Stochastische Simulation

# Einführung

Stellen Sie sich vor, der Blick käme auf Sie zu und würde Sie als Mathematiker fragen wie viele Bilder man im Mittel kaufen muss bis man das Panini Album der WM 2014 gefüllt hat. Oder wie wahrscheinlich es ist, dass man mehr als 1000 Franken ausgeben muss. Oder ob die Behauptung, dass die Bilder zufällig auf die Päckli verteilt sind, haltbar ist. Wie würden Sie vorgehen?

**Eckdaten für die WM 2014**:

* Im Paninialbum 2014 hatten 640 Aufkleber Platz.
* Gemäss Panini sind alle Bilder gleich häufig und werden zufällig

auf die Päckli verteilt.

* In einem Päckli sind 5 Aufkleber.
* Ein Päckli kostet rund 1 Franken.

# Stochastische Simulation - Intuitiv

Meist ist die mathematische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit herkömmlicher Wahrscheinlichkeitstheorie kaum mehr möglich oder viel zu kompliziert und aufwändig. In diesen Fällen wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit experimentell ermittelt. Man muss dazu das Zufallsexperiment so oft durchführen, dass sich die **relative Häufigkeit** des betrachteten Ereignisses stabilisiert und diese relative Häufigkeit daher eine sehr genaue Näherung für die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist.

**Beispiel:** Jemand würfelt mit zwei Würfeln und möchte ermitteln wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass beide Würfel dieselbe Augenzahl zeigen. Natürlich wissen Sie, wie gross diese Wahrscheinlichkeit ist, trotzdem möchten wir diese Wahrscheinlichkeit experimentell ermitteln. Dazu würden Sie das Experiment oft, z.B. 100 Mal durchführen und zählen wie oft die beiden Würfel nach dem Wurf dieselbe Zahl zeigen. Zeigen sie z.B. 18 Mal dieselbe Zahl, so würde man die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit $\frac{18}{100}=0.18$ approximierten. Dies ist natürlich noch eine recht ungenaue Schätzung. Wiederholt man aber das Experiment so oft, bis sich die relative Häufigkeit stabilisiert, so bekommt man eine sehr genaue Schätzung, die dann auch dem tatsächlichen Wert $\frac{1}{6}=0.1\overbar{6}$ beliebig nahe kommt.

Natürlich kann und will man das Experiment nicht tausende Male wiederholen, daher spielt man das Experiment mit Hilfe von Zufallszahlen auf dem Computer nach und schätzt die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit ab. Dieses Vorgehen nennt man **stochastische Simulation**.

Der Vorteil von Simulationen gegenüber einer mathematischen Analyse ist, dass man komplexe Systeme untersuchen kann, die man analytisch nicht oder nur approximativ behandeln kann. Insbesondere ist man weniger auf asymptotische Näherungen angewiesen.

# Stochastische Simulation – Mathematisch

Im Folgenden werden wir uns an konkreten Beispielen orientieren die mit Simulationen gelöst werden können. Bevor wir allerdings beginnen, geben wir noch eine kurze generelle Beschreibung einer stochastischen Simulation. Man interessiert sich für eine Zufallsvariable $Y$, die man mit Hilfe einer Funktion $h$ aus gewissen Inputgrössen $X=(X\_{1},…,X\_{p})$ erhält. Die Funktion $h$ und die Verteilung von $X$ sind bekannt. Man möchte die Verteilung von $Y$ oder Kenngrössen wie z.B. der Erwartungswert berechnen. Wenn man Zufallsvektoren$X$ mit der richtigen geforderten Verteilung erzeugen kann, dann kann man wie folgt vorgehen:

Erzeuge $n$ unabhängige Realisierungen von $X$, d.h.

$$X\_{i}=\left(X\_{i1},…,X\_{ip}\right), i=1,…,n$$

und approximiert:

$$P\left[h\left(X\right)\leq b\right]≈\frac{1}{n}\sum\_{i=1}^{n}1\_{\left[h\left(X\_{i}\right)\leq b\right]}$$

bzw.

$$E\left[h\left(X\right)\right]≈\frac{1}{n}\sum\_{i=1}^{n}h(X\_{i})$$

Die Rechtfertigung dafür ist das Gesetz der Grossen Zahlen. Mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes (ZGS) ist es sogar möglich, die Genauigkeit dieser Approximation anzugeben.

# Aufgaben

### Einstiegsbeispiel - Würfeln

1.

Zur Illustration eine einfache Aufgabe, die man noch von Hand lösen könnte. Im bereitgestellten File *Wuerfeln1.R/py* wird durch Simulation bestimmt, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass man mindestens zwei Einer **nacheinander** würfelt wenn man dreimal nacheinander würfelt. Das File hilft Ihnen evtl. beim Lösen der folgenden Aufgaben, studieren Sie es und versuchen Sie den Code nachzuvollziehen. Stimmt die Simulation mit der tatsächlichen Lösung überein?

Nun folgt eine Aufgabe deren Simulation gar nicht viel schwieriger ist, die theoretische Berechnung der Wahrscheinlichkeit aber sehr viel mühsamer wäre als im obigen Beispiel. Nun sehen Sie klar den Vorteil von Simulationen.

1. Stellen Sie sich vor, Sie würfeln statt drei Mal nun 20 Mal und möchten rausfinden wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass man irgendwann einmal mindestens zwei Einer nacheinander würfelt. Ändern sie dazu nur einen Parameter im zur Verfügung gestellten File.

Lösung: *Wuerfeln.R/py*

1. Können Sie diese Wahrscheinlichkeit auch exakt berechnen? Falls ja, vergleichen Sie Ihr Resultat aus a) mit dem exakten Resultat.

Lösung: *WuerfelnExakt.R/py*

1. Bestimmen Sie durch Simulation die Wahrscheinlichkeit, dass man in 20 Würfen irgendwann einmal nacheinander mindestens drei gleiche Zahlen beobachtet. Benutzen Sie dazu das zur Verfügung gestellte File *Wuerfeln1.R/py* und ändern Sie es entsprechend.

Lösung: *Wuerfeln.R/py*

### Panini

1.

Nun sind wir soweit, dass wir wieder auf unsere Ausgangsfrage zurückkommen können.

1. Wie viele Bilder muss man im Mittel kaufen, damit man das Panini Album mit 640 Klebern füllen kann? Nehmen Sie an, dass man einzelne Bilder kaufen kann, jedes Bild ist gleich wahrscheinlich. Können Sie diese Wahrscheinlichkeit auch theoretisch berechnen? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der theoretischen Berechnung durchgeführt im File *PaniniExakt.R/py*.

Lösung*: Panini.R/py*

**Tipp:** Simulieren Sie so lange Zufallszahlen zwischen 1 und 640 bis jede Zahl einmal vorgekommen ist. Zählen Sie wie viele Zahlen Sie dazu generieren mussten. Diesen Vorgang wiederholen Sie ca 400 Mal und mitteln.

1. Wie verringert sich die Anzahl gekaufter Bilder, wenn man Tauschgruppen zu 2, 3, … Personen macht? Nehmen Sie an die gesamte Gruppe kauft so lange bis der letzte das Album gefüllt hat. Nehmen Sie weiter an die Gruppe verhält sich absolut altruistisch, d.h. man schenkt sich gegenseitig die Karten, welche dem anderen noch fehlen ohne Gegenwert.

Lösung*: Panini.R/py*

1. In den letzten Jahren hatten Kollegen von mir den Eindruck, dass man überraschend wenige doppelte Bilder hat, wenn man nicht einzelne 5er Packs sondern eine ganze Schachtel mit hundert 5er Packs kauft. Ermitteln Sie die Verteilung der Anzahl doppelten beim Kauf einer 500er Schachtel. Wo liegt das 95% Quantil?

Lösung*: Doppelte.R/py*

1. Wir haben eine Schachtel mit hundert 5er Packs gekauft (500 Bilder) und haben alle in ein leeres Album geklebt. Es konnten 477 Bilder einkleben werden, der Rest waren doppelte Bilder. Sind das nun "überraschend wenige doppelte" oder nicht? Konnten Sie in der Simulation in c) jemals so viele Bilder „einkleben“? Wie würde man im Sinne eines statistischen Testes entscheiden?
2. Wie vergrössert sich die Anzahl gekaufter Bilder, wenn man nur gegen Gegenwert tauscht und nur seine Doppelten anbietet?

Lösung*: TauschpartnerEgo.R/py*

**Tipp für Python User:** Übertragen einer Python Liste ins Excel um sie graphisch darzustellen

Excel kann von Python nur Strings einlesen. Die Einträge welche man im Excel in verschiedenen Felder haben möchte, muss man mit „;“ trennen. Das heisst aus dem String "1;4;6;3" macht Excel eine Zeile mit 4 Einträgen.

Das heisst Sie müssen die Liste welche Sie ins Excel übertragen möchten zuerst in einen String umwandeln wo die einzelnen Elemente durch „;“ getrennt sind (falls Sie Schwierigkeiten haben, betrachten Sie das Beispiel im File *Panini.py*). Diese Liste, nennen wir sie karten, kann man mit den folgenden drei Zeilen in Ihr Excel File, nennen wir es „*Panini.csv*“ übertragen:

Pan = open('C:/… /Panini.csv', 'a')

## Das 'a' am Schluss zeigt uns an, dass wir eine Excel Datei

## öffnen um dort etwas anzuhängen (**a**ppend, es gäbe auch **r**ead

## oder **w**rite)

Pan.write(karten)

Pan.close()

# Weitere Ideen für den Unterricht

# Jassen

Bei den folgenden Fragestellungen wäre die Berechnung mit den Methoden der klassischen Wahrscheinlichkeit nur bei der Teilaufgabe a) möglich.

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass jemand 4 Bauern hat?

File: *VierBauern.R/py*

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass überhaupt jemand weisen kann?

File: *JemandKannEtwasWeisen.R/py*

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine bestimmte Person weisen kann.

(Bei einem Weis gleicher Wertigkeit, zählt derjenige, der mit mehr Karten zu Stande kommt und bei gleich vielen Karten, derjenige mit den höheren Karten. Es wird ohne Trumpf gespielt. Bei dieser Aufgabe spielt es eine Rolle an welcher Position diese Person ist. Die Person, welche ausspielt, hat eine grössere Chance ihren Weis schreiben zu können. Berechnen Sie für alle 4 Personen die Chance einen Weis schreiben zu können. Achtung: Beachten Sie, dass man den eigenen Weis auch schreiben darf, wenn man selber unterlegen ist, der Partner jedoch den höchsten Weis am Tisch hat).

File: *WeisDenManSchreibenDarf.R/py*

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass jemand der ein Dreiblatt in den Händen hält, dies auch tatsächlich schreiben kann?

(Man erhält die Lösung durch eine Modifikation der Lösung von Aufgabe . Man teilt nicht durch die totale Anzahl der Simulationen sondern zählt zusätzlich wie oft die Person ein Dreiblatt in den Händen hält und teilt durch diese Anzahl).

# Pokern

Pokern ist kein klassisches Beispiel für Stochastische Simulation, denn die Wahrscheinlichkeiten sind durch „Exhaustive Search“ exakt zu bestimmen:

Stellen Sie sich vor zwei Spieler spielen gegeneinander. Beide haben die Starthand erhalten und man möchte die Gewinnwahrscheinlichkeit für beide berechnen. Bei 52 Pokerkarten gibt es danach noch $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{48}{5}\right)$ Möglichkeiten die restlichen 5 Karten der sogenannten Flop, Turn und River. Dies sind rund 1.7 Milliarden Möglichkeiten. Theoretisch wäre es also denkbar alle Möglichkeiten durchzuspielen und so die exakten Gewinnwahrscheinlichkeiten zu bekommen. Mit unseren Schulcomputern dauerte es allerdings zu lange um diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Daher haben wir uns der Stochastischen Simulation bedient und so die Gewinnwahrscheinlichkeiten approximiert. Testen Sie das Programm und spielen Sie damit.

Lösung: *Poker.py*

Inhalt

[1. Einführung 1](#_Toc398052430)

[2. Stochastische Simulation - Intuitiv 1](#_Toc398052431)

[3. Stochastische Simulation – Mathematisch 2](#_Toc398052432)

[4. Aufgaben 3](#_Toc398052433)

[4.1. Einstiegsbeispiel - Würfeln 3](#_Toc398052434)

[Aufgabe 1 3](#_Toc398052435)

[4.2. Panini 3](#_Toc398052436)

[Aufgabe 2 3](#_Toc398052437)

[5. Weitere Ideen für den Unterricht 5](#_Toc398052438)

[5.1. Jassen 5](#_Toc398052439)

[5.2. Pokern 5](#_Toc398052440)