

# Ein Ausflug in die Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

ETH Zürich

## ETH Studienwochen Mathematik über Kurven:

- ▶ Kurven konstanter Breite: Orbiforme
- ▶ Die Wasserstrahlkurve
- ▶ Kettenlinie, stabiler Bogen, Hängebrücken
- ▶ Mit der Leiter um die Kurve: Hüllkurven
- ▶ Kegelschnitte
- ▶ Das Brachistochronen Problem
- ▶ Kaustiken
- ▶ Kurven auf der Strasse: Die Klothoide
- ▶ Das Quecksilberteleskop
- ▶ Evolvente (Involute) und Evolute

### Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

## ETH Studienwochen Mathematik über Kurven:

- ▶ Kurven konstanter Breite: Orbiforme
- ▶ Die Wasserstrahlkurve
- ▶ Kettenlinie, stabiler Bogen, Hängebrücken
- ▶ Mit der Leiter um die Kurve: Hüllkurven
- ▶ Kegelschnitte
- ▶ Das Brachistochronen Problem
- ▶ Kaustiken
- ▶ Kurven auf der Strasse: Die Klothoide
- ▶ Das Quecksilberteleskop
- ▶ Evolvente (Involute) und Evolute

## Heute eine kleine Auswahl, und

- ▶ Spaghettikurven
- ▶ Zahnräder

### Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

# Voraussetzungen in der Schule

Je nachdem was man machen will. . .

- ▶ (Vektor-)Geometrie
- ▶ Ableitung
- ▶ Integral
- ▶ Differentialgleichungen
- ▶ Numerik
- ▶ Physik

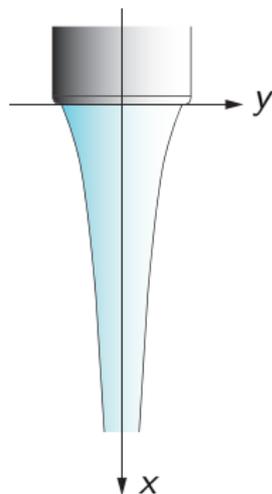
Darstellung von Kurven:

- ▶ Kurven als Graphen
- ▶ reelle/komplexe Parameterdarstellung von Kurven
- ▶ implizite Darstellung (Niveaukurven)

Auszugsweise geeignet für das Grundlagenfach.

Gut geeignet für PAM oder Maturaarbeiten.

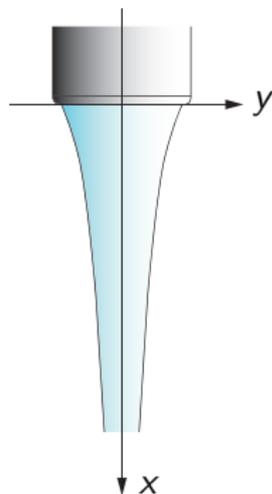
# Die Wasserstrahlkurve



## Annahmen

- ▶ Strahl fällt senkrecht nach unten
- ▶ Ideale Flüssigkeit (inkompressibel, keine Reibung, keine Oberflächenspannung)
- ▶ Existenz einer eindeutigen stationären Lösung
- ▶ Öffnung vom Radius  $r$
- ▶ Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$
- ▶ Erdbeschleunigung  $g$

# Die Wasserstrahlkurve



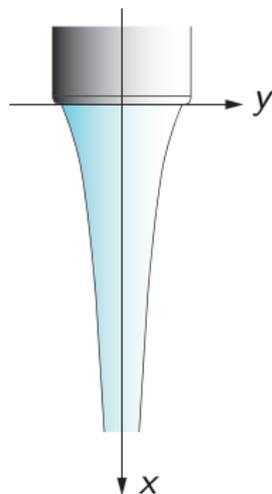
## Annahmen

- ▶ Strahl fällt senkrecht nach unten
- ▶ Ideale Flüssigkeit (inkompressibel, keine Reibung, keine Oberflächenspannung)
- ▶ Existenz einer eindeutigen stationären Lösung
- ▶ Öffnung vom Radius  $r$
- ▶ Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$
- ▶ Erdbeschleunigung  $g$

## Erste Folgerung

Eindeutigkeit der Lösung  $\implies$  Wasserkörper ist ein Rotationskörper

# Die Wasserstrahlkurve



## Annahmen

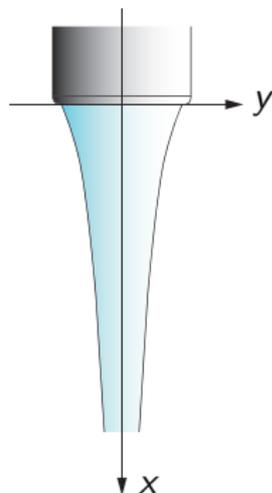
- ▶ Strahl fällt senkrecht nach unten
- ▶ Ideale Flüssigkeit (inkompressibel, keine Reibung, keine Oberflächenspannung)
- ▶ Existenz einer eindeutigen stationären Lösung
- ▶ Öffnung vom Radius  $r$
- ▶ Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$
- ▶ Erdbeschleunigung  $g$

## Erste Folgerung

Eindeutigkeit der Lösung  $\implies$  Wasserkörper ist ein Rotationskörper

**Gesucht:** Die Konturkurve

# Die Wasserstrahlkurve



## Annahmen

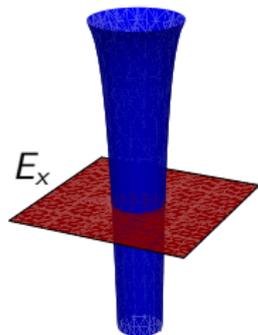
- ▶ Strahl fällt senkrecht nach unten
- ▶ Ideale Flüssigkeit (inkompressibel, keine Reibung, keine Oberflächenspannung)
- ▶ Existenz einer eindeutigen stationären Lösung
- ▶ Öffnung vom Radius  $r$
- ▶ Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$
- ▶ Erdbeschleunigung  $g$

## Erste Folgerung

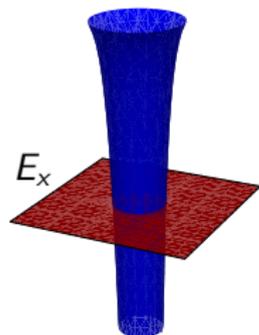
Eindeutigkeit der Lösung  $\implies$  Wasserkörper ist ein Rotationskörper

**Gesucht:** Die Konturkurve

**Koordinaten:**  $x$ -Achse = Symmetrieachse des Wasserstrahls (nach unten) mit  $x = 0$  bei der Austrittsöffnung. Die Konturkurve sei Graph der Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

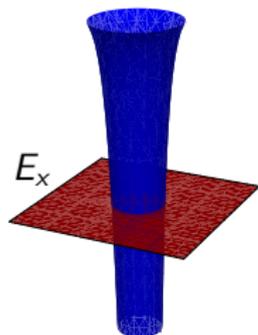


**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).



**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).

Mit welcher Geschwindigkeit  $v(x)$  fließt das Wasser durch  $E_x$ ?

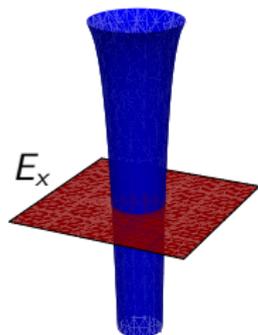


**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).

Mit welcher Geschwindigkeit  $v(x)$  fließt das Wasser durch  $E_x$ ?

**Energiesatz für eine kleine Wassermasse  $m$ :**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx = \frac{1}{2}mv^2(x)$$

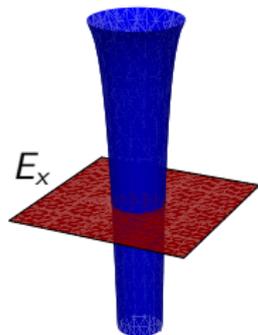


**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).

Mit welcher Geschwindigkeit  $v(x)$  fließt das Wasser durch  $E_x$ ?

**Energiesatz für eine kleine Wassermasse  $m$ :**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx = \frac{1}{2}mv^2(x) \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$$



**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).

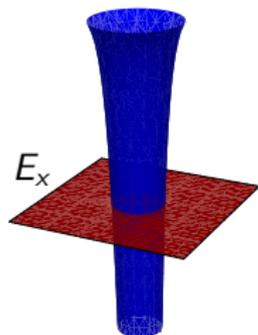
Mit welcher Geschwindigkeit  $v(x)$  fließt das Wasser durch  $E_x$ ?

**Energiesatz für eine kleine Wassermasse  $m$ :**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx = \frac{1}{2}mv^2(x) \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$$

In der Zeit  $t$  fließt nun die Wassermenge

$$\pi f^2(x)v(x)t = \pi r^2 v_0 t$$



**Idee:** Betrachte Ebenen  $E_x$  welche die  $x$ -Achse auf der Höhe  $x$  senkrecht schneiden. Durch jede dieser Ebenen fließt pro Zeiteinheit die selbe Menge Wasser (Flüssigkeit ist inkompressibel, Lösung stationär).

Mit welcher Geschwindigkeit  $v(x)$  fließt das Wasser durch  $E_x$ ?

**Energiesatz für eine kleine Wassermasse  $m$ :**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgx = \frac{1}{2}mv^2(x) \quad \Longrightarrow \quad v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$$

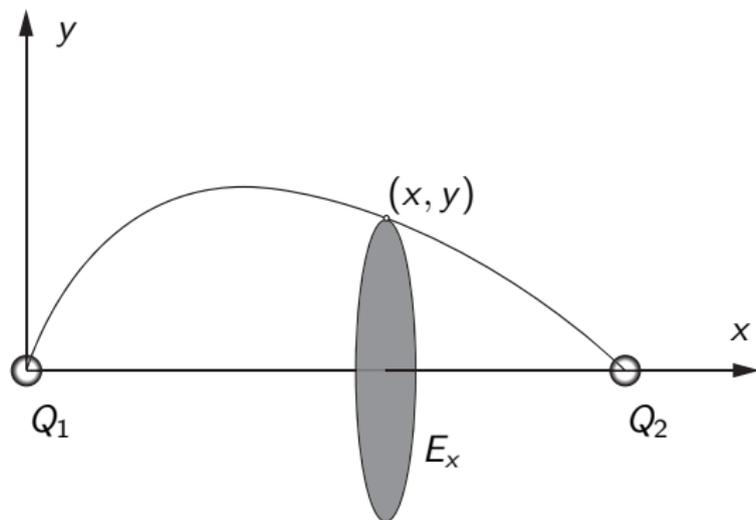
In der Zeit  $t$  fließt nun die Wassermenge

$$\pi f^2(x)v(x)t = \pi r^2 v_0 t$$

$v(x)$  einsetzen und auflösen liefert:

$$f(x) = r \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \frac{2gx}{v_0^2}}}$$

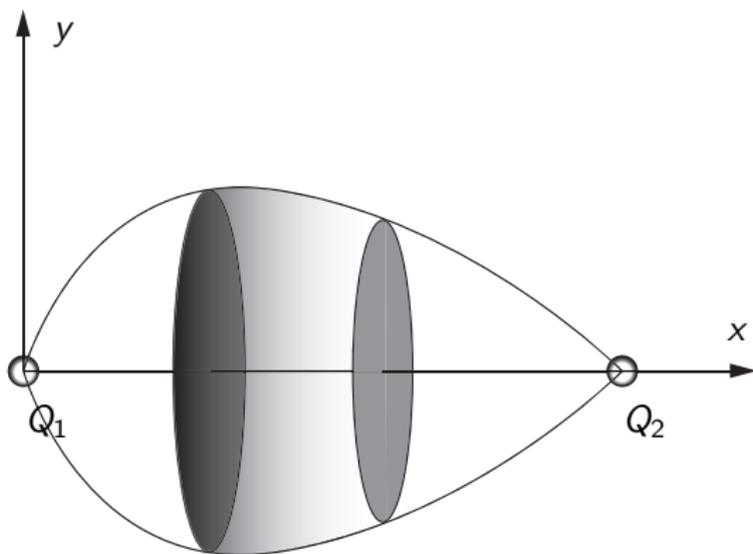
## Anwendung: Elektrische Feldlinien eines Dipols



**Idee:** Entlang einer Feldlinie ist der Fluss des Feldes durch jede Kreisscheibe  $E_x$  vom Radius  $y$  konstant (Gesetz von Gauß).

Die Ladung  $Q_1$  liegt in  $(0,0)$ , die Ladung  $Q_2$  in  $(1,0)$ . Die Einheiten seien so gewählt, dass alle vorkommenden physikalischen Konstanten 1 sind.

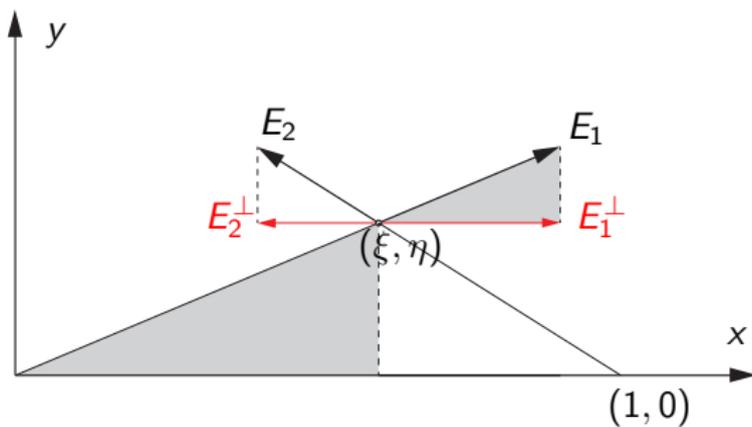
## Anwendung: Elektrische Feldlinien eines Dipols



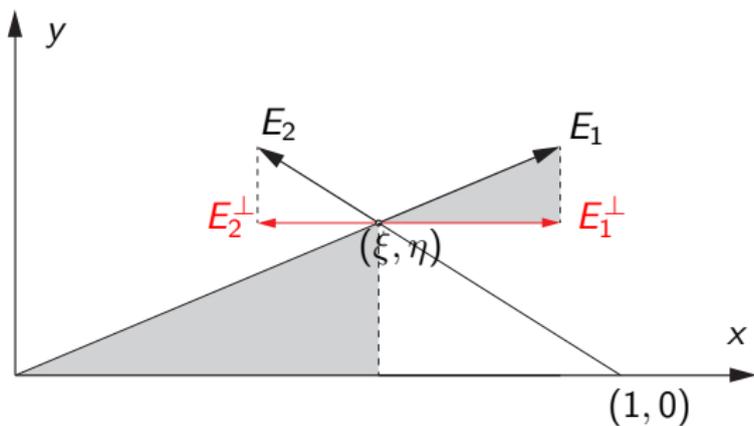
**Idee:** Entlang einer Feldlinie ist der Fluss des Feldes durch jede Kreisscheibe  $E_x$  vom Radius  $y$  konstant (Gesetz von Gauß).

Die Ladung  $Q_1$  liegt in  $(0,0)$ , die Ladung  $Q_2$  in  $(1,0)$ . Die Einheiten seien so gewählt, dass alle vorkommenden physikalischen Konstanten 1 sind.

## Anwendung: Elektrische Feldlinien eines Dipols



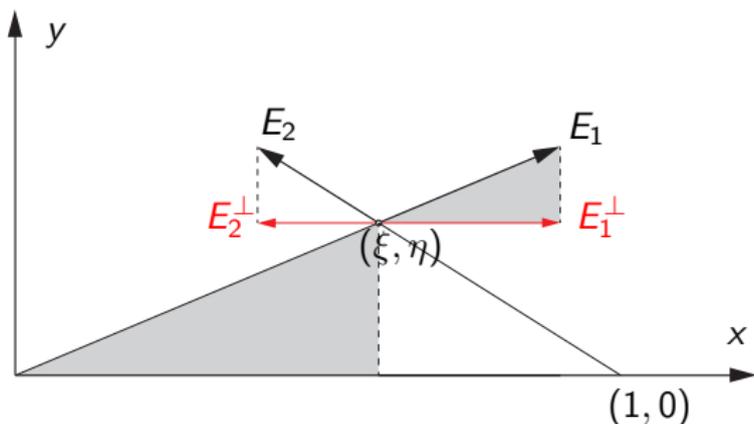
## Anwendung: Elektrische Feldlinien eines Dipols



$$E_1 = \frac{Q_1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad E_1^\perp = E_1 \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{Q_1 \xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$\text{Analog: } E_2^\perp = \frac{Q_2(\xi - 1)}{((\xi - 1)^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

## Anwendung: Elektrische Feldlinien eines Dipols



$$E_1 = \frac{Q_1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad E_1^\perp = E_1 \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{Q_1 \xi}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

$$\text{Analog: } E_2^\perp = \frac{Q_2(\xi - 1)}{((\xi - 1)^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

Fluss durch die Kreisscheibe  $E_x$ :  $\psi_x := \int_0^y (E_1^\perp + E_2^\perp) 2\pi\eta d\eta$

Kurze Rechnung für  $0 \leq x \leq 1$  liefert

$$\psi_x = 2\pi \left( Q_1 - Q_2 - \frac{Q_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - \frac{Q_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \text{konst.}$$

Kurze Rechnung für  $0 \leq x \leq 1$  liefert

$$\psi_x = 2\pi \left( Q_1 - Q_2 - \frac{Q_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - \frac{Q_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \text{konst.}$$

Die Feldlinien sind also die Niveaukurven der Funktion

$$\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{qx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

für  $q = Q_1/Q_2$ .

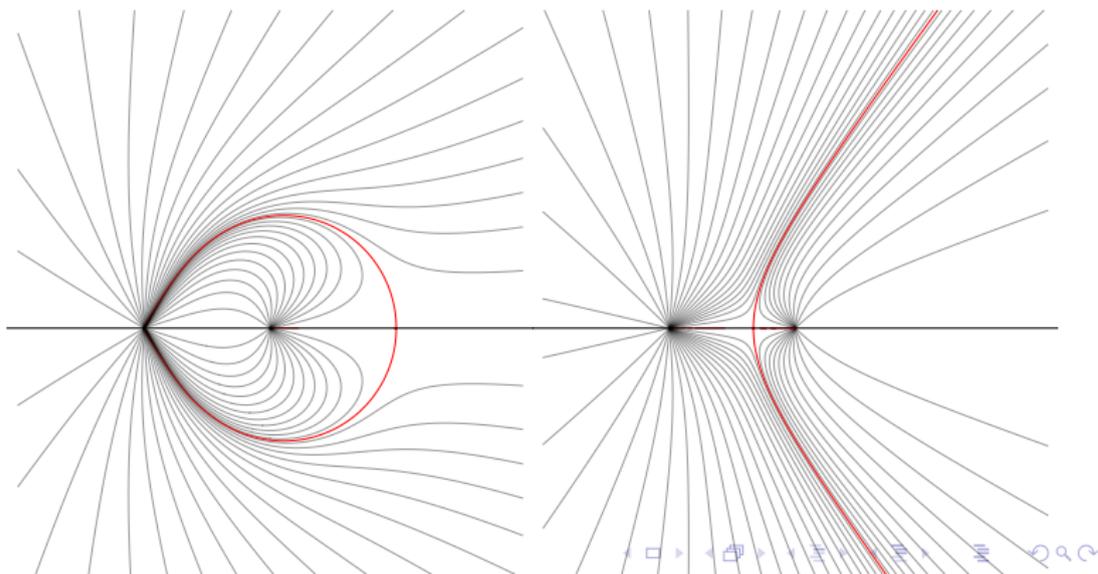
Kurze Rechnung für  $0 \leq x \leq 1$  liefert

$$\psi_x = 2\pi \left( Q_1 - Q_2 - \frac{Q_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - \frac{Q_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \text{konst.}$$

Die Feldlinien sind also die Niveaulinien der Funktion

$$\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{qx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

für  $q = Q_1/Q_2$ .



# Spuren im Mehl

Ein Ausflug in die  
Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

**Die Mehlkurve**

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

# Spuren im Mehl

Ein Ausflug in die  
Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

**Die Mehlkurve**

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

# Spuren im Mehl

Ein Ausflug in die  
Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

**Die Mehlkurve**

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Mit Anstellwinkel  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist die Geradenschar gegeben durch

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1 \quad (*)$$

Mit Anstellwinkel  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist die Geradenschar gegeben durch

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1 \quad (*)$$

Multiplikation mit  $\sin t$  liefert

$$x \tan t + y = \sin t$$

Mit Anstellwinkel  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist die Geradenschar gegeben durch

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1 \quad (*)$$

Multiplikation mit  $\sin t$  liefert

$$x \tan t + y = \sin t$$

Bei festem  $x$  soll  $\frac{dy}{dt} = 0$ , also

$$\frac{x}{\cos^2 t} = \cos t, \text{ also } x = \cos^3 t$$

Mit Anstellwinkel  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist die Geradenschar gegeben durch

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1 \quad (*)$$

Multiplikation mit  $\sin t$  liefert

$$x \tan t + y = \sin t$$

Bei festem  $x$  soll  $\frac{dy}{dt} = 0$ , also

$$\frac{x}{\cos^2 t} = \cos t, \text{ also } x = \cos^3 t$$

Aus (\*) folgt dann sofort  $y = \sin^3 t$ .

Mit Anstellwinkel  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist die Geradenschar gegeben durch

$$\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1 \quad (*)$$

Multiplikation mit  $\sin t$  liefert

$$x \tan t + y = \sin t$$

Bei festem  $x$  soll  $\frac{dy}{dt} = 0$ , also

$$\frac{x}{\cos^2 t} = \cos t, \text{ also } x = \cos^3 t$$

Aus (\*) folgt dann sofort  $y = \sin^3 t$ . Die gesuchte Hüllkurve ist also die Astroide:

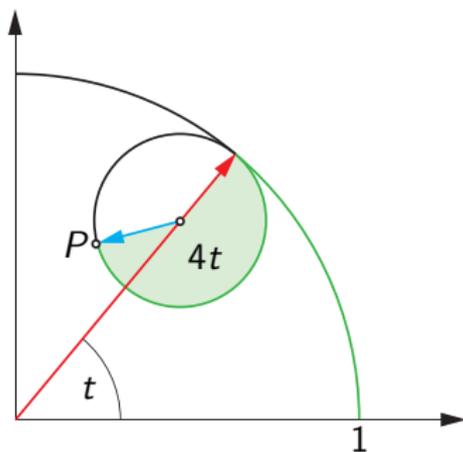
$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

oder in impliziter Darstellung

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

# Die Astroide als Hypozykloide

Rollt ein Kreis vom Radius  $\frac{1}{4}$  im Einheitskreis ab, so beschreibt ein Punkt auf seiner Peripherie eine Astroide:



$$P = \frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{-3it} \stackrel{\text{Euler}}{=} \cos^3 t + i \sin^3 t$$

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

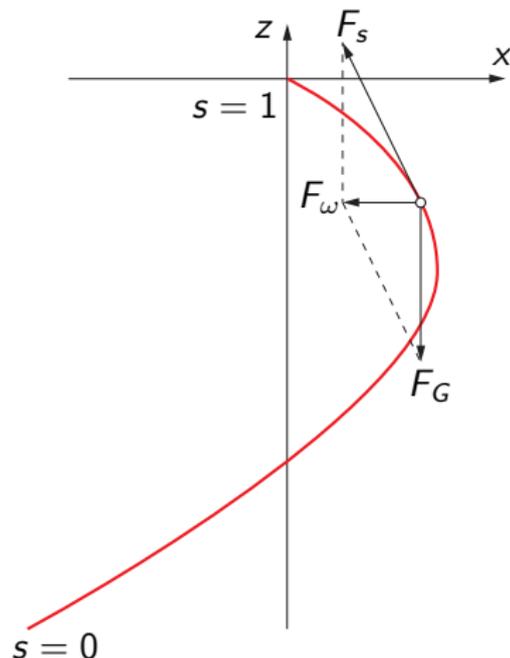
Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Man beachte, dass in beiden Fällen die selbe Parametrisierung resultiert.

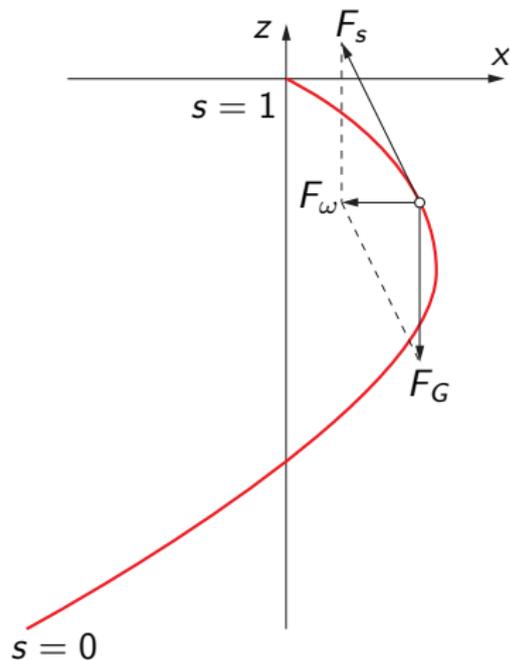
# Spaghetti al dente

Ein Spaghetti der Länge 1 rotiert stationär mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  sei nach der Kurvenlänge parametrisiert.



# Spaghetti al dente

Ein Spaghetti der Länge 1 rotiert stationär mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  sei nach der Kurvenlänge parametrisiert.



## ► Seilkraft

$$F_s = \lambda \dot{\gamma},$$

$\lambda(s) \geq 0$  die Spannung bei  $s$

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

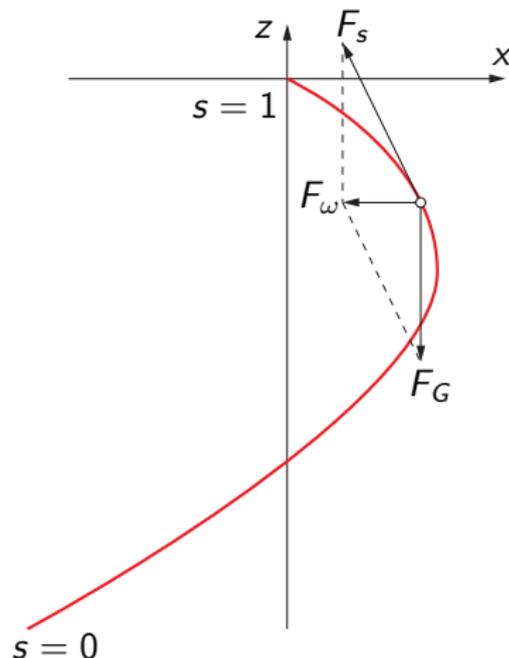
Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

# Spaghetti al dente

Ein Spaghetti der Länge 1 rotiert stationär mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  sei nach der Kurvenlänge parametrisiert.



► **Seilkraft**

$$F_s = \lambda \dot{\gamma},$$

$\lambda(s) \geq 0$  die Spannung bei  $s$

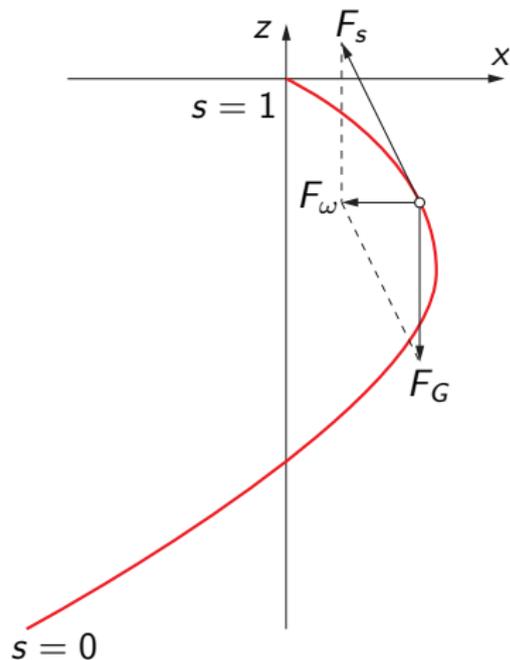
► **Gewichtskraft**

$$F_G = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Einheiten so, dass  $g = 1$

# Spaghetti al dente

Ein Spaghetti der Länge 1 rotiert stationär mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  sei nach der Kurvenlänge parametrisiert.



## ► Seilkraft

$$F_s = \lambda \dot{\gamma},$$

$\lambda(s) \geq 0$  die Spannung bei  $s$

## ► Gewichtskraft

$$F_G = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Einheiten so, dass  $g = 1$

## ► Zentripetalkraft

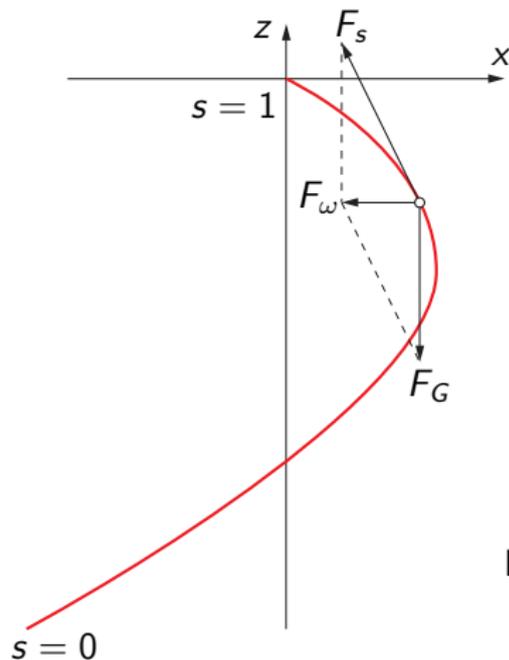
$$F_w = -\omega^2 \int_0^s \begin{pmatrix} x(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau,$$

Massendichte pro

Längeneinheit sei 1

# Spaghetti al dente

Ein Spaghetti der Länge 1 rotiert stationär mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse. Die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  sei nach der Kurvenlänge parametrisiert.



## ► Seilkraft

$$F_s = \lambda \dot{\gamma},$$

$\lambda(s) \geq 0$  die Spannung bei  $s$

## ► Gewichtskraft

$$F_G = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Einheiten so, dass  $g = 1$

## ► Zentripetalkraft

$$F_w = -\omega^2 \int_0^s \begin{pmatrix} x(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau,$$

Massendichte pro

Längeneinheit sei 1

Es gilt:

$$F_s + F_G = F_w$$

$$u := \lambda \dot{x} = -\omega^2 \int_0^s x(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\lambda \dot{z} = s \quad (2)$$

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

$$u := \lambda \dot{x} = -\omega^2 \int_0^s x(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\lambda \dot{z} = s \quad (2)$$

Beachte  $\lambda^2 \stackrel{|\dot{\gamma}|=1}{=} \lambda^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(1),(2)}{=} u^2 + s^2$ , also

$$\lambda = \sqrt{u^2 + s^2} \quad (3)$$

$$u := \lambda \dot{x} = -\omega^2 \int_0^s x(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\lambda \dot{z} = s \quad (2)$$

Beachte  $\lambda^2 \stackrel{|\dot{\gamma}|=1}{=} \lambda^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(1),(2)}{=} u^2 + s^2$ , also

$$\lambda = \sqrt{u^2 + s^2} \quad (3)$$

Ferner durch Ableiten von (1)

$$\dot{u} = -\omega^2 x \quad (\dot{1})$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 \dot{x} \stackrel{(1)}{=} -\omega^2 \frac{u}{\lambda} \stackrel{(3)}{=} -\omega^2 \frac{u}{\sqrt{u^2 + s^2}} \quad (\ddot{1})$$

$$u := \lambda \dot{x} = -\omega^2 \int_0^s x(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\lambda \dot{z} = s \quad (2)$$

Beachte  $\lambda^2 \stackrel{|\dot{\gamma}|=1}{=} \lambda^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(1),(2)}{=} u^2 + s^2$ , also

$$\lambda = \sqrt{u^2 + s^2} \quad (3)$$

Ferner durch Ableiten von (1)

$$\dot{u} = -\omega^2 x \quad (\dot{i})$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 \dot{x} \stackrel{(1)}{=} -\omega^2 \frac{u}{\lambda} \stackrel{(3)}{=} -\omega^2 \frac{u}{\sqrt{u^2 + s^2}} \quad (\ddot{i})$$

Resultat: **Nichtlineares Eigenwertproblem**

$$\ddot{u} + \frac{\omega^2 u}{\sqrt{u^2 + s^2}} \stackrel{(\ddot{i})}{=} 0 \quad (*)$$

$$u(0) \stackrel{(1)}{=} 0, \quad \dot{u}(1) \stackrel{(\dot{i})}{=} 0$$

Daraus:

$$x(s) \stackrel{(1)}{=} -\frac{\dot{u}(s)}{\omega^2}, \quad z(s) \stackrel{(2)}{=} -\int_s^1 \frac{\tau}{\sqrt{u(\tau)^2 + \tau^2}} d\tau$$

Daraus:

$$x(s) \stackrel{(1)}{=} -\frac{\dot{u}(s)}{\omega^2}, \quad z(s) \stackrel{(2)}{=} -\int_s^1 \frac{\tau}{\sqrt{u(\tau)^2 + \tau^2}} d\tau$$

## Satz (Kolodner, 1955)

Sei  $\sigma_n$  die  $n$ -te Nullstelle der Bessel-Funktion  $J_0$ . Dann gilt: Das Problem (\*) hat für jeden Wert  $\omega$  mit

$$\lambda_n < \omega^2 \leq \lambda_{n+1}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\sigma_n}{2}\right)^2$$

genau  $n$  nicht-triviale Lösungen  $u_1, \dots, u_n$ .  $u_i$  hat dabei genau  $i$  Nullstellen.

**Bemerkung:** Das linearisierte Problem (\*) hat nur zu *diskreten* Eigenwerten Lösungen.

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

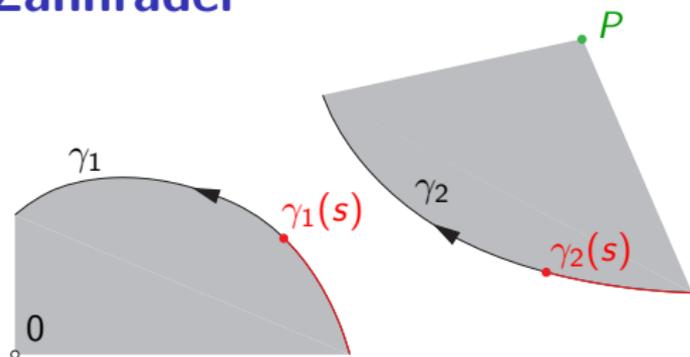
Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

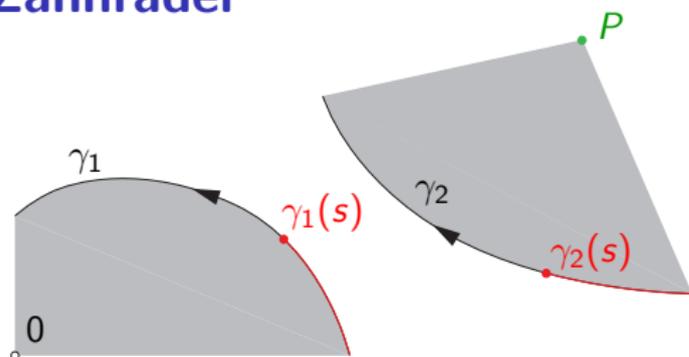
# Zahnräder



$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

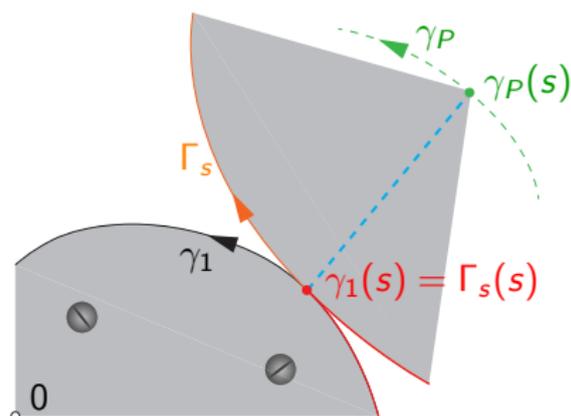
$$|\dot{\gamma}_i| = 1$$

# Zahnräder



$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$|\dot{\gamma}_i| = 1$$

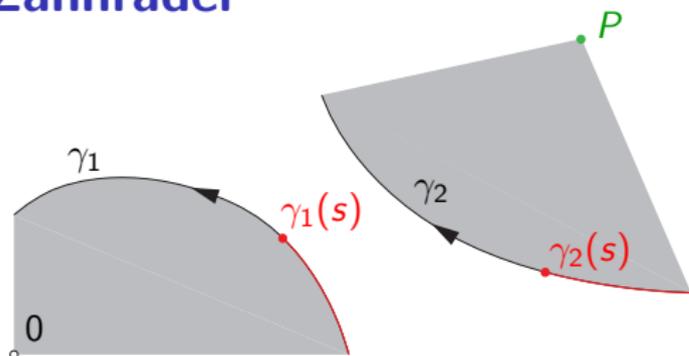


Sei  $A(s)$  eine Drehung und  $B(s)$  eine Translation so, dass

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s)$$

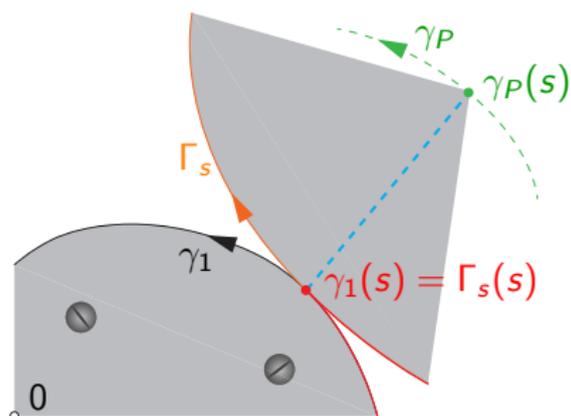
$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s)$$

# Zahnräder



$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$|\dot{\gamma}_i| = 1$$



Sei  $A(s)$  eine Drehung und  
 $B(s)$  eine Translation so,  
dass

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s)$$

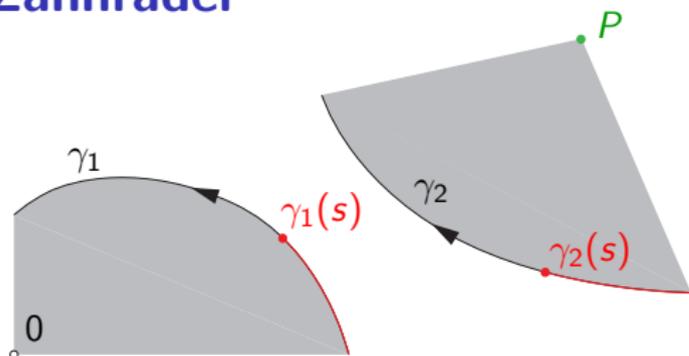
$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s)$$

Dann sei

$$\Gamma_s : \sigma \mapsto A(s)\gamma_2(\sigma) + B(s)$$

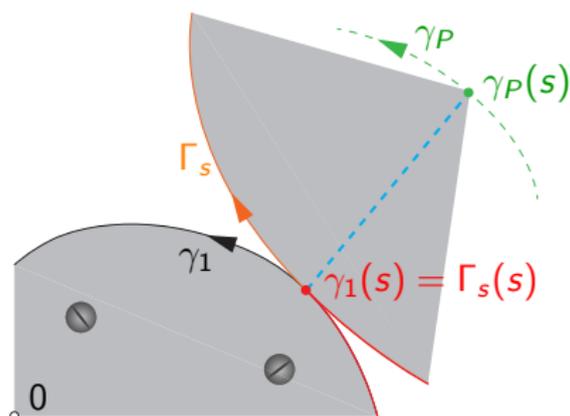
$$\gamma_P : s \mapsto A(s)P + B(s)$$

# Zahnräder



$$\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$|\dot{\gamma}_i| = 1$$



Sei  $A(s)$  eine Drehung und  $B(s)$  eine Translation so, dass

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s)$$

Dann sei

$$\Gamma_s : \sigma \mapsto A(s)\gamma_2(\sigma) + B(s)$$

$$\gamma_P : s \mapsto A(s)P + B(s)$$

**Behauptung:**  $\gamma_1(s)$  ist das momentane Drehzentrum.

Nochmals:

$$\gamma_P(s) = A(s)P + B(s) \quad (1)$$

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad (3)$$

Nochmals:

$$\gamma_P(s) = A(s)P + B(s) \quad (1)$$

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad (3)$$

**Behauptung:**  $\langle \dot{\gamma}_P(s), \gamma_P(s) - \gamma_1(s) \rangle = 0$

Nochmals:

$$\gamma_P(s) = A(s)P + B(s) \quad (1)$$

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad (3)$$

**Behauptung:**  $\langle \dot{\gamma}_P(s), \gamma_P(s) - \gamma_1(s) \rangle = 0$ 

**Beweis:**  $\langle \dot{\gamma}_P, \gamma_P - \gamma_1 \rangle \stackrel{(1),(2)}{=} \langle \dot{A}P + \dot{B}, A(P - \gamma_2) \rangle$

$$\stackrel{(2),(3)}{=} \langle \dot{A}P - \dot{A}\gamma_2, A(P - \gamma_2) \rangle$$

$$= \langle \dot{A}(P - \gamma_2), A(P - \gamma_2) \rangle = 0 \quad \square$$

Nochmals:

$$\gamma_P(s) = A(s)P + B(s) \quad (1)$$

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad (3)$$

**Behauptung:**  $\langle \dot{\gamma}_P(s), \gamma_P(s) - \gamma_1(s) \rangle = 0$

**Beweis:**  $\langle \dot{\gamma}_P, \gamma_P - \gamma_1 \rangle \stackrel{(1),(2)}{=} \langle \dot{A}P + \dot{B}, A(P - \gamma_2) \rangle$

$$\stackrel{(2),(3)}{=} \langle \dot{A}P - \dot{A}\gamma_2, A(P - \gamma_2) \rangle$$

$$= \langle \dot{A}(P - \gamma_2), A(P - \gamma_2) \rangle = 0 \quad \square$$

Sei nun  $P$  das Zentrum eines zweiten Zahnrads. Dann ist  $\gamma_P$  ein Kreis um 0, also  $\langle \gamma_P, \dot{\gamma}_P \rangle = 0$ .

Also  $0 = \langle \dot{\gamma}_P, \gamma_P - \gamma_1 \rangle = -\langle \dot{\gamma}_P, \gamma_1 \rangle$ . D.h. Sowohl  $\gamma_P$  als auch  $\gamma_1$  sind senkrecht auf  $\dot{\gamma}_P$  und sind somit kollinear.

Nochmals:

$$\gamma_P(s) = A(s)P + B(s) \quad (1)$$

$$\gamma_1(s) = A(s)\gamma_2(s) + B(s) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1(s) = A(s)\dot{\gamma}_2(s) \quad (3)$$

**Behauptung:**  $\langle \dot{\gamma}_P(s), \gamma_P(s) - \gamma_1(s) \rangle = 0$

**Beweis:**  $\langle \dot{\gamma}_P, \gamma_P - \gamma_1 \rangle \stackrel{(1),(2)}{=} \langle \dot{A}P + \dot{B}, A(P - \gamma_2) \rangle$

$$\stackrel{(\dot{\cdot}), (3)}{=} \langle \dot{A}P - \dot{A}\gamma_2, A(P - \gamma_2) \rangle$$

$$= \langle \dot{A}(P - \gamma_2), A(P - \gamma_2) \rangle = 0 \quad \square$$

Sei nun  $P$  das Zentrum eines zweiten Zahnrads. Dann ist  $\gamma_P$  ein Kreis um 0, also  $\langle \gamma_P, \dot{\gamma}_P \rangle = 0$ .

Also  $0 = \langle \dot{\gamma}_P, \gamma_P - \gamma_1 \rangle = -\langle \dot{\gamma}_P, \gamma_1 \rangle$ . D.h. Sowohl  $\gamma_P$  als auch  $\gamma_1$  sind senkrecht auf  $\dot{\gamma}_P$  und sind somit kollinear.

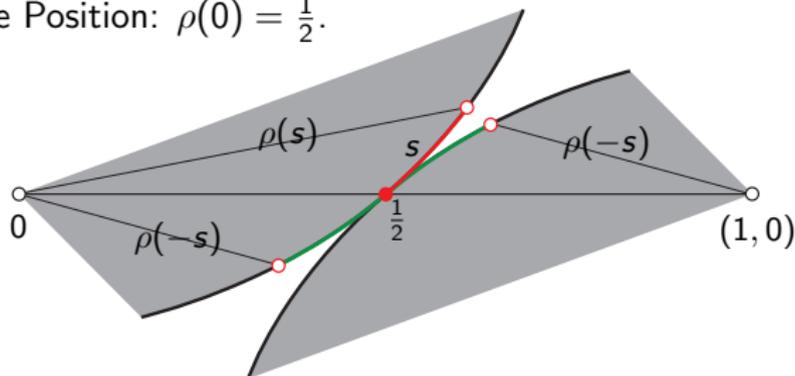
## Satz

Falls die Zahnflanken zweier Zahnräder aufeinander abrollen gilt: Die Zentren der Zahnräder und der Berührungspunkt liegen auf einer Geraden.

Nun zwei kongruente Zahnräder mit Zentrum in 0 resp. in  $(1, 0)$ .

Parametrisierung:  $s \mapsto \rho(s)$ .

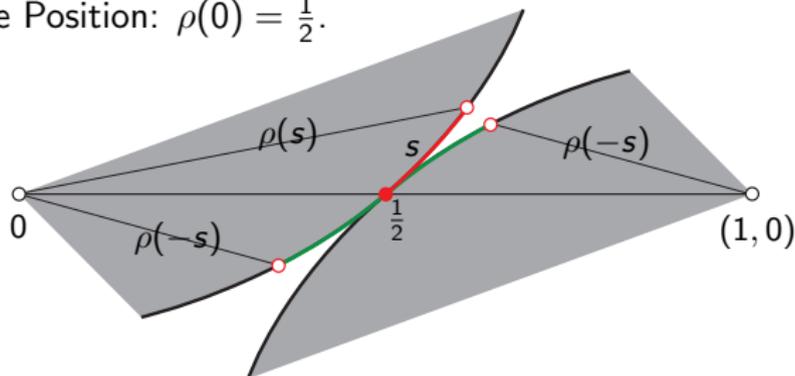
Neutrale Position:  $\rho(0) = \frac{1}{2}$ .



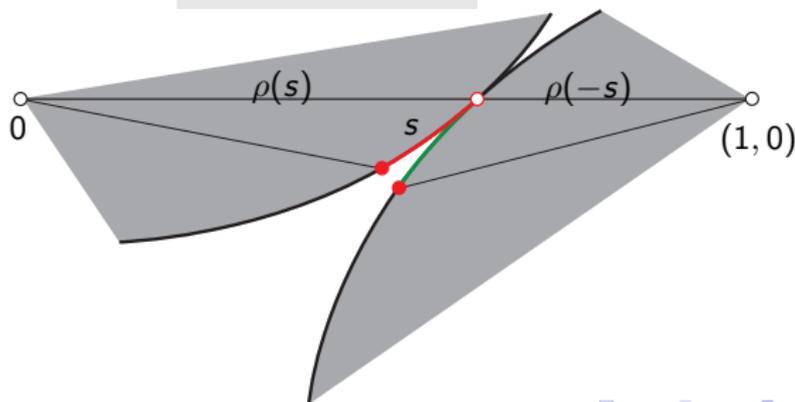
Nun zwei kongruente Zahnräder mit Zentrum in 0 resp. in  $(1, 0)$ .

Parametrisierung:  $s \mapsto \rho(s)$ .

Neutrale Position:  $\rho(0) = \frac{1}{2}$ .



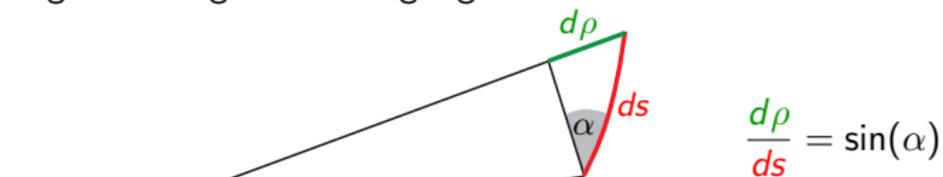
Länge  $s$  abgerollt:  $\rho(s) + \rho(-s) = 1$



## Kleines Wunder: Aus

$$\rho(s) + \rho(-s) = 1 \quad (*)$$

folgt die Tangentialbedingung!

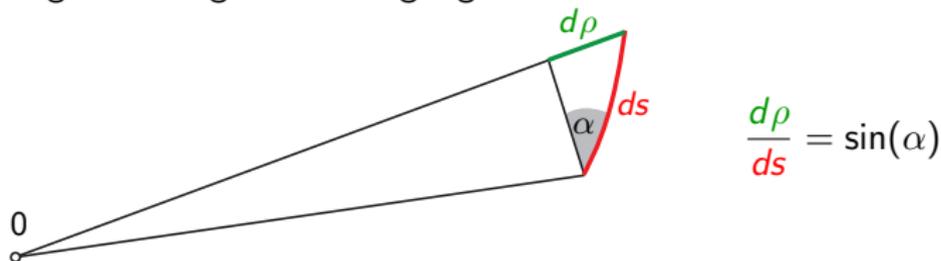


Denn:

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = -\frac{d(1 - \rho(s))}{ds} \stackrel{(*)}{=} -\frac{d\rho(-s)}{ds}$$

$$\rho(s) + \rho(-s) = 1 \quad (*)$$

folgt die Tangentialbedingung!



Denn:

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = -\frac{d(1 - \rho(s))}{ds} \stackrel{(*)}{=} -\frac{d\rho(-s)}{ds}$$

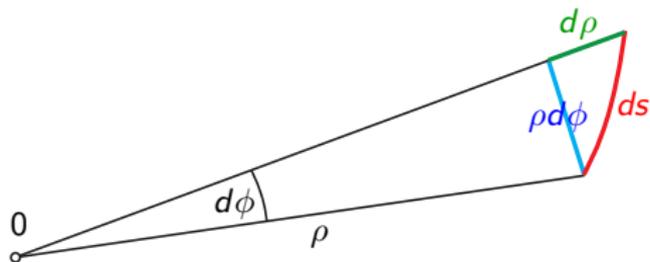
Lösung von (\*):

$$\rho(s) = \frac{1}{2} + g(s), \quad g \text{ beliebige ungerade Funktion.}$$

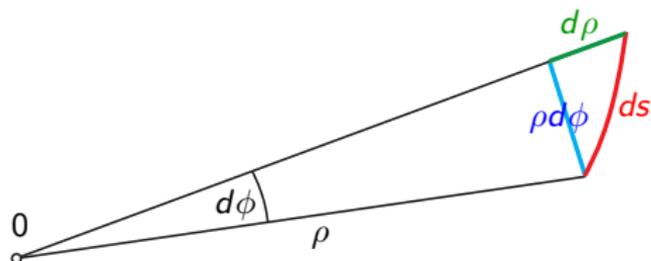
Damit die Kurve in Polarkoordinaten

$$s \mapsto (\phi(s), \rho(s))$$

vorliegt brauchen wir die Funktion  $\phi$ .



$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2$$



$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2$$

Daraus

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} \quad \rho(s) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + g(s)}}$$

$$\frac{\sqrt{1 - (g'(s))^2}}{\frac{1}{2} + g(s)}$$

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

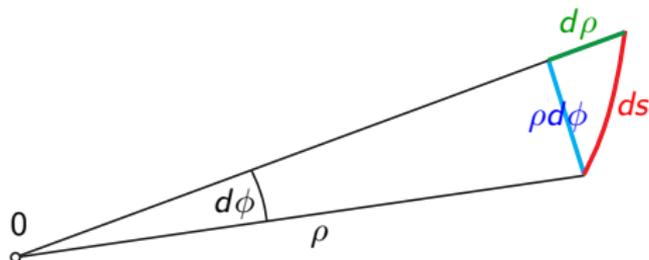
Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken





$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\phi)^2$$

Daraus

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} \quad \rho(s) = \underline{\underline{\frac{1}{2} + g(s)}} \quad \frac{\sqrt{1 - (g'(s))^2}}{\frac{1}{2} + g(s)}$$

Also, mit  $\phi(0) = 0$ ,

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 - (g'(\xi))^2}}{\frac{1}{2} + g(\xi)} d\xi$$

Schliesslich lautet die Lösung in Polarkoordinaten:

$$s \mapsto (\phi(s), \rho(s)) = \left( \int_0^s \frac{\sqrt{1 - (g'(\xi))^2}}{\frac{1}{2} + g(\xi)} d\xi, \frac{1}{2} + g(s) \right)$$

wobei  $g$  eine beliebige ungerade Funktion ist.

Für  $g(s) = as$ ,  $|a| < 1$ , ergibt sich als Lösung eine logarithmische Spirale:

$$\phi(\rho) = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \ln(2\rho)$$

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Für  $g(s) = a \sin(\omega s)$ ,  $|a\omega| < 1$  und  $|a| < 1$ , muss noch eine Schliessungsbedingung erfüllt sein um ein Zahnrad zu erhalten.

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Linkes Rad dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

slow normal fast play/pause stop

Drehung so, dass die Kurvenlänge gleichmässig abgewickelt wird.

Für  $g(s) = a \sin(\omega s)$ ,  $|a\omega| < 1$  und  $|a| < 1$ , muss noch eine Schliessungsbedingung erfüllt sein um ein Zahnrad zu erhalten.

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

Linkes Rad dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit.

slow normal fast play/pause stop

Drehung so, dass die Kurvenlänge gleichmässig abgewickelt wird.

## Bemerkungen

- ▶ Treibende und angetriebene Phasen wechseln ab.
- ▶ Die Winkelgeschwindigkeit kann nicht bei beiden Rädern gleichzeitig konstant gehalten werden.

# Kaustiken



(Kata)Kaustik



Kaustik  
(Mehrfachreflexion)



Diakaustik

# Kaustiken



(Kata)Kaustik



Kaustik  
(Mehrfachreflexion)



Diacaustik

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop

# Kaustiken



(Kata)Kaustik



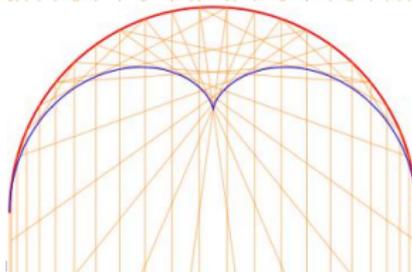
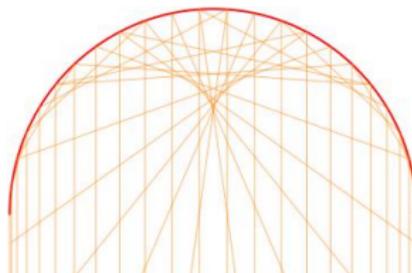
Kaustik  
(Mehrfachreflexion)

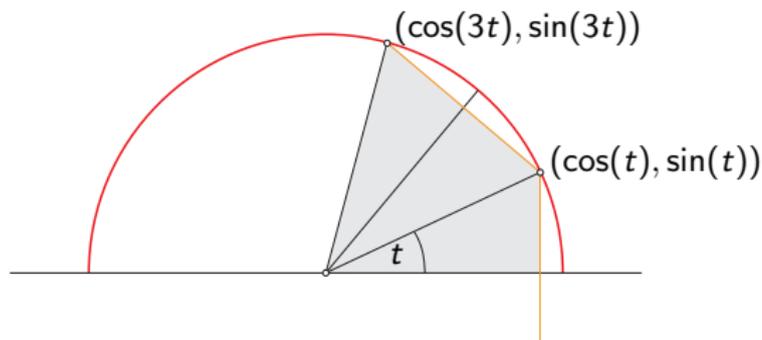


Diakaustik

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

slow normal fast play/pause stop





Gleichung des reflektierten Strahls:

$$\frac{y - \sin(t)}{x - \cos(t)} = \frac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$$

Die Kaustik ist die Hüllkurve der reflektierten Strahlen. Wie gesehen findet man

$$t \mapsto (\cos^3(t), \sin(t)(1 + \frac{1}{2} \cos(2t)))$$

Auch diese Kurve ist eine Rollkurve, nämlich eine Epizykloide:

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow animation.

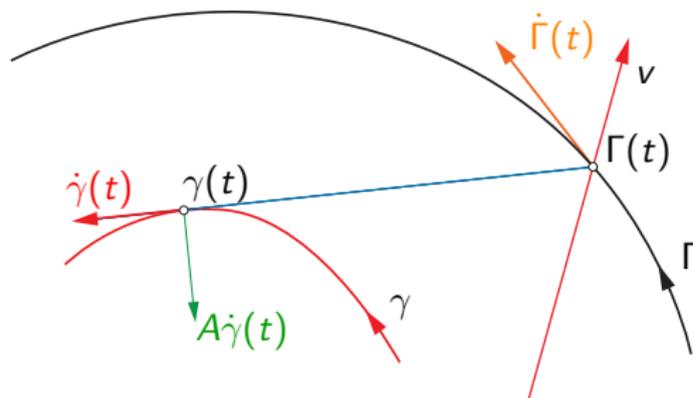
slow normal fast play/pause stop

# Die Prokaustik

Wir untersuchen das inverse Problem:

**Gegeben:** Kurve  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ , und eine Lichtrichtung  $v$ ,  $\|v\| = 1$

**Gesucht:** Kurve  $\Gamma : t \mapsto \Gamma(t)$ , so dass  $\gamma$  die erzeugte Kaustik ist.

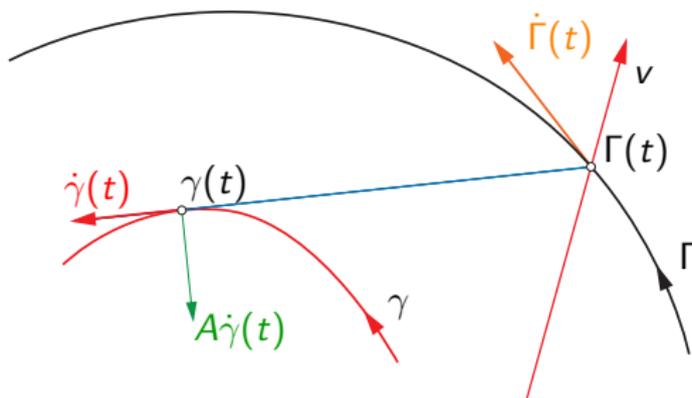


# Die Prokaustik

Wir untersuchen das inverse Problem:

**Gegeben:** Kurve  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ , und eine Lichtrichtung  $v$ ,  $\|v\| = 1$

**Gesucht:** Kurve  $\Gamma : t \mapsto \Gamma(t)$ , so dass  $\gamma$  die erzeugte Kaustik ist.



Mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gilt

$$A\dot{\gamma}(t)(\Gamma(t) - \gamma(t)) = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\Gamma}(t) \parallel v\|\dot{\gamma}(t)\| + \dot{\gamma}(t) \quad (2)$$

Aus (2) folgt für eine skalare Funktion  $x : t \mapsto x(t)$

$$\dot{\Gamma}(t) = x(t)(v\|\dot{\gamma}(t)\| + \dot{\gamma}(t)) \quad (3)$$

Aus (2) folgt für eine skalare Funktion  $x : t \mapsto x(t)$

$$\dot{\Gamma}(t) = x(t)(v\|\dot{\gamma}(t)\| + \dot{\gamma}(t)) \quad (3)$$

Aus (1) folgt durch Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}(\dot{\Gamma} - \dot{\gamma}) \\ &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (4)$$

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

Kaustiken

Aus (2) folgt für eine skalare Funktion  $x : t \mapsto x(t)$

$$\dot{\Gamma}(t) = x(t)(v\|\dot{\gamma}(t)\| + \dot{\gamma}(t)) \quad (3)$$

Aus (1) folgt durch Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}(\dot{\Gamma} - \dot{\gamma}) \\ &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (4)$$

Ersetzt man  $\dot{\Gamma}$  in (4) durch (3) kann man nach  $x$  auflösen:

$$x = \frac{A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma)}{A\dot{\gamma}v\|\dot{\gamma}\|}$$

Aus (2) folgt für eine skalare Funktion  $x : t \mapsto x(t)$

$$\dot{\Gamma}(t) = x(t)(v\|\dot{\gamma}(t)\| + \dot{\gamma}(t)) \quad (3)$$

Aus (1) folgt durch Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}(\dot{\Gamma} - \dot{\gamma}) \\ &= A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma) + A\dot{\gamma}\dot{\Gamma} \end{aligned} \quad (4)$$

Ersetzt man  $\dot{\Gamma}$  in (4) durch (3) kann man nach  $x$  auflösen:

$$x = \frac{A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma)}{A\dot{\gamma}v\|\dot{\gamma}\|}$$

Somit ist mit (3)  $\Gamma$  die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\Gamma} = \frac{A\ddot{\gamma}(\Gamma - \gamma)}{A\dot{\gamma}v} \left( v + \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right)$$

mit Anfangsbedingung  $\Gamma(t_0) = \Gamma_0$  wobei  $A\dot{\gamma}(t_0)(\Gamma_0 - \gamma(t_0)) \stackrel{(1)}{=} 0$ .

## Bemerkungen:

- ▶ Nach Umformung sind beide Komponenten der Dgl linear von der Form  $y' = ay + b$ , also explizit lösbar.
- ▶ Es genügt eine der beiden Komponenten der Dgl zu bestimmen, die andere folgt aus (1).

## Bemerkungen:

- ▶ Nach Umformung sind beide Komponenten der Dgl linear von der Form  $y' = ay + b$ , also explizit lösbar.
- ▶ Es genügt eine der beiden Komponenten der Dgl zu bestimmen, die andere folgt aus (1).

**Anwendung:** Welche andern Kurven, ausser dem Kreis, erzeugen noch die gesehene 2-Epizykloide als Kaustik?

## Bemerkungen:

- ▶ Nach Umformung sind beide Komponenten der Dgl linear von der Form  $y' = ay + b$ , also explizit lösbar.
- ▶ Es genügt eine der beiden Komponenten der Dgl zu bestimmen, die andere folgt aus (1).

**Anwendung:** Welche andern Kurven, ausser dem Kreis, erzeugen noch die gesehene 2-Epizykloide als Kaustik?

Video works only with Adobe Reader.  
Set security options to allow anima-  
tion.

slow normal fast play/pause stop

$$t \mapsto (\cos(t) - 2c \cot(t), c \cos(2t) \csc^2(t) + \sin(t))$$

# Prokaustik der 2-Epizykloide

Video works  
only with Adobe  
Reader.  
Set security  
options to allow  
animation.

slow normal fast play/pause stop

# Prokaustik der Astroide

Ein Ausflug in die  
Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

**Kaustiken**

Video works  
only with Adobe  
Reader.  
Set security  
options to allow  
animation.

slow normal fast play/pause stop

# Prokaustik des Kreises

Ein Ausflug in die  
Welt der Kurven

Norbert Hungerbühler

Einleitung

Die Wasserstrahlkurve

Die Mehlkurve

Spaghetti al dente

Zahnräder

**Kaustiken**

Video works  
only with Adobe  
Reader.  
Set security  
options to allow  
animation.

slow normal fast play/pause stop

Video works  
only with Adobe  
Reader.  
Set security  
options to allow  
animation.

slow normal fast play/pause stop

## Danke fürs Zuhören!