea di simmetria

Abbiamo visto come gli spins hanno una direzione privilegiata al di sotto della temperatura di Curie, mentre essi assumono una configurazione casuale quando la temperatura è maggiore. A livello macroscopico osserviamo appunto la comparsa spontanea della magnetizzazione quando il sistema raggiunge temperature inferiori a T_c . Nelle transizioni di fase continue il passaggio da una conformazione ordinata a una disordinata è detto rottura spontanea di simmetria.

Possiamo ricavare questo aspetto considerando l'Hamiltoniana senza interazioni del campo esterno:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j .$$

Così facendo possiamo costruire un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2 :

$$G = \{\emptyset, I = \text{inversione di tutte le configurazioni}\} .$$

G è chiamato gruppo di invarianza di H perché sia che lasciamo tutti gli spins come sono, sia che li invertiamo tutti, il valore di H non cambia. Non rimane invece sempre invariato ciò che osserviamo dal punto di vista fisico:

$$\text{Se } T > T_c \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad I(\text{fis}) = \text{fis}$$

$$\text{Se } T < T_c \quad \Rightarrow \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad I(\text{fis}) = -\text{fis} .$$

Dunque risulta che la magnetizzazione m è il parametro d'ordine della transizione ferro-paramagnetica perché determina la rottura spontanea di simmetria:

$m = 0$ ad alta temperatura, situazione con simmetria.

$m \neq 0$ a bassa temperatura, situazione con simmetria rotta.

3.6 Studio del caso $h \neq 0$

Ora cercheremo di sviluppare questo modello considerando anche un campo magnetico esterno che influisce sul cristallo. Anche in questo caso il sistema più semplice per risolvere l'equazione consiste nell'analisi della rappresentazione grafica. Poniamo:

$$m = \tanh(\alpha) \quad \text{dove} \quad \alpha = \beta h + \beta J q m \quad (3.21)$$

quindi possiamo scrivere:

$$m = \frac{\alpha - \beta h}{\beta J q} = \frac{T}{T_c} \alpha - \frac{h}{k_B T_c} \quad (3.22)$$

ancora una volta utilizzando (3.19) nell'ultimo passaggio. Così facendo, otteniamo due funzioni di α che descrivono la magnetizzazione facilmente studiabili: una tangente iperbolica e una retta di pendenza $\frac{T}{T_c}$ e ordinata all'origine $-\frac{h}{k_B T_c}$. Esse dipendono sia dalla temperatura, sia dal campo esterno, per analizzarle dovremo quindi procedere fissando prima un parametro, poi l'altro.

Osserviamo che i casi $h > 0$ e $h < 0$ sono simmetrici, è quindi sufficiente studiare il caso $h > 0$.

3.6.1 Caso $T > T_c$

Come vediamo dal grafico della figura 3.5, se fissiamo la temperatura ponendo $T > T_c$ la pendenza della retta è maggiore a 1, quindi maggiore della derivata di $\tanh \alpha$ per ogni α :

$$0 \leq \frac{d \tanh \alpha}{d \alpha} = 1 - \underbrace{(\tanh \alpha)^2}_{\in [-1;1]} \leq 1 .$$

Poiché la retta interseca la tangente una sola volta, in questo caso c'è una sola soluzione e un unico estremo della funzione f^L . Dal fatto che la funzione f^L possiede due asintoti verticali in $m = \pm 1$ e $\lim_{m \rightarrow \pm \infty} f^L(\beta, m, h) = +\infty$, deduciamo che la soluzione m trovata è necessariamente un minimo.

Osserviamo pure che $m(h)$ è una funzione continua di h , monotona, crescente dal valore $m(h = 0) = 0$ al valore asintotico $\lim_{h \rightarrow +\infty} m(h) = 1$ (variando h varia l'ordinata all'origine per β fissato).

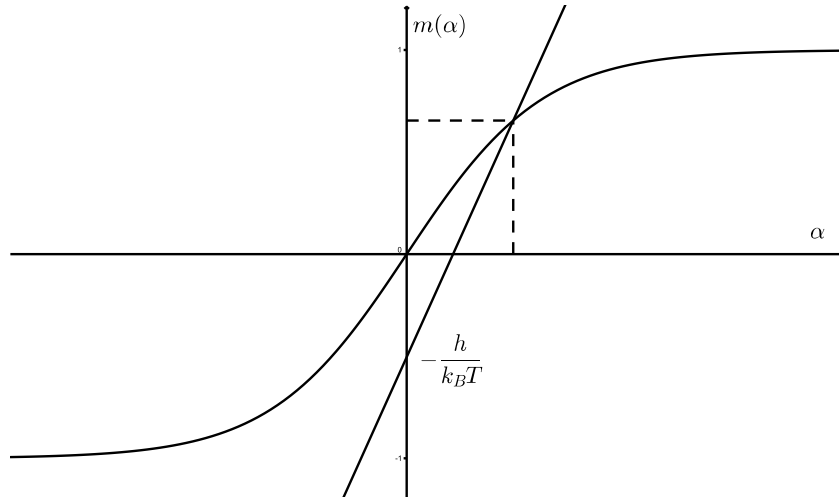


Figura 3.5: Soluzione grafica per determinare la magnetizzazione nel caso $h \neq 0$ e $T > T_c$.

3.6.2 Caso $T < T_c$

Nel caso $T < T_c$, al contrario del precedente, la pendenza della retta è inferiore a 1. Dall'osservazione del grafico della figura 3.6 deduciamo che se h è molto grande, ossia maggiore di un h_0 , la retta interseca la tangente iperbolica solo in un punto. Quando h diminuisce raggiungendo il valore h_0 , compare un'altra intersezione, in questo caso la retta è tangente alla tangente iperbolica. Infine, quando $h < h_0$, ci sono tre punti d'intersezione.

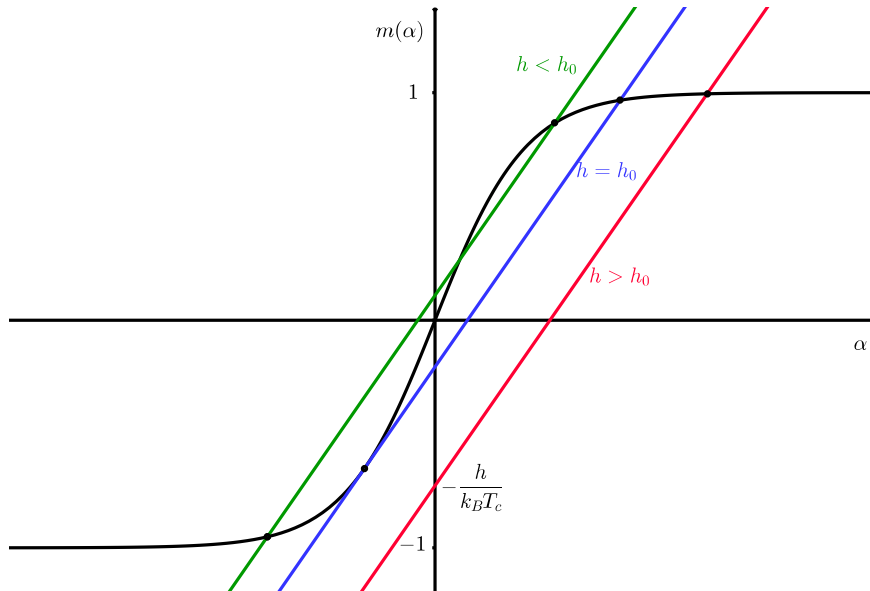


Figura 3.6: Soluzione grafica per determinare la magnetizzazione nel caso $h \neq 0$ e $T < T_c$.

Per trovare h_0 dobbiamo prima trovare l'equazione della retta R_0 che interseca la tangente in soli due punti, poi, sapendo che R_0 taglia l'asse O_y nel punto $(0, -\frac{h_0}{k_B T_c})$, ricaveremo il risultato cercato. Innanzitutto proviamo ad esprimere l'equazione della retta di cui conosciamo la pendenza:

$$(y - y_0) = \frac{T}{T_c}(\alpha - \alpha_0) .$$

Calcoliamo la tangente della curva ed eguagliamola alla pendenza trovata in (3.22) e risolviamo l'equazione:

$$\frac{d \tanh \alpha}{d \alpha} = 1 - \tanh^2 \alpha = \frac{T}{T_c} \Leftrightarrow \tanh \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctanh} \left(\pm \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right)$$

e considerando il punto di coordinate (α_0, y_0) sulla tangente iperbolica (vedi grafico della figura 3.7) riscontriamo un'altra importante relazione:

$$\tanh \alpha_0 = \pm \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} = y_0 . \quad (3.23)$$

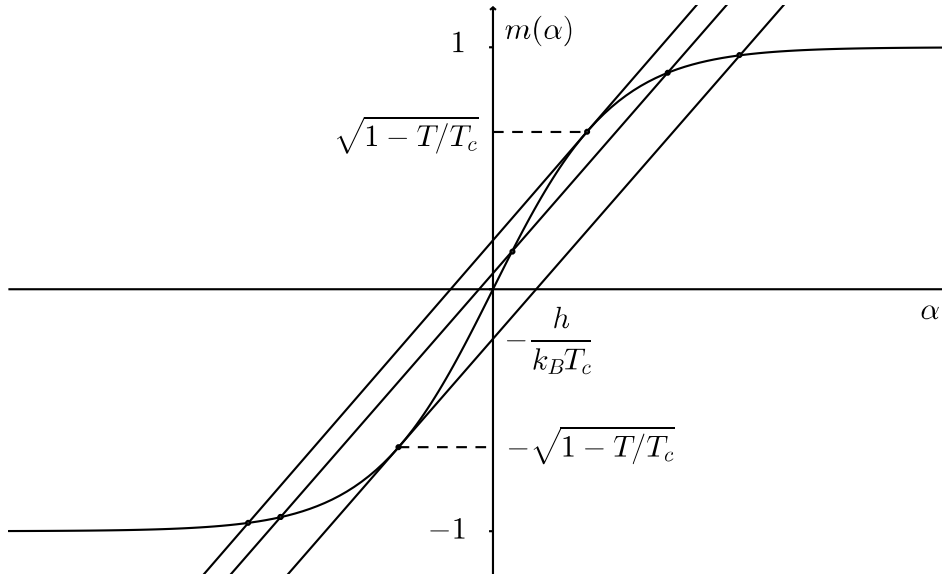


Figura 3.7: Determinazione con l'ausilio del grafico del valore di h_0 .

Utilizzando la soluzione negativa di (3.23) otteniamo l'equazione della retta tangente:

$$y + \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} = \frac{T}{T_c} \left(\alpha + \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right) .$$

Ricordando l'equazione (3.22) otteniamo per $\alpha = 0$ l'ordinata all'origine $m(0) = -\frac{h_0}{k_B T_c}$, quindi sostituendo questi valori nell'equazione della retta ricaviamo h_0 :

$$\begin{aligned} -\frac{h_0}{k_B T_c} &= -\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} + \frac{T}{T_c} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right) \\ h_0 &= k_B T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} - k_B T \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Riassumendo:

- se $h > h_0$ c'è una sola soluzione $m_0 > 0$;
- se $h = h_0$ ci sono due soluzioni, una positiva m_+ , l'altra negativa m_- ;
- se $h < h_0$ ci sono tre soluzioni $m_1 < 0$, $m_3 < 0$ e $m_2 > 0$.

Notiamo pure che tutti i valori della magnetizzazione trovati sono funzioni continue e crescenti in h per ogni $h > 0$.

Studiamo la funzione $f^L(\beta, m, h)$ nel dettaglio. Come nel caso precedente la funzione f^L possiede due asintoti verticali in $m = \pm 1$ e $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} f^L(\beta, m, h) = +\infty$. Quindi:

- se $h > h_0$, essendoci una sola soluzione, deduciamo che m_0 è un minimo di f^L ;
- se $h = h_0$, dovendoci essere un minimo il secondo punto è un flesso, e, per continuità, m_+ è un minimo mentre il flesso coincide con m_- ;
- se $h < h_0$, dovendoci essere un minimo e conoscendo il caso $h = 0$, dovremo avere due minimi relativi in m_1 e m_2 e un massimo in m_3 ;

da cui deduciamo la stabilità.

Dal grafico della figura 3.8 notiamo che nel caso $0 < h < h_0$ il minimo di f^L situato nei valori positivi della magnetizzazione è assoluto: esso è minore rispetto a quello situato nei valori negativi. Sarà quindi esso che determinerà la magnetizzazione d'equilibrio del sistema, dato che, come abbiamo osservato nella sezione 3.4, i sistemi tendono a stabilizzarsi dove il potenziale f^L è minore. Come abbiamo visto nella sezione 3.5.1, la magnetizzazione non si annulla con l'azzerarsi del campo esterno, bensì i due minimi si eguagliano per valori opposti $-m^*$ e $+m^*$. Se il campo esterno diventa negativo, avremo la situazione inversa: il minimo assoluto di f^L sarà quello situato nei valori negativi. Se tracciamo la funzione $m(T, h)$ in funzione di h con $T < T_c$ fissata, otteniamo una curva simmetrica discontinua in $h = 0$ (vedi figura 3.9).

La presenza di un minimo relativo di f^L nel caso $|h| < h_0$, ci porta a ipotizzare l'esistenza di stati metastabili: un sistema con spins inizialmente orientati verso l'alto grazie a un campo esterno positivo, non è detto che in seguito all'inversione del campo esterno cambi anch'esso direzione. Finché esisterà un minimo relativo di f^L , ovvero sia fintantoché $|h| < h_0$, è infatti possibile che il sistema mantenga la magnetizzazione iniziale, nonostante il campo esterno cambi segno. Quando quest'ultimo diventerà troppo importante, ovvero quando $|h| > h_0$, il sistema balzerà nello stato di magnetizzazione dettato dal minimo assoluto di f^L : il suo autentico stato d'equilibrio.

Proviamo a dimostrare matematicamente che la magnetizzazione spontanea è determinata dal campo esterno. Abbiamo:

$$\begin{aligned} f^L(\beta, m, h) &= \tilde{f}(\beta, m) - hm \\ &= -\frac{Jqm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{1}{\beta} \ln(\sqrt{1-m^2}) + \frac{1}{\beta} m \operatorname{arctanh}(m) - hm. \end{aligned}$$

Ora supponiamo $h > 0$ e siano $m_1 < 0$ e $m_2 > 0$ le due soluzioni di (3.21) per le quali f^L è minima. Dal grafico della figura 3.7 sappiamo che:

$$\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} < |m_1| < |m_2| < 1. \quad (3.25)$$

Poiché m_i ($i = 1, 2$) sono soluzioni di (3.21) deve valere:

$$h = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctan}(m_i) - Jqm_i.$$

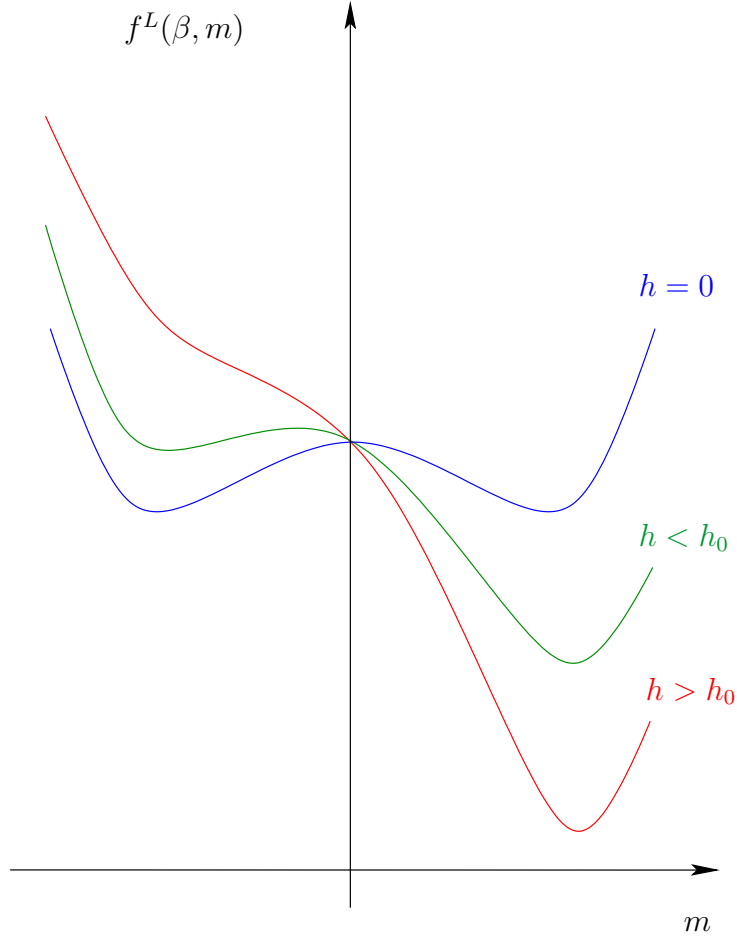


Figura 3.8: Energia libera di Landau in funzione della magnetizzazione a temperatura fissata minore della temperatura critica ($T < T_c$), per diversi valori del campo esterno.

Quindi:

$$f^L(\beta, m_i, h) = \frac{Jqm_i^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{1}{\beta} \ln \left(\sqrt{1 - m_i^2} \right) .$$

Consideriamo ora f^L come funzione di $u = m_i^2$:

$$f^L(u) = -\frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{1}{2\beta} \left[\frac{\beta}{\beta_c} u + \ln(1 - u) \right]$$

ora:

$$\frac{\partial f^L}{\partial u} = \frac{1}{2\beta_c} - \frac{1}{2\beta} \frac{1}{1 - u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1 - \frac{T}{T_c} .$$

Quindi sappiamo che $f^L(u)$ è decrescente per $1 - \frac{T}{T_c} < u < 1$, ossia per $1 - \frac{T}{T_c} < m_i^2 < 1$, o ancora per:

$$\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} < |m_i| < 1$$

da cui, utilizzando (3.25):

$$f^L(m_2) < f^L(m_1) .$$

Possiamo quindi concludere che la direzione privilegiata degli spins è quella del campo magnetico esterno, infatti:

- se $h > 0$ il minimo assoluto di f si trova in $m_2 > 0$;
- se $h < 0$ il minimo assoluto di f si trova in $m_1 < 0$.

3.7 Conclusione

Malgrado la grande semplificazione dovuta all'approssimazione e alla conseguente inaccuratezza dei risultati, abbiamo visto che con il modello del campo medio siamo in grado di descrivere entrambe le transizioni di fase. Come vediamo nella figura 3.9, infatti, la magnetizzazione presenta una discontinuità in $h = 0$ per $T < T_c$, da cui la transizione di I ordine, mentre per $T = T_c$ la magnetizzazione presenta un punto di flesso verticale in $h = 0$: la suscettibilità magnetica diverge e la magnetizzazione si annulla, da cui la transizione di fase continua.

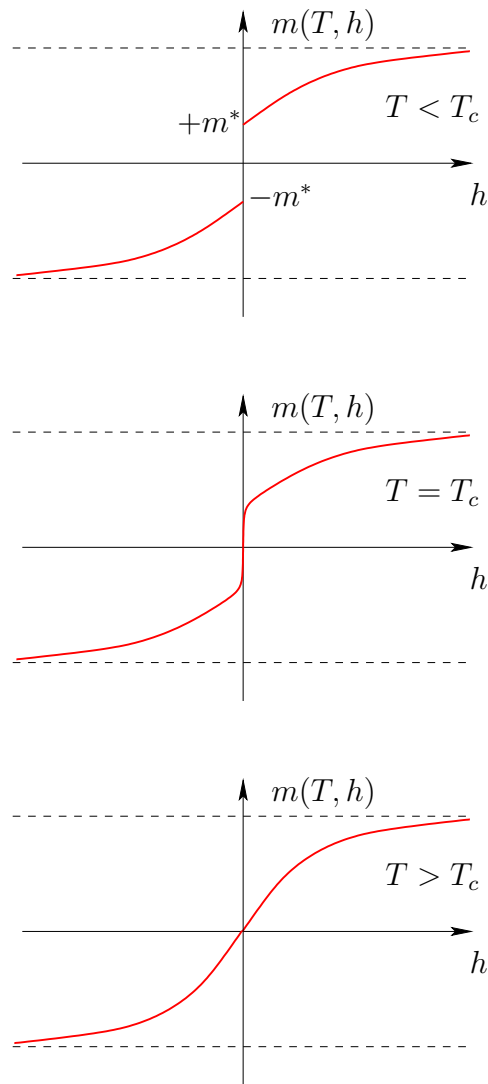


Figura 3.9: Comportamento della magnetizzazione in funzione del campo esterno. Per $h = 0$ riconosciamo le soluzioni stabili $m = 0$, per $T > T_c$, e $m = \pm m^*$, per $T < T_c$.

Capitolo 4

Soluzione esatta a una dimensione

4.1 Energia libera e magnetizzazione

Nel caso unidimensionale consideriamo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^1$ come una catena di N spins equidistanti dalle estremità unite, così che, come vediamo nella figura 4.1, l'atomo 1 e quello $N + 1$ coincidono (scegliamo quindi le condizioni al bordo periodiche). Ognuno di questi possiede uno spin di valore $\sigma_i = \pm 1$, che interagisce con i due più prossimi vicini e con il campo esterno h .

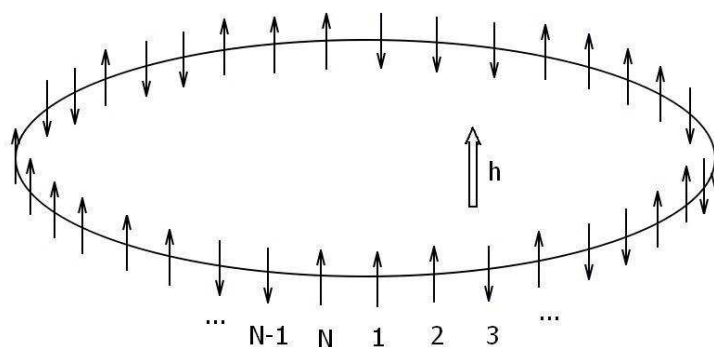


Figura 4.1: Catena di N spins che rappresenta le condizioni al bordo periodiche del modello di Ising a una dimensione. Ogni spin interagisce con i suoi due più prossimi vicini e con il campo esterno h , nel quale è posto l'insieme.

Anche in questo caso partiamo dall'Hamiltoniana completa:

$$H(\sigma) = \underbrace{-h \sum_i \sigma_i}_{H \text{ campo esterno}} \quad \underbrace{-J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j}_{H \text{ interazioni tra spin}} \quad (4.1)$$

dove, lo ricordiamo, con $\langle i, j \rangle$ intendiamo gli spins più prossimi vicini.

Viste le condizioni al bordo periodiche, l'Hamiltoniana (4.1) può essere scritta nel seguente modo:

$$H(\sigma) = - \sum_{i=1}^N (h\sigma_i + J\sigma_i\sigma_{i+1}) \quad (4.2)$$

dove, avendo identificato i siti $N + 1 = 1$, abbiamo $\sigma_{N+1} = \sigma_1$.

Possiamo ora esprimere la funzione di partizione Z partendo dalla sua definizione:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp \left[\beta \sum_{i=1}^N (h\sigma_i + J\sigma_i\sigma_{i+1}) \right] \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp \left[\beta \sum_{i=1}^N \left(h \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} + J\sigma_i\sigma_{i+1} \right) \right] \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{i=1}^N \exp \left[\beta \left(h \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2} + J\sigma_i\sigma_{i+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

dove per la penultima uguaglianza, sapendo che $N + 1 = 1$, abbiamo utilizzato:

$$\sum_{i=1}^N [k_1(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + k_2\alpha_i\alpha_{i+1}] = \sum_{i=1}^N [2k_1\alpha_i + k_2\alpha_i\alpha_{i+1}]$$

con k_1, k_2 delle costanti. Per calcolare Z procediamo ponendo:

$$\mathcal{T}(\sigma_i, \sigma_j) = \exp \left[\beta \left(h \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} + J\sigma_i\sigma_j \right) \right]. \quad (4.3)$$

In questo modo la funzione di partizione Z può essere scritta come:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{i=1}^N \mathcal{T}(\sigma_i, \sigma_{i+1}) \\
&= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \mathcal{T}(\sigma_1, \sigma_2) \mathcal{T}(\sigma_2, \sigma_3) \cdots \mathcal{T}(\sigma_N, \sigma_1). \quad (4.4)
\end{aligned}$$

I possibili valori di $\mathcal{T}(\sigma_i, \sigma_j)$ possono essere considerati gli elementi di una matrice 2×2 , notata \mathbb{T} , identica per ogni coppia σ_i, σ_j : $(\mathbb{T})_{\sigma_i\sigma_j} = \mathcal{T}(\sigma_i, \sigma_j)$:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}(1, 1) & \mathcal{T}(1, -1) \\ \mathcal{T}(-1, 1) & \mathcal{T}(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

\mathbb{T} è chiamata *transfer matrix*.

Vediamo quindi che (4.4) equivale alla definizione di prodotto di matrice, infatti:

$$\sum_{\sigma_j} (\mathbb{T})_{\sigma_i\sigma_j} (\mathbb{T})_{\sigma_j\sigma_k} = (\mathbb{T}^2)_{\sigma_i\sigma_k}.$$

E poiché $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, il calcolo di Z è ridotto alla traccia della transfer matrix elevata a N :

$$Z = \sum_{\sigma_1} (\mathbb{T}^N)_{\sigma_1\sigma_1} = \text{Tr}(\mathbb{T}^N). \quad (4.6)$$

La nostra matrice \mathbb{T} è uguale alla sua trasposta ed è a coefficienti reali, quindi, grazie ad un teorema di algebra lineare, sappiamo che possiamo diagonalizzare \mathbb{T} :

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}^t \Rightarrow \mathbb{T} = S^{-1}DS.$$

con D una matrice diagonale. Questa uguaglianza ci permetterà di proseguire con il calcolo di Z , infatti grazie ad essa possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
Z = \text{Tr}(\mathbb{T}^N) &= \text{Tr}((S^{-1}DS)^N) \\
&= \text{Tr}(\underbrace{S^{-1}DS}_1 \underbrace{S^{-1}DS}_2 \cdots \underbrace{S^{-1}DS}_N) \\
&= \text{Tr}(S^{-1}D^N S) \\
&= \text{Tr}(S^{-1}SD^N) \\
&= \text{Tr}(D^N).
\end{aligned}$$

Abbiamo ora la necessità di trovare D^N . La possiamo calcolare sapendo che:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove λ_i sono gli autovalori di \mathbb{T} , soluzioni di:

$$\det(\mathbb{T} - \lambda I_2) = 0. \quad (4.7)$$

Scriviamo quindi la formula (4.6) nel seguente modo:

$$Z = \text{Tr}(\mathbb{T}^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N. \quad (4.8)$$

Proviamo a calcolare gli autovalori λ_i esplicitando (4.7):

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{T} - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} - \lambda & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (e^{\beta(J+h)} - \lambda)(e^{\beta(J-h)} - \lambda) - e^{-2\beta J} \\
&= e^{2\beta J} - e^{-2\beta J} - \lambda(e^{\beta(J+h)} + e^{\beta(J-h)}) + \lambda^2 \\
&= 2 \sinh(2\beta J) - 2e^{\beta J} \cosh(\beta h) \lambda + \lambda^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{1}{2} \left[2e^{\beta J} \cosh(\beta h) \mp \sqrt{4e^{2\beta J} \cosh^2(\beta h) - 8 \sinh(2\beta J)} \right] \\
&= e^{\beta J} \cosh(\beta h) \mp \sqrt{e^{2\beta J} \cosh^2(\beta h) - 2 \sinh(2\beta J)} \\
&= e^{\beta J} \cosh(\beta h) \mp \sqrt{e^{2\beta J} [\cosh^2(\beta h) - 1 + e^{-4\beta J}]} \\
&= e^{\beta J} \left[\cosh(\beta h) \mp \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Inserendo questo risultato in (4.8) riusciamo finalmente a trovare il valore di Z ! Da esso siamo in grado di ricavare la densità di energia libera e in seguito la magnetizzazione. Considerando λ_1 il maggiore in valore assoluto tra i due autovalori (cioè quello con il +),

l'energia libera è data da:

$$\begin{aligned}
f(\beta, h) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(-\frac{1}{\beta} \ln(Z) \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta N} \ln(\lambda_1^N + \lambda_2^N) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta N} \ln \left\{ \left[1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right] \lambda_1^N \right\}, \quad \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1 \\
&= -\frac{1}{\beta} \ln(\lambda_1) \\
&= -J - \frac{1}{\beta} \ln \left(\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

(abbiamo supposto $h \neq 0$ e $\beta \neq \infty$ per ottenere $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$), mentre per la magnetizzazione otteniamo:

$$\begin{aligned}
m(\beta, h) = -\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h) &= \frac{\sinh(\beta h) + \frac{\sinh(\beta h) \cosh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}}}{\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}} \\
&= \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}}.
\end{aligned}$$

4.2 Assenza di transizioni di fase

Premessa

Nel 1925 l'American Physical Society ha lanciato una sfida:

È possibile descrivere le transizioni di fase nel quadro della fisica statistica?

L'energia libera per un reticolo finito è per la sua stessa definizione matematica una funzione analitica¹ (Z è una somma finita di funzioni analitiche), ma, poiché il limite di una successione di funzioni analitiche non è necessariamente analitica, possiamo sperare che nel limite termodinamico sia possibile descrivere le transizioni di fase.

Da allora sappiamo che la risposta è positiva, e che le transizioni di fase sono caratterizzate dalla non analiticità dell'energia libera!

Il principio di base che utilizzeremo sia in questo capitolo, sia nel prossimo, per scoprire una transizione di fase è proprio questo: una transizione di fase è legata al comportamento non analitico della densità di energia libera (ossia nel limite termodinamico). Infatti, se consideriamo che abbiamo associato le transizioni di fase ad una divergenza o discontinuità di una qualsiasi derivata di $f(\beta, h)$, in particolare di $m(\beta, h)$ che gioca il ruolo di parametro d'ordine, questo coincide con una non analiticità di $f(\beta, h)$.

Osservando la funzione $f(\beta, h)$ notiamo che essa è analitica per ogni $\beta \neq \infty$, ovvero sia per ogni temperatura $T \neq 0$. Questo ci mostra che non è quindi possibile osservare delle

¹Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è detta analitica se per ogni $x_0 \in I$ esiste un intorno nel quale il valore della funzione f coincide con lo sviluppo di Taylor di f calcolato in quel punto.

transizioni di fase nel caso unidimensionale².

Più in particolare, poiché la funzione magnetizzazione risultante, che lo ricordiamo è il parametro d'ordine, è continua e continuamente derivabile, il modello di Ising a una dimensione non descrive nessuna transizione di fase di I ordine e quindi neanche continua. In conclusione nel modello di Ising unidimensionale non vi sono transizioni di fase.

Se consideriamo il caso senza campo magnetico, per ogni valore di β , la funzione $m(\beta, h)$ si annulla. In assenza di campo magnetico la magnetizzazione è sempre nulla e non si osserva l'apparizione di una fase ferromagnetica, vedi figura 4.2.

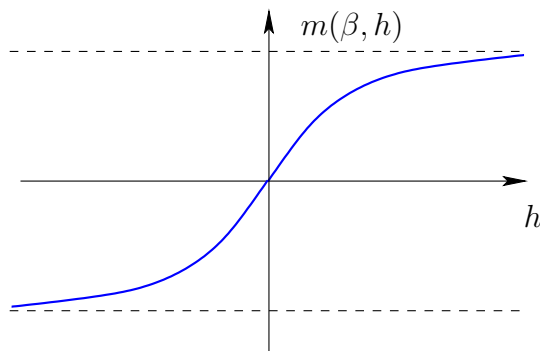


Figura 4.2: Comportamento della magnetizzazione in funzione del campo esterno per ogni $\beta \neq +\infty$.

Confrontando con la soluzione ottenuta nel caso dell'approssimazione del campo medio, la quale prevede sia una transizione di fase continua sia una di I ordine, osserviamo che i risultati sono radicalmente diversi. A una dimensione le fluttuazioni e le correlazioni non sono quindi mai trascurabili, di conseguenza l'approssimazione del campo medio, che si fonda su queste ipotesi, conduce a dei risultati completamente sbagliati.

²Da notare che se $h = 0$ per $\beta = +\infty$, ossia $T = 0$ il rapporto tra gli autovalori di \mathbb{T} tende a 1 e quindi il caso $h = 0, T = 0$ va trattato separatamente. Possiamo infatti dimostrare che per $h = T = 0$ abbiamo un punto critico del modello di Ising unidimensionale.

Capitolo 5

Studio del caso a due dimensioni

Lo studio del caso a due dimensioni è caratterizzato da tre risultati fondamentali:

- L'argomento di Peierls, del 1936, che dimostra l'esistenza di una transizione di fase di I ordine;
- La dualità di Kramers e Wannier, del 1941, che permette di determinare la temperatura di Curie;
- La soluzione esatta di Onsager, del 1944, nel caso di campo esterno nullo ($h = 0$).

5.1 L'argomento di Peierls

Nel 1936 Peierls dimostrò che per una temperatura sufficientemente bassa la magnetizzazione (il parametro d'ordine) $m(\beta, h)$ è discontinua in $h = 0$, da cui la non analiticità della prima derivata dell'energia libera $f(\beta, h)$, e quindi di $f(\beta, h)$, e la presenza di una transizione di fase di I ordine. Questo risultato si fonda sul seguente teorema:

Esiste $\beta_0 < +\infty$ tale che per ogni $\beta > \beta_0$ la funzione $m(\beta, h)$ presenti, come rappresentato nella figura 5.1, un punto di discontinuità in $h = 0$.

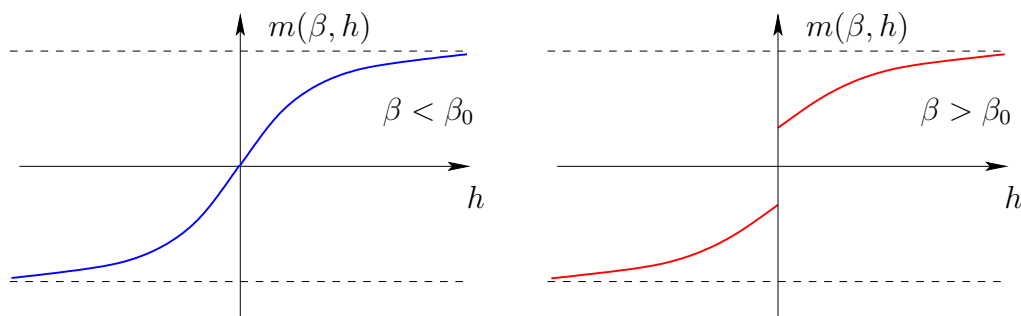


Figura 5.1: Magnetizzazione in funzione di h per $\beta < \beta_0$ (blu) e $\beta > \beta_0$ (rosso).

Per descrivere il salto della funzione in $h = 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h^-) > 0 > \frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h^+)$$

il cui comportamento è illustrato nella figura 5.2.

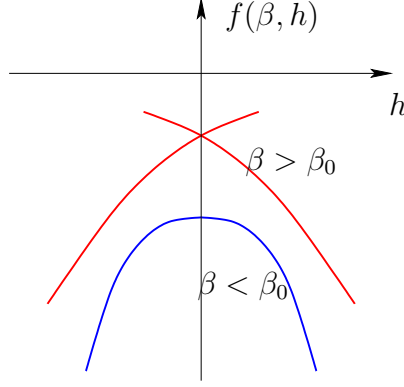


Figura 5.2: Energia libera in funzione di h per $\beta < \beta_0$ (blu) e $\beta > \beta_0$ (rosso).

Per confermare quanto affermato, dimostriamo innanzitutto che $f(\beta, h)$ è una funzione pari in h . Così facendo sapremo che $m(\beta, h) = -\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, h)$ è dispari e, dimostrando che $m(\beta, 0^+) > 0$, otterremo la discontinuità in $h = 0$, perché $m(\beta, 0^-) = -m(\beta, 0^+) < 0$. Cominciamo col dimostrare la parità della funzione $f(\beta, h)$ partendo dalla sua definizione:

$$f(\beta, h) = -\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta N} \ln Z(\beta, h) = f(\beta, -h) \quad \Leftrightarrow \quad Z(\beta, h) = Z(\beta, -h).$$

Dobbiamo quindi dimostrare che la funzione Z è pari in h :

$$\begin{aligned} Z(\beta, -h) &= \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} \\ &= \sum_{\sigma} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j} e^{-\beta h \sum_i \sigma_i} \\ &\stackrel{\sigma_i \rightarrow \sigma'_i = -\sigma_i}{=} \sum_{\sigma'} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma'_i \sigma'_j} e^{\beta h \sum_i \sigma'_i} \\ &= \sum_{\sigma'} e^{-\beta H(\sigma')} = Z(\beta, h). \end{aligned}$$

Ora, come detto, dobbiamo dimostrare che $m(\beta, 0^+) > 0$. Per far ciò procediamo nel seguente modo:

- Dimostriamo che nel limite termodinamico $f(\beta, h) = f^+(\beta, h)$, dove $f^+(\beta, h)$ è la densità di energia libera di un reticolo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ con condizioni al bordo +.
- In questo modo potremo calcolare $\frac{\partial f^+}{\partial h}$ e $m^+(\beta, 0^+)$ invece di $\frac{\partial f}{\partial h}$ e $m(\beta, 0^+)$ ¹. Potremo quindi stimare m con m^+ .
- Infine dovremo dimostrare che $m^+(\beta, 0) > \varepsilon$ con $\varepsilon \geq 0$ indipendente da $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ se $\beta \geq \beta_0$.

¹In particolare ci serviremo delle condizioni al bordo positive per poter utilizzare le disuguaglianze di Griffiths.

5.1.1 Hamiltoniana H^+ e limite termodinamico

Definiamo la funzione Hamiltoniana H^+ , per la quale scegliamo le condizioni al bordo +, nel seguente modo:

$$H^+(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle \in \Lambda} \sigma_i \sigma_j - \underbrace{J \sum_{i \in \partial \Lambda} \sigma_i}_{\text{Valori sul bordo}} - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \quad (5.1)$$

dove con $\partial \Lambda$ notiamo gli spins sul bordo di Λ .

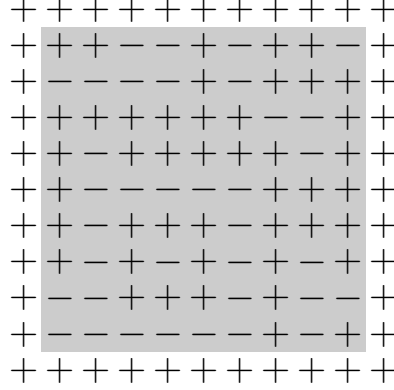


Figura 5.3: Reticolo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ con le condizioni al bordo +.

Ammettendo che il reticolo quadrato Λ sia composto da N spins, ogni bordo è formato da \sqrt{N} spin. In totale avremo quindi $4\sqrt{N}$ spins sul bordo che assumeranno come valore massimo +1 e come valore minimo -1. Possiamo quindi scrivere la seguente disuguaglianza:

$$H - 4J\sqrt{N} \leq H^+ \leq H + 4J\sqrt{N} .$$

Poiché Z è una funzione strettamente decrescente occorre invertire le disuguaglianze:

$$Ze^{4\beta J\sqrt{N}} \geq Z^+ \geq Ze^{-4\beta J\sqrt{N}} .$$

Ed essendo pure f strettamente decrescente dobbiamo invertire ancora una volta la comparazione:

$$-\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta N} \ln Z + \frac{4\beta J\sqrt{N}}{N\beta} \leq f^+ \leq -\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta N} \ln Z - \frac{4\beta J\sqrt{N}}{N\beta}$$

$$f \leq f^+ \leq f .$$

Quindi, per il teorema del confronto, sappiamo che nel limite termodinamico $f^+ \rightarrow f$.

Osserviamo che questo risultato dimostra che nel limite termodinamico le grandezze energia libera e le sue derivate sono indipendenti dalle condizioni al bordo.

5.1.2 Convessità di f e stima di m con m^+

Per dimostrare che $m^+(\beta, 0^+) > 0$, dobbiamo ora dimostrare che f^+ è concava in h , ossia dobbiamo mostrare che la sua seconda derivata è positiva:

$$0 \geq \frac{\partial^2 f^+}{\partial h^2}(\beta, h) = -\frac{\partial m^+}{\partial h}(\beta, h) \Leftrightarrow \frac{\partial m^+}{\partial h}(\beta, h) \geq 0 .$$

Ora, utilizzando la definizione di valore atteso di una variabile aleatoria:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m^+}{\partial h}(\beta, h) &= \frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_i \rangle^+ \\
&= \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{Z} \sum_{\sigma} \sigma_i e^{-\beta H^+(\sigma)} \right) \\
&= \frac{1}{Z} \left(\sum_{\sigma} \sigma_i \left(\beta \sum_k \sigma_k \right) e^{-\beta H^+(\sigma)} \right) - \frac{1}{Z^2} \left(\sum_{\sigma} \left(\beta \sum_k \sigma_k \right) e^{-\beta H^+(\sigma)} \right) \left(\sum_{\sigma} \sigma_i e^{-\beta H^+(\sigma)} \right) \\
&= \beta \left[\langle \sigma_i \left(\sum_k \sigma_k \right) \rangle^+ - \langle \sigma_i \rangle^+ \langle \sum_k \sigma_k \rangle^+ \right] \\
&= \beta \sum_k \left(\langle \sigma_i \sigma_k \rangle^+ - \langle \sigma_i \rangle^+ \langle \sigma_k \rangle^+ \right).
\end{aligned}$$

Poiché $h > 0$ e le condizioni al bordo positive, possiamo utilizzare la disuguaglianza di Griffiths (GKS) che afferma:

$$\langle \sigma_i \sigma_k \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_k \rangle \geq 0$$

dunque la funzione $f^+(\beta, h)$ è concava.

Dato che la tangente di una funzione concava graficamente sta sempre sopra alla funzione, possiamo scrivere:

$$f^+(\beta, h) \leq f^+(\beta, h_0) + \frac{\partial f^+}{\partial h}(\beta, h_0)(h - h_0)$$

e scegliendo $h_0 = 0$ otteniamo:

$$f^+(\beta, h) \leq f^+(\beta, 0) + h \frac{\partial f^+}{\partial h}(\beta, 0).$$

Ora sapendo che nel limite termodinamico $f^+ = f$:

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f^+(\beta, h) - f^+(\beta, 0)}{h} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial f^+}{\partial h}(\beta, 0) \\
\frac{f(\beta, h) - f(\beta, 0)}{h} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial f^+}{\partial h}(\beta, 0).
\end{aligned}$$

Possiamo infine scrivere:

$$\begin{aligned}
m(\beta, 0^+) &= -\frac{\partial f}{\partial h}(\beta, 0^+) \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\beta, h) - f(\beta, 0)}{h} \\
&\geq -\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial f^+}{\partial h}(\beta, 0) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} m^+(\beta, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^+(\beta, 0). \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Invece di dimostrare la positività di $m(\beta, 0^+)$, potremo quindi dimostrare la positività di $\lim_{N \rightarrow \infty} m^+(\beta, 0)$.

5.1.3 L'argomento di Peierls

Per dimostrare che nel modello di Ising a due dimensioni esiste una transizione di fase, ci rimane ormai solo da dimostrare che $m(\beta, 0^+) > 0$. Sia $h = 0$, abbiamo:

$$H^+(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle \in \Lambda} \sigma_i \sigma_j - J \sum_{i \in \partial \Lambda} \sigma_i . \quad (5.3)$$

Introduciamo la rappresentazione per contorni: a ogni configurazione σ associamo un insieme di poligoni $\Gamma(\sigma)$ che separano gli spins positivi da quelli negativi. Notiamo γ_i un poligono e $\Gamma(\sigma) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ la configurazione di spins in termini di contorni data da tutti i poligoni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

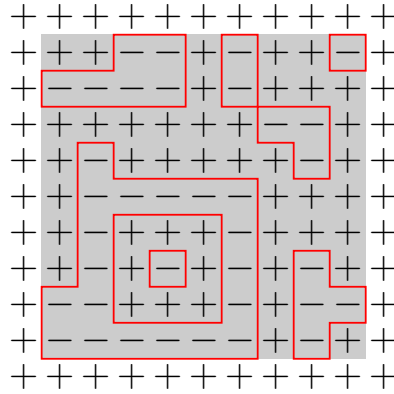


Figura 5.4: Contorni poligonali per un reticolo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ con le condizioni al bordo +.

Abbiamo una corrispondenza biunivoca: ad ogni configurazione σ ne corrisponde una di poligoni $\Gamma(\sigma)$ e viceversa:

$$\sigma \xleftrightarrow{1-1} \Gamma(\sigma) .$$

Possiamo riscrivere (5.3) nel seguente modo:

$$H^+(\sigma) = \sum_{\langle i,j \rangle \in \Lambda} J [(1 - \sigma_i \sigma_j) - 1] + \sum_{i \in \partial \Lambda} J [(1 - \sigma_i) - 1] .$$

Poiché se due spin vicini hanno lo stesso valore il loro prodotto è 1 e non sono separati da un tratto, mentre se hanno valore opposto il loro prodotto risulta -1 e sono separati da un tratto, possiamo scrivere il termine nella somma nel seguente modo:

$$1 - \sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_i \text{ e } \sigma_j \text{ sono uguali} = \text{se non sono separati da un tratto;} \\ 2 & \text{se } \sigma_i \text{ e } \sigma_j \text{ sono diversi} = \text{se sono separati da un tratto.} \end{cases}$$

Continuando l'espressione precedente otteniamo quindi:

$$H^+(\sigma) = 2J \sum_{i=1}^n |\gamma_i| - C_\Lambda \quad (5.4)$$

dove con $|\gamma_i|$ intendiamo la lunghezza del contorno γ_i , quindi il numero di tratti che compongono il poligono γ_i .

C_Λ è una costante scaturita dal resto delle somme. Essa sarà pari al doppio del numero di spins più il numero di spins sul bordo, che nel limite termodinamico è ininfluente:

$$C_\Lambda = 2|\Lambda| + 4\sqrt{|\Lambda|} \approx 2|\Lambda|$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned}\langle 1 - \sigma_i \rangle^+ &= 1 - \langle \sigma_i \rangle^+ = 1 - m^+(\beta, 0) \\ \Rightarrow m^+(\beta, h) &= 1 - \langle 1 - \sigma_i \rangle^+ .\end{aligned}$$

Poiché le condizioni al bordo sono positive, come notiamo nella figura 5.4, i possibili valori di $\langle 1 - \sigma_i \rangle^+$ sono:

$$\langle 1 - \sigma_i \rangle^+ = \begin{cases} 0 & \text{se il numero di contorni che circondano } \sigma \text{ è pari;} \\ 2 & \text{se il numero di contorni che circondano } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi, utilizzando la definizione di valore atteso di una variabile aleatoria, abbiamo:

$$\langle 1 - \sigma_i \rangle^+ = \frac{2 \sum_{\sigma: \exists \gamma \circlearrowleft i, \text{dispari}} e^{-\beta H^+(\sigma)}}{Z} \leq \frac{2 \sum_{\sigma: \exists \gamma \circlearrowleft i} e^{-\beta H^+(\sigma)}}{Z}$$

dove nella seconda somma consideriamo tutte le configurazioni per le quali esiste almeno un poligono γ che circonda i . Ora abbiamo:

$$\sum_{\sigma: \exists \gamma \circlearrowleft i} e^{-\beta H^+(\sigma)} < \sum_{\gamma \circlearrowleft i} \sum_{\sigma: \gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-\beta H^+(\sigma)}$$

sapendo che la disuguaglianza è stretta perché se sommiamo prima sui poligoni che circondano i e poi ancora sulle configurazioni che appartengono a $\{\sigma : \gamma \in \Gamma(\sigma)\}$, alcune configurazioni vengono contate più di una volta, ciò che non accade nella somma su $\{\sigma : \exists \gamma \circlearrowleft i\}$.

In particolare ogni configurazione con n poligoni che racchiudono i viene contata una volta nella somma di sinistra e n volte nella doppia somma di destra, come osserviamo nella figura 5.5.

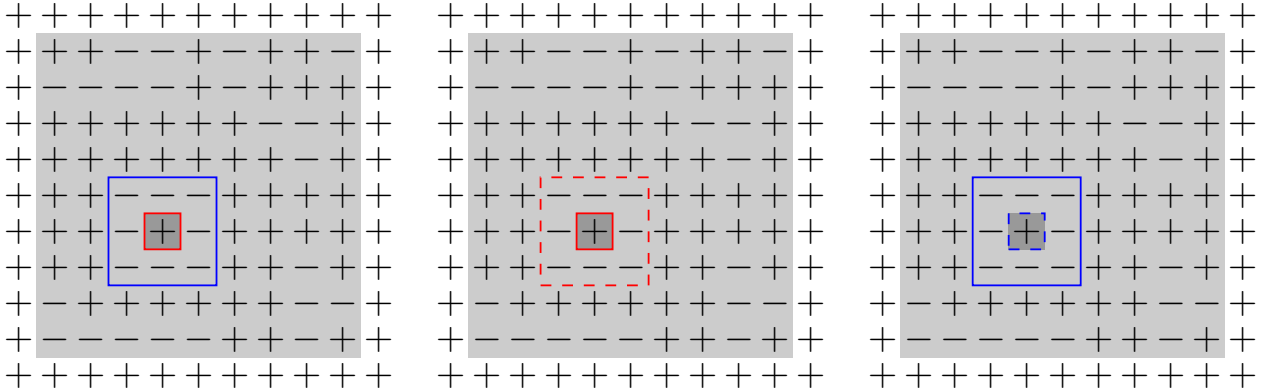


Figura 5.5: La prima configurazione a sinistra contiene 2 poligoni che circondano lo spin più scuro, essa appare una volta nella prima somma. Considerando il poligono rosso, tra le varie configurazioni vi è quella di sinistra (raffigurata al centro); considerando il poligono blu, tra le varie configurazioni vi è quella di sinistra (raffigurata a destra). Ogni configurazione che ha due poligoni che circondano uno spin viene contata due volte nella seconda somma.

Dato γ e una configurazione σ con $\gamma \in \Gamma(\sigma)$ definiamo la configurazione $\tilde{\sigma}$ in cui gli spins all'interno di γ sono stati invertiti. Passare dalla configurazione σ a $\tilde{\sigma}$, coincide con cancellare γ , abbiamo perciò:

$$\Gamma(\tilde{\sigma}) = \Gamma(\sigma) \setminus \{\gamma\} .$$

L'Hamiltoniana può essere pertanto espressa in questo modo:

$$H^+(\sigma) = 2|\gamma| + H^+(\tilde{\sigma}) . \quad (5.5)$$

Considerando che, come vediamo nella figura 5.6, tra $\{\sigma : \gamma \in \Gamma(\sigma)\}$ e $\{\tilde{\sigma}\}$ esiste una corrispondenza biunivoca e utilizzando (5.5) possiamo quindi scrivere:

$$\sum_{\sigma: \gamma \in \Gamma(\sigma)} e^{-\beta H^+(\sigma)} = e^{-2\beta J|\gamma|} \sum_{\tilde{\sigma}} e^{-\beta H^+(\tilde{\sigma})} .$$

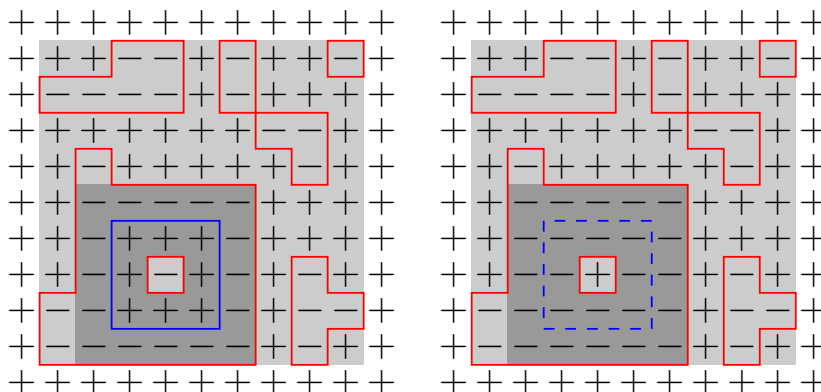


Figura 5.6: La figura ci mostra che sommare su $\{\sigma : \gamma \in \Gamma(\sigma)\}$ equivale a sommare sui $\{\tilde{\sigma}\}$ perché per ogni configurazione dei due insiemi viene fissato il valore degli spins separati da γ (regione più scura) e quindi il numero di configurazioni dei due insiemi è lo stesso.

Da cui otteniamo:

$$\langle 1 - \sigma_i \rangle^+ < 2 \sum_{\gamma \ni i} e^{-2\beta J|\gamma|} \underbrace{\frac{\sum_{\tilde{\sigma}} e^{-\beta H^+(\tilde{\sigma})}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H^+(\sigma)}}}_{\leq 1} \leq 2 \sum_{\gamma \ni i} e^{-2\beta J|\gamma|} .$$

Dove l'ultima disuguaglianza è data dal fatto che le configurazioni di $\{\tilde{\sigma}\}$ sono contenute in $\{\sigma\}$.

Dobbiamo ora semplificare la somma restante. Per far ciò dobbiamo osservare che ogni poligono è formato da un numero pari di tratti per un minimo di quattro, e che ci possono essere più poligoni della stessa lunghezza:

$$\sum_{\gamma \ni i} e^{-2\beta J|\gamma|} = \sum_{\ell=4,6,8,\dots}^{\infty} e^{-2\beta J\ell} N_{\ell} \quad (5.6)$$

dove N_{ℓ} è il numero di poligoni di lunghezza ℓ .

Rimarchiamo che in partenza un tratto ha quattro possibili strade da percorrere, in seguito ne avrà tre, mentre infine avrà soltanto una possibilità. Inoltre riscontriamo che un poligono di lunghezza ℓ passante attorno al sito i si distanzia al massimo da esso di $\frac{\ell}{2}$. Se consideriamo un reticolo $\ell \times \ell$ centrato in i , abbiamo ℓ^2 possibili siti, perciò possiamo scrivere:

$$N_{\ell} \leq 4 \cdot 3^{\ell-1} \cdot \ell^2 .$$

Possiamo di conseguenza continuare la disuguaglianza (5.6):

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \ni i} e^{-2\beta J|\gamma|} &\leq \sum_{\ell=4,6,8,\dots}^{\infty} e^{-2\beta J\ell} 4 \cdot 3^{\ell-1} \cdot \ell^2 = \frac{4}{3} \sum_{\ell=4,6,8,\dots}^{\infty} \ell^2 (3e^{-2\beta J})^{\ell} \\ &< \frac{4}{3} \sum_{\ell=4}^{\infty} \ell^2 (3e^{-2\beta J})^{\ell} = \frac{4}{3} \frac{r(1+r)}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

dove $r = 3e^{-2\beta J} < 1$ e la somma è stata ricavata con l'ausilio di Maple. Affiché il risultato sia inferiore a $\frac{1}{2}$ dobbiamo trovare un valore r^* tale che:

$$\frac{4r^*(1+r^*)}{3(1-r^*)^3} < \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dalla definizione di r , otteniamo una condizione sulla temperatura per questo valore r^* :

$$\beta > \beta_0 = \frac{1}{2J} \ln \left(\frac{3}{r^*} \right).$$

Quindi:

$$\langle 1 - \sigma_i \rangle^+ < \delta \leq 1$$

perciò otteniamo:

$$m^+(\beta, 0) = 1 - \langle 1 - \sigma_i \rangle^+ > \underbrace{1 - \delta}_{=\varepsilon} \geq 0.$$

Dunque, grazie al risultato (5.2), abbiamo che se $\beta > \beta_0$:

$$m(\beta, 0^+) \geq \lim_{N \rightarrow +\infty} m^+(\beta, 0) > \varepsilon \geq 0$$

e per simmetria:

$$m(\beta, 0^-) < -\varepsilon \leq 0.$$

Possiamo quindi concludere che in $h = 0$ la funzione $m(\beta, h)$ è discontinua, da cui la non analiticità di $f(\beta, h)$ e la presenza di una transizione di fase. Poiché $m(\beta, h)$ è la prima derivata dell'energia libera si tratta di una transizione di fase di I ordine. Notiamo che questo risultato dimostra pure che per temperature sufficientemente basse si manifesta una magnetizzazione spontanea in assenza di campo magnetico, magnetizzazione che sarà nulla nel caso di alte temperature.

5.2 La dualità di Kramers-Wannier

Nel 1941 Kramers e Wannier fecero un'importante scoperta: trovarono una simmetria tra il modello di Ising ad alta temperatura e quello a bassa temperatura in assenza di campo magnetico. Tre anni prima che Onsager calcolasse la soluzione analitica esatta, essi riuscirono così, grazie al loro risultato, a determinare il valore della temperatura di Curie della transizione di fase del modello a due dimensioni! La loro idea fu quella di risolvere il modello in due modi diversi mediante una suddivisione del reticolo in poligoni. Eguagliando una parte delle due soluzioni trovate, essi riuscirono a ricavare la relazione che lega questi due modelli e, supponendo che ci sia un'unica transizione di fase, seppero individuare T_c .

Per prima cosa consideriamo un reticolo \mathcal{L} formato dai punti di \mathbb{Z}^2 su cui si situano degli spins che possono assumere valore $+1$ o -1 e che interagiscono solo con i più prossimi vicini. Poniamo il campo esterno nullo, così che l'Hamiltoniana del sistema sia definita nel seguente modo:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - J' \sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i \sigma_k \quad (5.7)$$

dove la prima somma indica le interazioni tra spins vicini sulla stessa riga, mentre la seconda sulla stessa colonna. J e J' sono due costanti positive che alla fine sceglieremo uguali. Da essa possiamo ricavare la funzione di partizione:

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left[K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + L \sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i \sigma_k \right] \quad (5.8)$$

dove poniamo:

$$K = \beta J = \frac{J}{k_B T} \quad \text{e} \quad L = \beta J' = \frac{J'}{k_B T} . \quad (5.9)$$

Ora cercheremo di trovare due rappresentazioni diverse di (5.8) così da poterle confrontare.

5.2.1 Rappresentazione a bassa temperatura

Questo primo risultato viene individuato scrivendo la somma di (5.8) in un modo che ci permette di fare una rappresentazione grafica: la rappresentazione per contorni, già utilizzata nello sviluppo dell'argomento di Peierls.

Sia M il numero di coppie di spins vicini di ogni riga e colonna, ossia il numero di tratti tra due siti vicini di ogni riga, rispettivamente di ogni colonna. Sia r il numero di coppie vicine verticali diverse e, rispettivamente, sia s il numero di coppie vicine orizzontali diverse. Abbiamo quindi $M - r$ coppie uguali verticali e $M - s$ coppie uguali orizzontali. Constatando che $\sigma_i \sigma_j = +1$ se gli spins σ_i e σ_j sono orientati nella stessa direzione, mentre $\sigma_i \sigma_j = -1$ se sono orientati in direzioni opposte, otteniamo che la somma di (5.8) può essere scritta come²:

$$\exp [K(M - 2s) + L(M - 2r)] . \quad (5.10)$$

Notiamo che in questo modo la funzione Z dipende solo dalle coppie diverse.

Osservando la figura 5.7 vediamo che ponendo un punto al centro di ogni quadratino del reticolo \mathcal{L} possiamo formare il reticolo duale \mathcal{L}_D , identico a \mathcal{L} ma traslato rispetto a esso in entrambe le direzioni di metà della distanza fra spins.

²In pratica poniamo $+1$ il valore di tutti gli spins come se fossero tutti orientati in una sola direzione. In seguito, per far sì che quelli orientati in direzione opposta abbiano valore -1 , bisogna sottrarne il doppio.

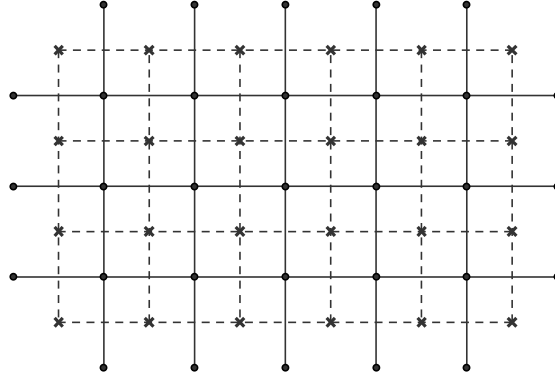


Figura 5.7: Reticolo \mathcal{L} con linee continue e punti pieni, e il suo reticolo duale \mathcal{L}_D , con linee tratteggiate e croci.

Grazie a questo sistema siamo in grado di considerare gli spins su \mathcal{L} come delle superfici di \mathcal{L}_D utilizzando una rappresentazione per contorni, il criterio seguente: se due spins vicini sono diversi li separiamo tracciando la linea di \mathcal{L}_D tra loro, mentre se sono uguali non facciamo nulla, vedi figura 5.8.

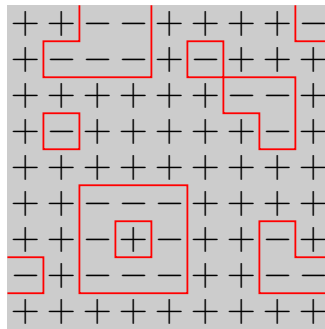


Figura 5.8: Linee di \mathcal{L}_D separano gli spins di direzione opposta formando dei poligoni.

Queste linee generano così dei poligoni³ che dividono il piano in settori di spins orientati verso l'alto e spins orientati verso il basso. Evidentemente, poiché ogni spin può assumere solo due valori, per ogni divisione in poligoni ci sono soltanto due possibili configurazioni di spins: una l'opposta dell'altra (ossia ottenuta cambiando l'orientamento di tutti gli spins).

Grazie a quest'ultime considerazioni e osservando che la somma di tutte le possibili configurazioni di spins è data dalla somma di tutte le possibili divisioni in poligoni, possiamo riscrivere l'espressione (5.8) come:

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{\sigma} \exp \left[K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + L \sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i \sigma_k \right] \\
 &= 2 \sum_{P \in \mathcal{L}_D} \exp [K(M - 2s) + L(M - 2r)]
 \end{aligned}$$

ossia

$$Z = 2 \exp [M(K + L)] \sum_{P \in \mathcal{L}_D} \exp [-2Ks - 2Lr] \tag{5.11}$$

³I poligoni non sono chiusi sui bordi, ma come abbiamo visto le condizioni al bordo non influenzano nel limite termodinamico.

dove P sono le possibili configurazioni dei poligoni in \mathcal{L}_D , r sono le linee orizzontali, mentre s quelle verticali. Questa rappresentazione è esatta per ogni temperatura, ma in particolare è adatta per le espansioni a bassa temperatura perché K e L sono molto grandi e quindi i termini esponenziali della somma sono trascurabili salvo se $r = s = 0$, da cui solo i poligoni in cui non vi sono righe sono determinanti. Per questo motivo è chiamata rappresentazione a bassa temperatura.

5.2.2 Rappresentazione ad alta temperatura

Ora cercheremo di ottenere un'altra rappresentazione di Z così da poterla confrontare con il risultato precedente. Sapendo che $\sigma_i\sigma_j$ assume solo i valori $+1$ e -1 possiamo scrivere⁴:

$$\begin{aligned} e^{K\sigma_i\sigma_j} &= \cosh K + \sinh K\sigma_i\sigma_j \\ e^{L\sigma_i\sigma_k} &= \cosh L + \sinh L\sigma_i\sigma_k. \end{aligned}$$

Quindi possiamo esprimere Z nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} \exp \left[K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i\sigma_j + L \sum_{\langle i,k \rangle} \sigma_i\sigma_k \right] \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{K\sigma_i\sigma_j} \prod_{\langle i,k \rangle} e^{L\sigma_i\sigma_k} \\ &= \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} (\cosh K + \sinh K\sigma_i\sigma_j) \prod_{\langle i,k \rangle} (\cosh L + \sinh L\sigma_i\sigma_k) \\ &= (\cosh K \cosh L)^M \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \tanh K\sigma_i\sigma_j) \prod_{\langle i,k \rangle} (1 + \tanh L\sigma_i\sigma_k). \quad (5.12) \end{aligned}$$

Questa rappresentazione è esatta per ogni temperatura, ma in particolare è adatta per le espansioni ad alta temperatura perché K e L sono molto piccoli e quindi i termini in tangente iperbolica di prodotti sono trascurabili e questi ultimi valgono approssimativamente 1. Per questo motivo è chiamata rappresentazione ad alta temperatura.

Ogni prodotto è composto da M fattori, ognuno con due possibili valori. Abbiamo quindi in totale 2^{2M} termini. L'idea è di sviluppare ogni prodotto, ad esempio possiamo scrivere il primo prodotto come⁵:

$$\begin{aligned} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \tanh K\sigma_i\sigma_j) &= (1 + \tanh K\sigma_1\sigma_2)(1 + \tanh K\sigma_2\sigma_3) \cdots \\ &= 1 + \tanh K\sigma_1\sigma_2 + \tanh K\sigma_2\sigma_3 + \tanh^2 K\sigma_1(\sigma_2)^2\sigma_3 + \dots \end{aligned}$$

Anche in questo caso possiamo avvalerci di una rappresentazione grafica. Se notiamo con \mathcal{B}_{orr} l'insieme dei tratti orizzontali, possiamo rappresentare il prodotto come:

$$\prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \tanh K\sigma_i\sigma_j) = \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{orr}}} \tanh^r K \prod_{\langle i,j \rangle \in B} \sigma_i\sigma_j$$

⁴Sappiamo infatti che:

$$\begin{cases} e^{\alpha} &= \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha) \\ e^{-\alpha} &= \cosh(\alpha) - \sinh(\alpha) = \cosh(\alpha) + \sinh(-\alpha) \end{cases}$$

⁵Supponendo gli spins ordinati in modo crescente per righe.

dove r è il numero di tratti orizzontali in B . Analogamente per l'altra somma, con \mathcal{B}_{ver} l'insieme dei tratti verticali:

$$\prod_{\langle i,k \rangle} (1 + \tanh L \sigma_i \sigma_k) = \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{ver}}} \tanh^s L \prod_{\langle i,k \rangle \in B} \sigma_i \sigma_k$$

dove s è il numero di tratti verticali in B . Osserviamo quindi che ogni tratto (orizzontale o verticale) coincide con un termine dello sviluppo dei due prodotti.

Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma} \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{ver}}} \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{orr}}} \tanh^r K \tanh^s L \prod_{\langle i,j \rangle \in B} \sigma_i \sigma_j \prod_{\langle i,k \rangle \in B} \sigma_i \sigma_k \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{ver}}} \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{orr}}} \tanh^r K \tanh^s L \sum_{\sigma} \prod_{\langle i,j \rangle \in B} \sigma_i \sigma_j \prod_{\langle i,k \rangle \in B} \sigma_i \sigma_k . \end{aligned}$$

Sommando i termini del prodotto su tutti gli spins, osserviamo che se un singolo spin σ_i appare un numero dispari d ($d = 1, 3$) di volte la somma su quello spin darà zero ($\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i^d = 1 - 1 = 0$), mentre se apparirà un numero pari p ($p = 0, 2, 4$) di volte la somma darà 2 ($\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i^p = 1 + 1 = 2$); quindi il prodotto degli spins sarà non nullo se tutti gli spins appariranno un numero pari di volte. Notiamo che nel doppio prodotto appaiono sia i tratti orizzontali, sia quelli verticali, e che solo la combinazione di tratti orizzontali e verticali che danno un poligono chiuso possiedono un numero pari di spins nel doppio prodotto, vedi figura 5.9. In tal caso la somma vale 2^N dove N è il numero di spins del reticolo.

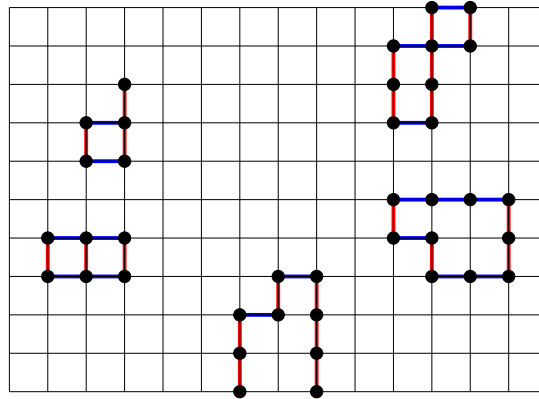


Figura 5.9: Un insieme di tratti verticali (rossi) e orizzontali (blu). Le tre configurazioni di sinistra hanno un numero di tratti per spin dispari, le due a destra un numero pari. L'insieme dei tratti verticali e orizzontali nel secondo caso da luogo a dei poligoni chiusi.

Dunque:

$$Z = 2^N \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{ver}}} \sum_{B \in \mathcal{B}_{\text{orr}}} \tanh^r K \tanh^s L \quad (5.13)$$

e ricordando che, a questo punto, la doppia somma è fatta unicamente sull'insieme di tratti che generano un poligono chiuso nel reticolo \mathcal{L} , possiamo scrivere:

$$Z = 2^N (\cosh K \cosh L)^M \sum_{P \in \mathcal{L}} \tanh^r K \tanh^s L . \quad (5.14)$$

5.2.3 Dualità

La densità di energia libera $f(\beta, h = 0)$ è data da:

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln Z . \quad (5.15)$$

Poiché f dipende da β via K e L scriviamo $f(K, L)$. Le due rappresentazioni (5.11) e (5.14) differiscono dal fatto che la somma di una riguarda i poligoni di \mathcal{L}_D , mentre quella dell'altra riguarda i poligoni di \mathcal{L} . Tuttavia, poiché a distinguere \mathcal{L} da \mathcal{L}_D sono solo le condizioni al bordo, possiamo identificare le due somme nel limite termodinamico $N \rightarrow +\infty$, dove le condizioni al bordo sono indifferenti. Tenendo conto che in questo limite $M/N \rightarrow 1$, calcoliamo Z sia per la rappresentazione a bassa temperatura, sia per quella ad alta temperatura:

$$\begin{aligned} -\beta f(K, L) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{N} + K + L + \frac{1}{N} \ln \left(\sum_P e^{-2Lr} e^{-2Ks} \right) \\ &= K + L + \Phi(e^{-2L}, e^{-2K}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

e

$$\begin{aligned} -\beta f(K, L) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left[2^N (\cosh K \cosh L)^N \sum_P \tanh^r K \tanh^s L \right] \\ &= \ln(2 \cosh K \cosh L) + \Phi(\tanh K, \tanh L) \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove:

$$\Phi(v, w) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left(\sum_P v^r w^s \right) .$$

Ora dobbiamo trovare la relazione tra i due risultati. Rimpiazziamo K e L in (5.17) con K^* e L^* , dove poniamo:

$$\tanh K^* = e^{-2L} \quad \text{e} \quad \tanh L^* = e^{-2K} \quad (5.18)$$

così che le somme di (5.16) e (5.17) si eguagliano:

$$\begin{aligned} -\beta f(K^*, L^*) &= \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left(\sum_P \tanh^r K^* \tanh^s L^* \right) \\ &= \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left(\sum_P e^{-2Lr} e^{-2Ks} \right) \\ &= \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) + \Phi(e^{-2L}, e^{-2K}) \\ \Rightarrow \Phi(e^{-2L}, e^{-2K}) &= -f(K^*, L^*) - \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) . \end{aligned}$$

E inserendo l'ultima uguaglianza in (5.16):

$$-\beta f(K, L) = K + L - \beta f(K^*, L^*) - \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*)$$

da cui:

$$\beta f(K^*, L^*) = K + L + \beta f(K, L) - \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) . \quad (5.19)$$

Otteniamo dunque la relazione tra l'energia libera a bassa temperatura e quella ad alta temperatura. Notiamo infatti che se L e K sono grandi, L^* e K^* sono piccoli. Questo risultato è noto come la relazione di dualità di Kramers-Wannier!

Ora proviamo a riscrivere (5.18) diversamente:

$$\tanh K^* = \frac{2 \sinh^2 K^*}{2 \sinh K^* \cosh K^*} = \frac{-1 + \sinh^2 K^* + \cosh^2 K^*}{2 \sinh K^* \cosh K^*} = \frac{-1 + \cosh 2K^*}{\sinh 2K^*} = e^{-2L} .$$

Supponendo che l'ultima relazione sia la soluzione di un'equazione di secondo grado, possiamo risalire ai parametri a, b, c della stessa:

$$\begin{cases} 2a & = \sinh 2K^* & \Rightarrow a = \frac{\sinh 2K^*}{2} \\ -b & = -1 & \Rightarrow b = 1 \\ \sqrt{b^2 - 4ac} & = \cosh 2K^* & \Rightarrow c = -\frac{\cosh^2 K^* - 1}{2 \sinh 2K^*} = -\frac{\sinh 2K^*}{2} . \end{cases}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh 2K^*}{2} e^{-4L} + e^{-2L} - \frac{\sinh 2K^*}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sinh 2K^*}{2} (e^{-4L} - 1) &= -e^{-2L} \end{aligned}$$

ossia (e analogamente per l'altro caso):

$$\begin{cases} \sinh 2K^* \sinh 2L & = 1 \\ \sinh 2L^* \sinh 2K & = 1 . \end{cases} \quad (5.20)$$

A sua volta possiamo riscrivere (5.19):

$$\begin{aligned} \beta f(K^*, L^*) &= K + L + \beta f(K, L) - \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \tanh K^* - \frac{1}{2} \ln \tanh L^* + \beta f(K, L) - \ln(2 \cosh K^* \cosh L^*) \\ &= -\frac{1}{2} \ln [(\tanh K^*)(\tanh L^*)(4 \cosh^2 K^* \cosh^2 L^*)] + \beta f(K, L) \\ &= -\frac{1}{2} \ln [(\sinh K^*)(\sinh L^*)(4 \cosh K^* \cosh L^*)] + \beta f(K, L) \\ &= -\frac{1}{2} \ln [(\sinh 2K^*)(\sinh 2L^*)] + \beta f(K, L) . \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\beta f(K^*, L^*) = \beta f(K, L) + \frac{1}{2} \ln [(\sinh 2K)(\sinh 2L)] . \quad (5.21)$$

Questi risultati ci permettono di localizzare la transizione di fase. Sappiamo infatti che nel punto critico la funzione che descrive l'energia libera non è analitica. Consideriamo il caso isotropico, ossia poniamo $J = J'$, quindi $K = L$ e $K^* = L^*$. *Supponendo che ci sia un'unica transizione di fase*, essa deve avvenire quando $K = K_c$ per un certo K_c . Ora, visto (5.21) se f non è analitica per $K = K_c$ non potrà essere analitica neppure per $K^* = K_c$ e quindi il valore di $K_c = \beta J$ è dato da:

$$\sinh^2 2K_c = 1 \quad \Rightarrow \quad \sinh(2\beta J) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_c = \frac{1}{2J} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5.22)$$

da cui

$$T_c = \frac{2J}{k_B \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.27 \frac{J}{k_B} .$$

5.3 La soluzione esatta di Onsager

Nato a Oslo nel 1903 Onsager pubblicò nel 1944 la risoluzione esatta del modello a due dimensioni. Egli riuscì grazie a una brillante intuizione a diagonalizzare la transfer matrix ricavando così gli autovalori. Dopo di lui, furono numerosi coloro che si dedicarono all'arduo rompicapo con esiti positivi. Alcuni trovarono vie completamente diverse per ricavare l'energia libera, altri adottarono a loro volta il metodo della transfer matrix, altri ancora raggiunsero delle valide conclusioni attraverso l'analisi combinatoria. Al momento però nessuno è ancora riuscito a trovare la soluzione esatta del modello a tre dimensioni. Vediamo alcuni punti di questo importante risultato.

Consideriamo un reticolo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ di N^2 spins con condizioni al bordo periodiche come mostra la figura 5.10.

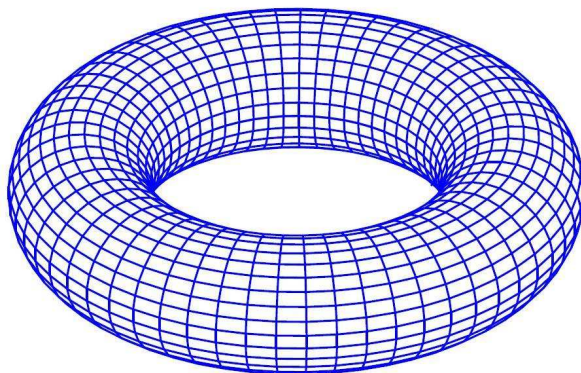


Figura 5.10: Le condizioni al bordo periodiche in due dimensioni corrispondono a porre gli spins su di un toro.

Notiamo il valore dello spin nel sito (i, j) del reticolo $\sigma_{i,j} = \pm 1$, dove $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq N$, e supponiamo che ogni spin interagisca solo con i suoi quattro più prossimi vicini. Come negli altri casi si tratta di calcolare la funzione di partizione, ma vedremo che la sua determinazione non sarà affar semplice!

Per far sì che vengano considerate con le condizioni al bordo periodiche, sia le interazioni reciproche tra spins vicini, sia quelle con il campo esterno, l'Hamiltoniana può essere scritta nel seguente modo:

$$H(\sigma) = \underbrace{-J \sum_{i,j} (\sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j} \sigma_{i,j+1})}_{H \text{ interazione tra spin per linea e colonna}} \quad \underbrace{-h \sum_{i,j} \sigma_{i,j}}_{H \text{ interazione campo esterno}} \quad . \quad (5.23)$$

Essa può essere riscritta come:

$$H(\mu) = \sum_j [E(\mu_j, \mu_{j+1}) + E(\mu_j)] \quad (5.24)$$

dove poniamo:

$$E(\mu_j, \mu_k) = -J \sum_i \sigma_{i,j} \sigma_{i,k} \quad (5.25)$$

$$E(\mu_j) = -J \sum_i \sigma_{i,j} \sigma_{i+1,j} - h \sum_i \sigma_{i,j} \quad (5.26)$$

in cui μ_j indica l'insieme degli spins nella colonna j : $\mu_j = \{\sigma_{1,j}, \dots, \sigma_{M,j}\}$. Indichiamo con μ l'insieme delle colonne.

Osservando che una configurazione σ è interamente specificata dall'insieme μ , la funzione di partizione può essere scritta come:

$$Z = \sum_{\mu} \exp \left[-\beta \left(\sum_j [E(\mu_j, \mu_{j+1}) + E(\mu_j)] \right) \right] = \sum_{\mu} \prod_{j=1}^N \exp [-\beta ([E(\mu_j, \mu_{j+1}) + E(\mu_j)])] . \quad (5.27)$$

Procedendo in modo analogo al caso unidimensionale, definiamo una *transfer matrix* \mathbb{P} , di tipo $2^N \times 2^N$, i cui elementi di matrice sono:

$$(\mathbb{P})_{\mu_j, \mu_k} = e^{-\beta [E(\mu_j, \mu_k) + E(\mu_j)]} . \quad (5.28)$$

La funzione di partizione può quindi essere scritta come:

$$Z = \sum_{\mu} \prod_{j=1}^N (\mathbb{P})_{\mu_j, \mu_{j+1}} = \text{Tr}(\mathbb{P}^N) . \quad (5.29)$$

Per calcolare esplicitamente Z cerchiamo anche in questo caso gli autovalori. Ciò risulta molto difficile dal punto di vista matematico: solo nel 1944 Onsager riuscì a trovare la soluzione per il caso $h = 0$ (ossia in assenza di campo esterno). A tutt'oggi è conosciuta una soluzione analitica unicamente in questo caso. Riportiamo di seguito i risultati di Onsager nel limite termodinamico.

La densità di energia libera risulta essere:

$$f(\beta, h = 0) = -\frac{1}{\beta} \left(\ln [2 \cosh(2\beta J)] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \phi}}{2} d\phi \right) \quad (5.30)$$

dove:

$$x = 2 \frac{\sinh(2\beta J)}{\cosh^2(2\beta J)} . \quad (5.31)$$

Da cui ricaviamo la magnetizzazione trovata dal cinese Yang nel 1952:

$$m(\beta, h = 0) = \begin{cases} \left\{ 1 - [\sinh(2\beta J)]^{-4} \right\}^{\frac{1}{8}} & \text{se } T < T_c \\ 0 & \text{se } T > T_c \end{cases} . \quad (5.32)$$

Da essa deduciamo il valore della temperatura di Curie⁶ ponendo:

$$m(\beta, h = 0) = \left\{ 1 - [\sinh(2\beta J)]^{-4} \right\}^{\frac{1}{8}} = 0$$

ossia:

$$\sinh(2\beta J) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_c = \frac{1}{2J} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5.33)$$

da cui:

$$T_c = \frac{2J}{k_B} \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.27 \frac{J}{k_B} .$$

⁶La temperatura di Curie può essere anche dedotta dalla non analiticità di $f(\beta, h)$, qui ci accontentiamo di ottenerla in corrispondenza dell'annullamento del parametro d'ordine.

Uno sviluppo in serie di $m(\beta, h = 0)$ per β vicino al valore critico permette di ottenere l'esponente critico per la magnetizzazione:

$$m(\beta, h = 0) \approx \left(\frac{8J}{\sqrt{2}k_B T_c} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right)^{1/8}$$

da cui l'esponente critico $\beta = \frac{1}{8}$.

Confrontando questa soluzione con quella ottenuta nell'approssimazione del campo medio notiamo due sostanziali differenze: il valore della temperatura di Curie e l'esponente critico. Naturalmente, a causa della trascurazione delle fluttuazioni nel calcolo del valore medio dell'Hamiltoniana, i dati relativi al punto critico dell'approssimazione risultano poco accurati.

La soluzione esatta del modello di Ising a due dimensioni è un importante traguardo teorico. Esso, infatti, attesta che la fisica statistica è in grado di prevedere l'esistenza di una transizione di fase, anche se, a causa delle difficoltà matematiche, bisogna spesso, come nel caso del campo medio, ricorrere a delle approssimazioni. Grazie all'ottenimento di una soluzione esatta, siamo ora però in condizione di valutare le diverse approssimazioni, potendo fare delle considerazioni riguardo i loro limiti di validità e i loro pregi. In questo modo abbiamo la facoltà d'applicare a ogni situazioni l'approssimazione più confacente.

Infine, dal confronto tra la soluzione lineare e quella planare, risalta l'importanza delle dimensioni dello spazio per lo studio delle transizioni di fase. Abbiamo difatti visto che nel modello di Ising a una dimensione la transizione di fase è completamente assente, mentre in quello a due dimensioni questo fenomeno si manifesta perfettamente.

Ringraziamenti

Quando nel mese di gennaio dell'ormai trascorso 2011 mi fu proposto di scrivere il lavoro di maturità sul modello di Ising, non avevo idea di cosa si trattasse. Dopo aver assistito ad una breve spiegazione, parole come “fisica statistica”, “ferromagnetismo”, “transizione di fase” e “reticolo \mathbb{Z}^2 ” risuonavano nella mia mente, tuttavia le potenziali difficoltà su cui stavo per incombere non mi preoccupavano: avevo piena fiducia nel professor Ferrari, tanto nelle sue competenze quanto nella certezza che mi avrebbe garantito il suo efficiente sostegno costantemente! Ed infatti, fin dal primo giorno, egli mi ha seguito passo dopo passo nell'ambiziosa impresa, dandomi l'opportunità sia di applicare le nozioni apprese in classe, sia di impararne di nuove.

Inoltre, non ha mai cessato di rispondere in modo esaustivo alle mie domande o di assicurarmi un'illuminazione per le tetre pagine di libroni apparentemente incomprensibili, il più delle volte in momenti al di fuori dall'orario scolastico, ma sempre con molta gentilezza e tanta pazienza. Infine, in seguito alla sua revisione, si è verificato un enorme miglioramento della qualità di questo lavoro, così che in futuro quest'ultimo potrà senza dubbio costituire per me un solido punto di riferimento.

Per questo percorso durato ormai più di un anno, lo ringrazio profondamente.

Bibliografia

- [1] S. M. BAHTTACHARJEE, A. KHARE, *Fifty Years of the Exact solution of the Two-dimensional Ising Model by Onsager*, Bhubaneswar Institute of Physics (2005)
- [2] R. J. BAXTER *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press (1989)
- [3] P. CHOQUARD, *Mécanique statistique classique*, EPFL (1994)
- [4] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, B. ROULET, *Physique Statistique*, Hermann (1989)
- [5] M. DROZ, *Transitions de phases, scaling et phénomènes critiques*, Troisième Cycle de la Physique en Suisse Romande (2000)
- [6] C. FERRARI, *Fisica*, LiLo, (2010)
- [7] W. GREINER, L. NEISE, H. STOECKER, *Thermodynamics and statistical mechanics*, Springer, (2004)
- [8] C. GRUBER, *Thermodynamique et Mécanique Statistique*, EPFL (1997)
- [9] K. HUANG, *Statistical mechanics*, John Wiley and Sons (1987)
- [10] G. MUSSARDO, *Modestia magnetica*, SISSA news (2006)
- [11] C. NGÔ, H. NGÔ, *Physique statistique*, Masson (1995)
- [12] Y. VELENIK, *Le modèle d'Ising*, UNIGE (2009)
- [13] C. N. YANG, *Selected papers (1945-1980) with commentary*, World Scientific, (2005)
- [14] R. ZIVIERI, *Teorie di campo medio*, UNIFE (2012)
- [15] http://personal.rhul.ac.uk/uhap/027/PH4211/PH4211_files/brush67.pdf, (gennaio 2012)
- [16] <http://www.physnet.uni-hamburg.de/feier.htm>, (gennaio 2012)
- [17] http://www.treccani.it/enciclopedia/meccanica-statistica_28Enciclopedia-Novecento29/, (gennaio 2012)
- [18] http://en.wikipedia.org/wiki/Ising_model, (dicembre 2011)
- [19] http://it.wikipedia.org/wiki/Lars_Onsager, (febbraio 2012)