# Teil (D): Schüttelbeweise

Beispiel 1

Der folgende Text erklärt, warum ein $n \times n-$LGS üblicherweise genau eine Lösung in Form eines $n$-Tupels hat. Leider sind die einzelnen Sätze durcheinandergeraten. Können Sie die richtige Reihenfolge wiederherstellen?

(i) Mit diesem verkleinerten System arbeiten wir in analoger Weise weiter. Wir lösen also erneut eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzen das Erhaltene in allen restlichen Gleichungen ein.

(ii) Angenommen, es ist ein $n \times n-$LGS zu lösen.

(iii) Durch Rückwärtseinsetzen lassen sich nun auch alle restlichen Unbekannten bestimmen.

(iv) Das $1 \times 1-$LGS ist eine Gleichung in einer Unbekannten.

(v) Auf diese Weise entsteht ein $(n-1)\times(n-1)-$LGS.

(vi) Wir erhalten am Ende also genau eine Lösung in Form eines $n$-Tupels.

(vii) Wir wenden die Substitutionsmethode an, lösen also die erste Gleichung nach der ersten Unbekannten auf und setzen das Erhaltene in allen restlichen Gleichungen ein.

(viii) Wir können diese Unbekannte folglich bestimmen.

(ix) Wenn alles normal läuft, landen wir schliesslich bei einem $2 \times 2-$ und dann bei einem $1 \times 1-$LGS.

(x) So wird das Format des Systems mit jedem Schritt um eine Gleichung und eine Unbekannte verkleinert.

Die richtige Reihenfolge ist: (ii) → → → → → → → → →

Beispiel 2:

Beweis:

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und $f(x) = x^n$.

Wir müssen zeigen, dass $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ist.

Gemäss Definition der Ableitung gilt Folgendes:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Setzt man unsere spezielle Funktion ein, so erhält man:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{(x+h)^n - (x)^n}{h}\right)$$

Denkt man sich $x + h \triangleq a$ und $x \triangleq b$, so lässt sich das dank unserer Hilfsformel für $a^n - b^n$ so umformen:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{(x+h-x)\cdot\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + (x+h)^{n-3}\cdot x^2 \ldots + x^{n-1}\right)}{h}\right)$$

Der erste Faktor des Zählers ist gleich $h$ und kann folglich gekürzt werden. Dann erhält man:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + (x+h)^{n-3}\cdot x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)$$

Lässt man nun $h$ gegen 0 streben, so ergibt sich:

$$f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

Wegen eines Potenzgesetzes ist jeder Summand gleich $x^{n-1}$, und es sind insgesamt $n$ Summanden. Also gilt:

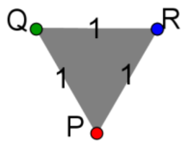
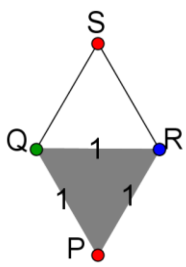
$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

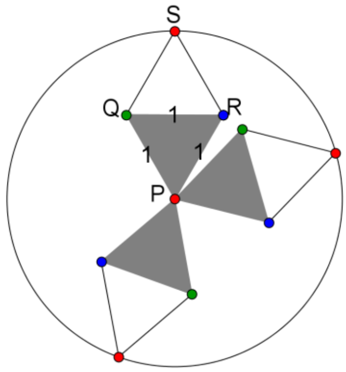
was ja zu beweisen war.

$\square$

Beispiel 3:

Voraussetzung:
In der x-y-Ebene (mit der üblichen Metrik) sei jedem Punkt eine der drei Farben Rot, Grün, Blau per Zufall zugeordnet worden.
Behauptung:
Man kann sicher zwei gleichfarbige Punkte im Abstand 1 finden.

| | |
|---|---|
| Beweis: | 17 |
| Sei P ein beliebiger Punkt dieser Ebene. | 3 |
| o.B.d.A. sei er rot gefärbt. | 88 |
| Wir treffen die Gegenannahme, dass die Behauptung falsch ist, dass sich also nie zwei gleichfarbige Punkte im Abstand 1 finden lassen. | 0 |
| Dann haben die beiden Punkte Q und R, die wir beliebige gewählt haben, aber so, dass $\triangle PQR$ gleichseitig mit Seitenlänge 1 ist, sicherlich die Farben Grün und Blau.   | 14 |
| Und der Punkt S, der die Spiegelung von P an QR ist, hat dann sicherlich die Farbe Rot.   | 25 |

| | |
|---|---|
| Dieselbe Überlegung wäre noch immer gültig, wenn die ganze Situation um P herum verdreht ist. Egal, um welchen Winkel wir die Figur um P herum drehen, stets muss das Pixel S rot gefärbt sein.<br><br> | 1 |
| Unsere Annahme hätte also die Konsequenz, dass die Kreislinie um P mit Radius $\sqrt{3}$ konstant rot gefärbt sein müsste. | 12 |
| Auf einer Kreislinie mit Radius $\sqrt{3}$ lassen sich aber unendlich viele Paar gleichfarbiger Punkte mit Abstand 1 finden. | 46 |
| Dies ist ein Widerspruch zu unserer Gegenannahme und zeigt, dass diese falsch sein muss. | 91 |
| Somit ist die Behauptung bewiesen. $\square$ | 33 |