Mathematikunterricht zwischen heute und morgen

Welche Bedeutung kommt dem Einsatz von Technologie zu?

«CAS, Taschenrechner, Tablets und Laptops» oder «Back to the roots» Herausforderungen für den Mathematikunterricht

Norbert Hungerbühler

ETH Zürich

Der Einsatz von Hilfsmitteln und Geräten in der Mathematik ist nicht neu

- Zirkel und Lineal in der Geometrie
- Tafeln, z. B. für Logarithmen
- Rechengeräte: Abakus, Rechentische, Nomogramme, Rechenschieber, mechanische Rechenmaschinen (z. B. Curta), Taschenrechner, CAS und graphikfähige Taschenrechner, PC, Grossrechner, Mathematica, Maple, Sage, PhotoMath ...

Solche Hilfsmittel wirken auf die Entwicklung der Mathematik und des Unterrichts zurück:

- Welche Konstruktionsaufgaben lassen sich mit Zirkel und Lineal lösen? $\rightsquigarrow$ Galois-Theorie
- Welche elementaren Funktionen haben elementare Stammfunktionen? $\rightsquigarrow$ Risch-Algorithmus

Die Frage nach dem angemessenen Mitteleinsatz

Die Errungenschaften unserer Zivilisation äussern sich oftmals in der Entwicklung von Hilfsmitteln, welche die natürlichen Fähigkeiten des Menschen potenzieren:

- Niemand sollte zum Brötchen holen das Auto benützen, wenn der Bäcker nur ein paar Schritte entfernt ist.
- Für weite Reisen jedoch sind moderne Fortbewegungsmittel nicht wegzudenken.
- Hilfsmittel kommen auch zum Einsatz, um Menschen mit Behinderung ihre Bewegungsfreiheit wenigstens teilweise zurückzugeben.

Funktionen des Computers in der (Schul-)Mathematik

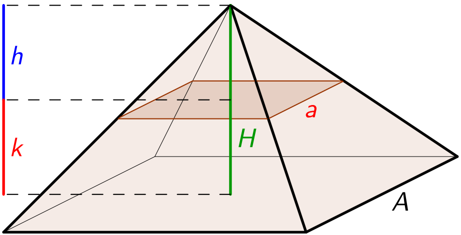
- **Visualisieren.** Erkenntnisgewinn, Verständnisförderung, ästhetischer Wert. Graphen, Kurven, Flächen, Richtungsfelder
  - *einfach*: von Hand eine lineare Funktion zeichnen
  - *unverzichtbar*: von Hand die Graphen von $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sin(x)$, etc. zeichnen
  - *legitim*: für kompliziertere Beispiele, wie $x \mapsto 2\sin(\frac{x}{2}) + \cos(x)$ den Computer benützen
- **Rechnen.** Der PC als Rechenknecht
  - siehe Beispiel unten
- **Simulationen/Numerik.** Erspart kostspielige Experimente, ermöglicht undurchführbare Experimente. Stochastische und numerische Modelle: Klimaprognosen, globale Ausbreitung von Krankheiten ...
- **Intelligenzverstärker.** Beweis des Vierfarbensatzes, Klassifizierung endlicher einfacher Gruppen ...
- **Archivierung/Recherche.** MathSciNet, Digital Math Library, Encyclopedia of integer sequences, Inverse symbolic calculator

Aufgeworfene Fragen

- Kann oder soll dank Einsatz des Computers eine Verwesentlichung des Mathematikunterrichtes stattfinden, indem Routinerechungen an die Maschine delegiert werden und damit der Blick auf Konzepte und Ideen frei wird? Also: Weg von den Prozeduren, hin zu den Inhalten?
- Wird der Unterricht dadurch anspruchsvoller? Konzepte und Ideen sind für viele SuS ein schwerer zu erreichendes Bildungsziel, als das Lernen eines Kochrezepts. Auch die Bedienung des Computers muss zusätzlich gelernt werden.
- Ist die Verlässlichkeit, der "contrat didactique", in Gefahr?

CAS: Ein Beispiel

Aufgabe. Gegeben ist die Grundkante $A = 10$ und die Höhe $H = 20$ einer quadratischen Pyramide. Die Pyramide soll parallel zur Grundfäche abgeschnitten werden, so dass der Stumpf nur noch den q-ten Teil des Volumens der ganzen Pyramide besitzt mit $q = \frac{3}{4}$. Bestimmen Sie die Deckkante und die Höhe des Stumpfes.



Lösung mit Derive

```
SOLVE([A=10, H=20, q=3/4,
Ganzes=Abgeschnittenes + Stumpf,
Abgeschnittenes = 1/3*a^2*h,
Ganzes=1/3*A^2*H,
Stumpf=q*Ganzes,
a/h=A/H,
H=k+h],[a,k],[Stumpf,Abgeschnittenes,Ganzes,h])
```

führt auf

```
[k=20-10*2^(1/3), a=5*2^(1/3)]
```

Im Vergleich zu einer konventionellen Lösung:

- Was bleibt gleich?
- Was kommt an Schwierigkeit oder Erkenntnis hinzu?
- Was verliert man (und vermisst es)?
- Was fällt weg (und man ist froh, dass es weg ist)?

Ziele des Unterrichts in elementarer Algebra angesichts von CA

- Begriffe *Variablen, Terme, Gleichungen* kennen und verstehen
- Terme und Gleichungen aufstellen können
- Aus Termen Informationen herauslesen können
- Termstruktur erkennen
- Idee und Bedeutung von Termumformungen verstehen und einfache Termumformungen vornehmen können
- Einfache Gleichungen lösen können und das Vorgehen verstehen und begründen können
- Erkennen, wann sich der Einsatz eines CAS lohnt
- Die Benutzung eines CAS steuern, und die erhaltenen Resultate bewerten können
- Mit Hilfe des CAS gewonnene Resultate angemessen dokumentieren können

Wieviel Termumformung braucht der Mensch angesichts von CAS?

... und wieviel Grammatik und Orthographie angesichts von Spelling Checkern?

Soll man so eine Aufgabe noch stellen:

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}=3$$

Pointe: Struktur erkennen $z+\frac{2}{z}=3$.

Gegen eine Behandlung spricht:

- Die Aufgabe hat keine Bedeutung an sich
- Sie ist lösbar nur, weil sie entsprechend konstruiert wurde
- CAS liefert sofort die Lösung
- Frustration für erfolglose SuS

Für eine Behandlung spricht:

- Die Aufgabe übt und fördert das Erkennen von Strukturen
- Genugtuung für erfolgreiche SuS

Problem: Es gibt keine konsolidierten Erkenntnisse.

Folgende Tabelle stammt aus *Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?* Sie gibt an, welche Komplexität von Termen mit respektive ohne CAS nach Ansicht der deutsch-österreichischen Arbeitsgruppe zu behandeln und zu beherrschen sind.

ohne CAS	**???**	**mit CAS**
Vereinfache $\frac{a}{5} \cdot 5$		Vereinfache $\frac{100x^3y^2}{10xy^5}$
Vereinfache $\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}$		Vereinfache $\frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{3ac}$
Vereinfache $2a - \frac{a}{3}$		Vereinfache $2a - \frac{a}{3} + \frac{a}{7}$
Schreibe ohne Klammern: $a - (b + 3)$		Schreibe ohne Klammern: $3a^2(5a - 2b)$
Schreibe ohne Klammern: $2(a + b)$		Schreibe ohne Klammern: $(a^2 - 3b)(-3a + 5b^2)$
Schreibe ohne Klammern: $2(ab)$		Schreibe ohne Klammern: $(2a + t)^2$
Schreibe ohne Klammern: $3(5a - 2b)$		Schreibe ohne Klammern: $(5 + q)^3$

Löse nach x: $5x - 6 = 15$		Löse nach x: $5x - 6 = 2x + 15$
Löse nach x: $\frac{x}{3} = 5$		Löse nach x: $2x + 3 = \frac{4}{3}$
Löse nach x: $x^2 - 4 = 0$		Löse nach x: $9x^2 - 4 = 0$
Löse nach x: $x^2 - 4x = 0$		Löse nach x: $2x^2 - 5x + 9 = 0$
Löse nach x: $A = 4\pi x^2$		Löse nach v_0: $x = \frac{1}{2a} v_0^2$

Differenziere nach x $\sin(x)$	Differenziere nach x $x^2 + \cos x$	Differenziere nach x $x \sin(x)$
	Differenziere nach x $2\sin(x)$	Differenziere nach x $\sin^2 x$
Differenziere nach x e^x	Differenziere nach x e^{2x}	Differenziere nach x 2^x

Ansichten in der Schweiz

Nach Peter Gallin

- Vereinfache folgende Terme, indem du möglichst kleine Schritte aufschreibst und jede Umformung mit dem zutreffenden Namen bezeichnest:

$$\frac{w^4 + 3w^3 + 3w + w}{v^2 w^2 + 2v^2 w + v^2}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c}{ab}\right)(a + b + c) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{c^2}{a^2 b^2}\right)$$

- Bestimme die Lösungsmenge der drei folgenden Gleichungen und erkläre, warum sie im Kopf gelöst werden können (schreibe die Schritte auf, die man im Kopf machen kann):

$$\frac{5}{x-5} + \frac{x}{5-x} = \frac{5}{x-9}$$

$$\frac{5}{x-5} + \frac{x}{5-x} = \frac{5}{x-10}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{3}{n-2}\right)\frac{1}{n} = 0$$

Nach Hansruedi Schneebeli

- Lösen Sie folgende Aufgaben von Hand ohne Rechnerhilfe. Geben Sie bitte an, wie Sie bei der Lösung vorgehen. Kommentieren Sie die Ergebnisse. Welche Bedingungen muss der Parameter a erfüllen, damit die Lösung existiert?
  1. $(t+a)^5 - (t-a)^5 = 4a^5$ nach t auflösen
  2. $(x+a)^3 - (x-a)^3 = 0$ nach x auflösen
  3. $\sqrt{y+a} - \sqrt{y-a} = 1$ nach y auflösen
  4. $\sqrt{z+a} + \sqrt{z-a} = -1$ nach z auflösen
  5. Welche Paare u, v sind Lösungen des Systems?
  $$\begin{aligned} u^{1/3} + 3v^{-2} &= 2 \\ 2u^{1/3} + 7v^{-2} &= 5 \end{aligned}$$
  6. $(r - a\sqrt{r})^2 + 600 = (r - a\sqrt{r})^4$ nach r auflösen
- Lösen Sie die Gleichungen der vorangehenden Aufgaben mit dem CAS ihres Taschenrechners. Geben Sie bitte an, wie Sie bei der Lösung vorgehen, dokumentieren Sie den CAS-Einsatz genau. Kommentieren Sie die Ergebnisse analog zur Handaufgabe.

Hindernisse bei der Benützung von CAS

Die Studie von Paul Drijvers zum Einsatz des TI-92 belegt, dass der Unterricht durch CAS keineswegs zum Selbstläufer wird: für schwächere Schüler stellt der Rechner zusätzliche Schwierigkeiten dar.

1. The difference between the algebraic representations provided by the CAS and those students expect and conceive as "simple".
2. The difference between numerical and algebraic calculations and the implicit way the CAS deals with this difference.
3. The limitations of the CAS and the difficulty in providing algebraic strategies to help the CAS to overcome these limitations.
4. The inability to decide when and how computer algebra can be useful.
5. The flexible conception of variables and parameters that using a CAS requires.

Ad 3: Satz von Richardson.
Ad 5: Der mathematische Variablenbegriff unterscheidet sich vom informatischen.

CAS im Unterricht: Geschichte und Stand

- CAS-Software ab 1990 an Mittelschulen (Maple, Mathematica): Noch wenige Computerräume, daher nur punktuell und ohne Auswirkung auf den Unterricht.
- Intensiver Einsatz von CAS-Taschencomputern ab 1996 an einzelnen Mittelschulen. Ab ca. 2000 auf immer breiterer Basis.
- 2007: etwa 70% der schweizerischen Gymnasien und Berufsmittelschulen setzen CAS ein (kantonal unterschiedlich). Erste Laptopklassen und Klassen mit Grafikrechnern.
- Heute: Einzelne Gymnasien setzen ganz auf Laptop/Tablet. Andere gehen zurück zum TI-30.

Einsatz an den Universitäten

- Vor allem in naturwissenschaftlichen und Ingenieurstudiengängen kommt professionelle Software ab dem 1. Semester zum Einsatz
- An Prüfungen sind Taschenrechner meist nicht erlaubt – sie würden aber auch nichts nützen
- Hochschuldozierende haben kaum eine Ahnung von CAS-Taschenrechnern
- CAS kommt in der Lehrerausbildung nicht überall vor
- Ingenieure und Naturwissenschaftler verwenden im Beruf nicht CAS-Rechner sondern professionelle Software
- Universitäten erwarten, dass Neueintretende mit Computern und mathematischer Software in Berührung gekommen sind

Stellungnahme des D-MATH der ETH Zürich zum Thema Taschenrechner im gymnasialen Mathematikunterricht

Nach Meinung des D-MATH der ETH Zürich entscheidet sich die Qualität von Mathematikunterricht nicht daran, ob Rechner benutzt werden oder nicht.

Allerdings können Rechner den Mathematikunterricht unterstützen. Zum Beispiel kann durch Visualisierung von mathematischen Sachverhalten Verständnis gefördert werden. Indem Routinerechnungen abgetreten werden können, kann u. U. die Konzentration auf Wichtigeres gelenkt werden. Schliesslich ist zu bedenken, dass der Rechner in der forschenden Auseinandersetzung mit Mathematik oft die Rolle eines Labors übernimmt in dem experimentiert werden kann. Und es ist klar, dass in vielen Anwendungssituationen Rechner unentbehrlich sind. Was ein Algorithmus, ein Programm ist gehört zur Allgemeinbildung. Wir erwarten deshalb, dass die Absolventinnen und Absolventen der Gymnasien eine gewisse Erfahrung mit Rechnern haben und selber ein paar Programme geschrieben und getestet haben.

Das D-MATH ist für den gesamten Mathematikunterricht an der ETH Zürich verantwortlich. Alle Studierenden erhalten eine vertiefte mathematische Ausbildung, die auf den Fähigkeiten und Fertigkeiten aufbaut, die sie auf den früheren Stufen, insbesondere im Gymnasium erworben haben. Damit das D-MATH seine Aufgabe erfüllen kann, ist es darauf angewiesen, dass die Neueintretenden eine tragfähige mathematische Basis mitbringen, d. h. sie müssen den gymnasialen Mathematikstoff sehr gut verstanden haben und flexibel nutzen können. Dazu gehört auch eine gewisse (Hand-)Rechenfertigkeit und Rechensicherheit, etwa im algebraischen Umformen, Differenzieren usw. Es würde ohne Zweifel nicht im Interesse des D-MATH der ETH liegen, wenn die Studierenden in Zukunft schon für einfache Zahlenrechnungen und Umformungen etc. zum Rechner greifen müssten.

Es wird manchmal gefragt, warum in der 1. Vordiplom- bzw. Basisprüfung Rechner meistens verboten sind, selbst wenn die Studierenden in den Übungen aufgefordert werden Rechner zu benutzen, wobei auf Hochschulstufe natürlich nicht primär Taschenrechner, sondern meist noch leistungsfähigere Instrumente Verwendung finden.

Die Gründe sind juristischer und praktischer Natur. Es gibt oft Prüfungen mit Hunderten von Kandidatinnen und Kandidaten. Es muss sicher gestellt sein, dass alle Teilnehmenden die gleiche Chance haben, und die Durchführung der Prüfungen muss praktikabel bleiben. Es wird deshalb schwerpunktmässig das Verständnis von Konzepten geprüft und zwar in einer Form, die von Hand zu bewältigen ist.

Ergebnisse aus Studien

- Die Kompetenz (vor allem fachliche) der Lehrkraft ist entscheidend für den Mehrwert von CAS.
- Es fehlen geeignete Lehrmittel.
- Die Verwendung von CAS im Unterricht kann schrittweise erfolgen. Sie führt fast zwangsläufig zu einem schülerzentrierten und mehr anwendungsorientierten Unterricht. Nach österreichischen Studien führt CAS zu mehr Sachkompetenz und methodischer Kompetenz.
- Wichtig ist eine ausgewogene Mischung zwischen Fertigkeiten mit und ohne Rechner.
- Wichtig ist auch, dass die Rechner in den Prüfungen (zum Teil) auch verwendet werden können. Sonst ist das Interesse der SuS weit weniger gross.

Argumente pro CAS

- MINT-Unterricht wird interessanter
- hilft schwächeren SuS, indem fehlendes Basiswissen und handwerkliche Defizite überbrückt werden können
- Technische Schwierigkeiten bei der Einführung eines neuen Themas können ausgeblendet werden
- Man darf den Schülern diese Technik nicht vorenthalten: Man würde auch keinem Medizinstudenten die Computer-Tomographie vorenthalten mit dem Argument, er müsse auch in der Lage sein, ohne dieses Hilfmittel Diagnosen zu stellen.
- fördert numerische & algorithmische Aspekte (Link zur Informatik)
- fördert Motivation und Interesse
- Grundlage für Schüler, die später Hard-Sciences studieren
- Spielen mit Parametern, was sonst zu aufwändig ist
- (realistischere) Aufgaben werden möglich, die sonst ausserhalb der Reichweite liegen
- Experimentieren, entdecken, simulieren

Argumente contra CAS

- Zeitverlust durch Partikulärkenntnisse über bestimmte Geräte
- Verlust von Handfertigkeit
- Kosten (kinderreiche Familien)
- Verführt zu unkritischem Umgang: Schüler setzen zuviel Vertrauen in die Maschine. Es mangelt am Verständnis, warum die Mathematik mehr ist als was der Rechner kann.
- Numerische Resultate sind intransparent
- Uneinheitliche Schullösungen generieren Schwierigkeiten
- Bei schwächeren Schülern stellt der Rechner eine zusätzliche Hürde dar
- Wo man früher für Routinezwischenschritte in Prüfungen noch Punkte geben konnte, geht das nun nicht mehr, wieder zum Nachteil schwächerer Schüler.
- Gewisse wertvolle Aufgaben werden nicht mehr behandelt, weil sie (mit dem Rechner) "trivial" geworden sind.
- Die Matura wird schwieriger
- Elektronischer Spickzettel

Möglicher Umgang mit CAS

- Schüler sollen beides können: Rechner sinnvoll einsetzen und Aufgaben auch ohne ihn lösen.
  - Rechner erst ab Klasse x einsetzen
  - Rechner für einzelne Klausuren oder einzelne Aufgaben verbieten
  - In Klausuren Zwischenschritte verlangen (Rechner nur als Kontrolle)
  - Regelmässig Aufgabenblätter mit Routineaufgaben ohne Rechner
  - Die Lehrperson schreibt vor, gewisse Rechenprozesse ohne Rechner auszuführen. Ist die nötige handwerkliche Routine erlangt, kann auch wieder der Rechner eingesetzt werden.
- Einsatz in Prüfungen auf den Einsatz im Unterricht abstimmen.
- Informatik und Software ändern sich im Detail rasant, es gibt aber fundamentale Konzepte, vermittelt werden sollen.

Thesen und Folgerungen

- Einsatz von CAS in Kombination mit Rechnungen von Hand
- Wer CAS im Unterricht einsetzt, muss **Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden entsprechend anpassen**. Unterricht, der CAS integriert, darf sich nicht darin erschöpfen, traditionelle Aufgaben mit dem Taschenrechner zu behandeln.
- Der Einsatz von CAS muss sich sinnvoll und kritisch hinterfragend an den Inhalten ausrichten, ohne die handwerklichen Fertigkeiten zu vernachlässigen.
- Internet, Visualisierungs- und Geometriesoftware sowie CAS und andere Hilfsmittel haben ihren Platz in jedem modernen Mathematikunterricht.
- Themen wie Kurvendiskussion oder das Auffinden von Stammfunktionen bei verzwickten Integranden haben im Zeitalter von CAS an Bedeutung verloren.
- CAS darf nicht zum Verlust der Rechenfertigkeit führen: Hochschulen erwarten handwerkliches Können beim Auflösen von Gleichungen und Ausführen von längeren Rechnungen, um die Erfordernisse des Studiums meistern zu können.

- Chance, die Mathematik verstehensorientierter zu lehren.
- Einsatz von Gerüstdidaktik und Blackbox-Whitebox Prinzip
- Mathematik bietet als (fast) einziges Fach das Lernen von Problemlösungsstrategien (Alleinstellungsmerkmal). Diese Stärke gilt es auch mit CAS auszuspielen.
- Freude wecken bei den Schülern
  - an der Schönheit der reinen Mathematik (Beweise, Strukturen)
  - an der Nützlichkeit der angewandten Mathematik
  - am Wechselspiel der beiden
- Denken macht Freude. CAS darf das Denken nicht unterbinden
- Vernetzung der Fächer ist sinnvoll: Im Mathematikunterricht werden Themen anderer Fächer aufgegriffen und mit mathematischen Methoden exemplarisch behandelt. Umgekehrt können in anderen Fächern vermehrt mathematische Methoden eingesetzt werden.
- Auch innerhalb der Mathematik das Prinzip der Vernetzung pflegen (z.B. geometrische Themen unter analytischen Aspekten behandeln und umgekehrt).