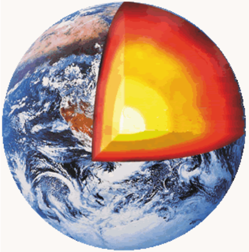
Warum verbrennen wir uns nicht die Füsse an der Erdoberfläche?

TMU 14.9.2011

Norbert Hungerbühler, ETH Zürich

Komische Frage!

Beobachtung: Ein heisses Frühstücksei wird nach dem Abschrecken sofort wieder von Innen heraus heiss.

Aber: Die Temperatur im Erdkern beträgt rund 7000 K. Warum schmilzt die Hitze aus dem Erdinnern im Lauf der Zeit die Erdkruste nicht komplett auf?

Wie alt ist die Welt?

Diese Frage stellte Lord Kelvin (William Thomson) 1862.

- **Kelvins Idee:** Betrachte die Erde als abkühlenden Körper und berechne aus den Daten die Abkühldauer.
- **Kelvins Resultat:** 24 bis 400 Millionen Jahre.
- **Heute geschätztes Alter:** 4.5 Milliarden Jahre.

Hmm... warum hat sich Lord Kelvin so verschätzt?

Was Kelvin noch nicht wissen konnte: Im Erdinnern wird Wärme erzeugt durch

- natürliche Radioaktivität (Becquerel 1896)
- Auskristallisieren des Erdkerns
- Gezeitenkräfte

Partielle Differentialgleichungen in der Schule?

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung. Schon gewöhnliche Differentialgleichungen sind eher die Ausnahme im Schulstoff.

Ausweg: Überspringen der PDE in der Modellbildung.

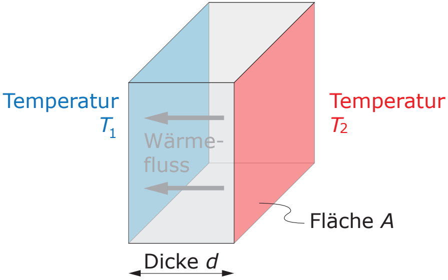
$$\begin{tikzcd}
\text{Physikalisches Phänomen} \arrow[d] \\
\text{Mathematisches Modell durch Betrachten finiter Elemente } \Delta x \arrow[d, "\Delta x \to 0"] \arrow[dd, bend right=60, red, "\text{Direkter Weg}"'] \\
\text{PDE} \arrow[d, "\text{Diskretisieren}"] \\
\text{Numerisches Schema}
\end{tikzcd}$$

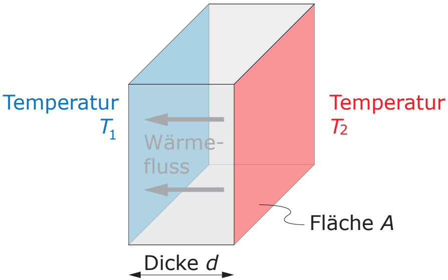
Modell der Wärme

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Wärme fliesst selbständig nur von einem Körper höherer zu einem Körper niedrigerer Temperatur.

Quantitative Fassung der Wärmeleitung (Fourier 1822):





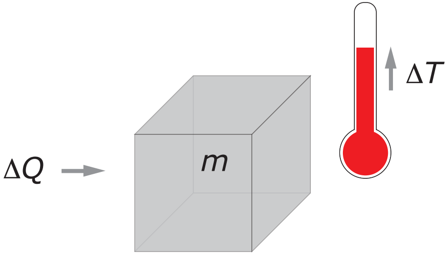
Wärmeleitungsgesetz

Die Wärmeenergie ΔQ, die in der Zeit Δt von rechts nach links durch das Wandstück fliesst, ist

$$\Delta Q = \lambda \, \Delta t \, A \, (T_2 - T_1) \, \frac{1}{d}$$

$\lambda =$ Wärmeleitfähigkeit des Materials

Wärmekapazität



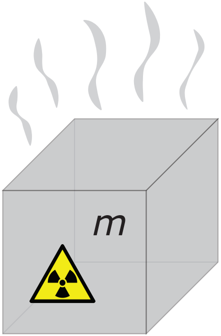
Wärmekapazität

Fliesst die Wämemenge ΔQ in eine Masse m hinein, erhöht sich deren Temperatur um

$$\Delta T = \frac{1}{c}\frac{\Delta Q}{m}$$

$c =$ spezifische Wärmekapazität des Materials

Heizleistung



Heizleistung

Im Zeitintervall Δt werde in einem Massenstück m die Wärmemenge ΔQ erzeugt. Dann ist die Heizleistung

$$f = \frac{\Delta Q}{m \Delta t}$$

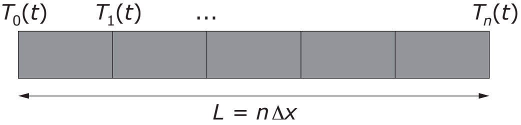
Wärmeleitung im Stab

Frage: Wie entwickelt sich die Temperaturverteilung in einem Stab im Laufe der Zeit?

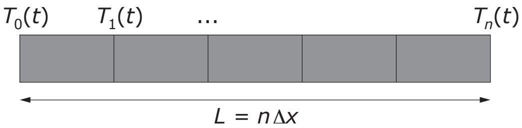
Daten des Stabes:

- Länge L
- Querschnittsfläche A
- Dichte ρ
- Wärmeleitfähigkeit λ
- Wärmekapazität c
- Heizleistung f

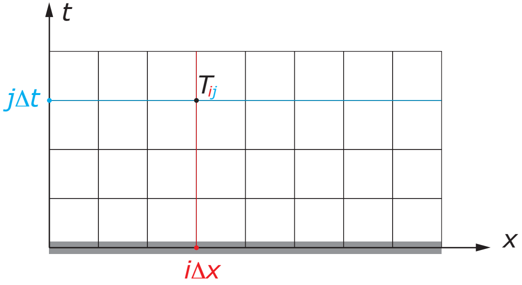
Idee: Betrachte Messpunkte im Abstand $\Delta x = \frac{L}{n}$:



Idee: Betrachte Messpunkte im Abstand $\Delta x = \frac{L}{n}$:

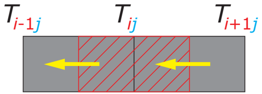


Wir diskretisieren auch die Zeit und erhalten ein Gitter:



T_{ij} ist also die Temperatur am Ort $x = i\Delta x$ zur Zeit $t = j\Delta t$.

Detailbetrachtung des Wärmeflusses am rot schraffierten Abschnitt des Stabes im Zeitintervall $[j\Delta t, (j+1)\Delta t]$:



$$
\begin{array}{lll}
\text{Von rechts hinein:} & \Delta Q_{\text{in}} & = \lambda\,\Delta t\,A\,(T_{i+1j} - T_{ij})\,\frac{1}{\Delta x} \\
\text{Nach links hinaus:} & \Delta Q_{\text{out}} & = \lambda\,\Delta t\,A\,(T_{ij} - T_{i-1j})\,\frac{1}{\Delta x} \\
\text{Lokale Heizleistung:} & \Delta Q_{\text{loc}} & = f\,\Delta t\,A\,\Delta x\,\rho
\end{array}
$$

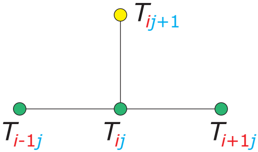
Bilanz: $\Delta Q_{\text{in}} + \Delta Q_{\text{loc}} - \Delta Q_{\text{out}} = A\,\Delta x\,\rho\,c\,(T_{ij+1} - T_{ij})$

Ausgeschrieben:

$$
\frac{\lambda}{\rho c}\,\frac{T_{i+1j} - 2T_{ij} + T_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{f}{c} = \frac{T_{ij+1} - T_{ij}}{\Delta t}
$$

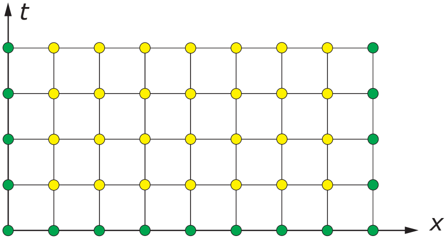
(Diskrete Wärmeleitungsgleichung)

Durch Auflösen nach T_{ij+1} ergibt sich ein numerisches Rechenschema (Richardson Verfahren):



Vorgeben muss man dabei:

- Anfangstemperaturverteilung $T_{00}, T_{10}, \ldots, T_{n0}$
- Randtemperatur links $T_{00}, T_{01}, \ldots$
- Randtemperatur rechts $T_{n0}, T_{n1}, \ldots$



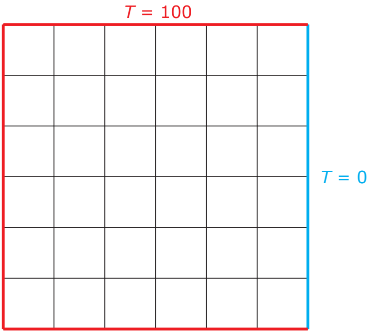
Choose speed to start animation.
Works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

Slow Normal Fast Play/Pause Stop

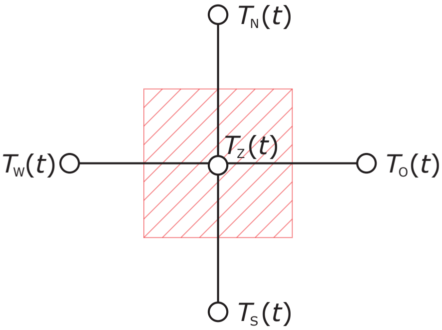
Beobachtungen:

- Konvergenz gegen eine stationäre Verteilung
- Courant-Friedrich-Levy Bedingung: $\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$

Wärmeleitung in einer quadratischen Platte



Randbedingung für $t > 0$	**Anfangsbedingung**
Am roten Rand $T = 100$ Am blauen Rand $T = 0$	$T = 0$ zur Zeit $t = 0$



Die Wärmebilanz für das rot schraffierte Quadrat liefert

$$\frac{\lambda}{\rho c}\,\frac{T_O(t)+T_N(t)+T_W(t)+T_S(t)-4T_Z(t)}{\Delta x^2}+\frac{f}{c}=\frac{T_Z(t+\Delta t)-T_Z(t)}{\Delta t}$$

(Diskrete zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung)

Für $f = 0$ ergibt sich im stationären Fall

$$T_Z = \frac{1}{4}(T_O + T_N + T_W + T_S)$$

Für jeden inneren Punkt Z muss diese Gleichung gelten. Man hat also ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte.

Diskrete harmonische Funktionen

Die Temperatur in einem Gitterpunkt ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarpunkte. Lösungen dieses linearen Systems heissen **diskrete harmonische Funktionen**.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt sofort:

Diskretes Maximumprinzip

Nimmt eine diskrete harmonische Funktione in einem inneren Punkt ihr Maximum an, so ist sie konstant.

Wendet man das diskrete Maximumprinzip auf die Differenz zweier Lösungen an, so bekommt man

Eindeutigkeit

Es existiert höchstens eine diskrete harmonische Funktion mit gegebenen Randwerten.

Und die lineare Algebra liefert daraus gratis hinzu:

Existenz

Zu beliebig vorgegebenen Randwerten existiert eine diskrete harmonische Funktion.

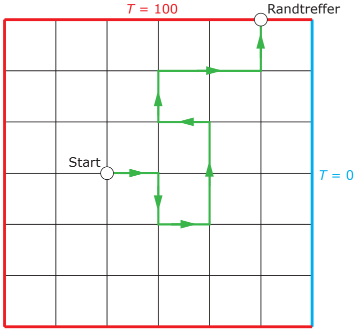
Für $n = 2$ und $n = 3$ kann man das entstehende Gleichungssystem noch von Hand lösen. Für grosse n ist selbst ein Computer mit Gauss-Elimination überfordert.

Ausweg:

- Gauss-Seidel Iteration
- Monte-Carlo Verfahren

Monte-Carlo Verfahren

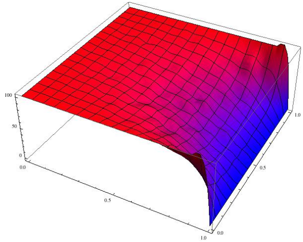
- Führe ab Startpunkt Random Walks aus bis ein Randpunkt getroffen wird.
- Notiere diese Randwerte.
- Das arithmetische Mittel der notierten Randwerte konvergiert gegen die Temperatur im Startpunkt.



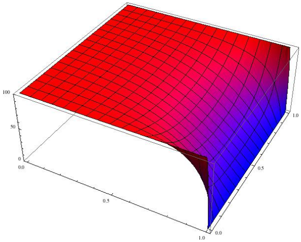
Für den Erwartungswert E_{start} erhält man das arithmetische Mittel der Erwartungswerte in den Nachbarpunkten im Osten, Norden, Westen und Süden:

$$E_{\text{Start}} = \frac{1}{4}(E_{\text{O}} + E_{\text{N}} + E_{\text{W}} + E_{\text{S}})$$

Damit sind die beiden Probleme (stationäre Temperaturverteilung im Quadrat vs. Erwartungswert des Random Walk) äquivalent.



Monte Carlo Lösung



Gauss-Seidel Lösung

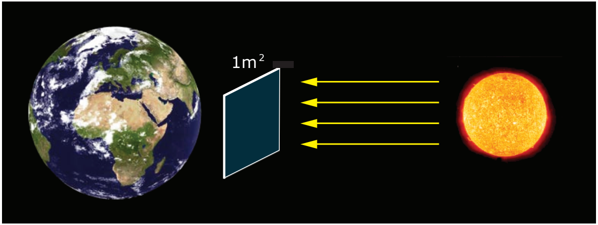
Randbedingungen

Am Rand können wir vorschreiben:

- die Temperatur in jedem Punkt (Dirichlet-Randbedingung)
- den Wärmefluss (Neumann-Randbedingung)

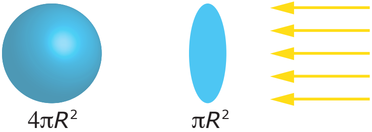
Die Neumann-Bedingung ist für unsere Ausgangsfrage wichtig, denn auf der Erdoberfläche finden wir drei ensprechende Effekte:

Sonneneinstrahlung



Solarkonstante $\Sigma = 1.36 \cdot 10^3 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Achtung: Die vom Querschnitt der Erde aufgefangene Leistung wird auf die ganze Kugeloberfläche verteilt:



Effektive Solarkonstante: $\bar{\Sigma} = \frac{1}{4}\, 1.36 \cdot 10^3\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

Albedo-Effekt

Rund 31% der Sonneneinstrahlung wird wieder in den Weltraum zurückgeworfen.

Die von der Sonne eingefangene Strahlungsleistung reduziert sich also auf den Wert $\bar{\Sigma}(1 - a)$ mit $a = 0.31$.

Thermische Abstrahlung

Stefan-Bolzmann Strahlungsgesetz

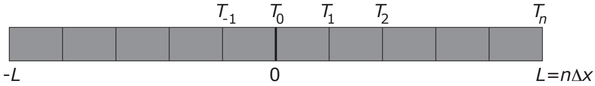
Ein schwarzer Strahler der Temperatur T strahlt von einem Flächenstück A seiner Oberfläche die Leistung

$$P = \sigma A T^4$$

ab. Dabei ist $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}}$.

Bei einem realen Strahler reduziert sich die Emission um den Faktor ε. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz ist dieser Emissiongrad gleich dem Absorptionsgrad, für die Erde also $\varepsilon = 1 - a$.

Der eindimensionale Planet



Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung liefert:

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = -\frac{f\rho\,\Delta x^2}{\lambda}$$

Die zweite Differenzenfolge ist konstant, somit lautet die Lösung

$$T_i = -\frac{f\rho\,\Delta x^2}{2\lambda} i^2 + bi + c$$

Offenbar ist $c = T_0$ und aus Symmetriegründen ist $b = 0$:

$$T_i = -\frac{f\rho(i\Delta x)^2}{2\lambda} + T_0$$

Setzen wir noch $x = i\Delta x$ so erhalten wir

$$T(x) = T(0) - \frac{f\rho}{2\lambda}x^2$$

Das ist sogar die exakte Lösung der dahinterstehenden Differentialgleichung.

Insbesondere gilt

$$T(0) - T(L) = \frac{f\rho}{2\lambda} L^2 \qquad (*)$$

Dies erklärt qualitativ unsere Ausgangsfrage!

Wir denken uns nun den Stab als Bohrkern durch die Erde mit entsprechenden Strahlungseffekten an den Stirnflächen: Die gesamte Heizleistung des Stabes ist gleich der an den beiden Stirnseiten des Stabes netto abgestrahlten Leistung. Also

$$f\rho L = (1-a)\sigma T(L)^4 - \bar{\Sigma}(1-a) \qquad (**)$$

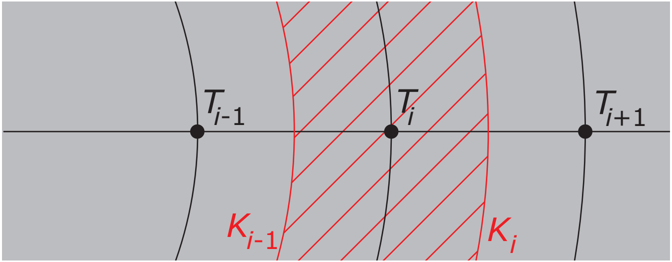
- L = mittlerer Erdradius $= 6371 \cdot 10^3 \mathrm{m}$
- ρ = mittlere Erddichte $= 5.515 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
- a = Albedowert der Erde $= 0.31$
- $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$
- $\bar{\Sigma} = 0.34 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
- λ = mittlere Wärmeleitfähigkeit Erde (Granit) $= 2.8 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$
- $T(L)$ = Mittlere Erdtemperatur $= 288\mathrm{K}$

Aus $(**)$ erhält man $f = 9.8 \cdot 10^{-10} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$

Aus $(*)$ bekommt man dann $T(0) = 3.9 \cdot 10^7 \mathrm{K}$ (unrealistisch!)

Der dreidimensionale Planet

Wir betrachten dünne Kugelschalen:



Fluss durch K_{i-1} nach innen: $\lambda 4\pi(i-\frac{1}{2})^2\Delta x^2(T_i - T_{i-1})\frac{1}{\Delta x}$

Fluss durch K_i nach innen: $\lambda 4\pi(i+\frac{1}{2})^2\Delta x^2(T_{i+1} - T_i)\frac{1}{\Delta x}$

Heizleistung dazwischen: $f 4\pi(i\Delta x)^2\Delta x\rho$

Die Bilanz ergibt:

$$\frac{(1+\frac{1}{2i})^2 T_{i+1} - (2+\frac{1}{2i^2})T_i + (1-\frac{1}{2i})^2 T_{i-1}}{\Delta x^2} = -\frac{f\rho}{\lambda}$$

Lassen wir quadratische Terme $\frac{1}{i^2}$ weg, so ergibt sich

$$(1+\frac{1}{i})T_{i+1} - 2T_i + (1-\frac{1}{i})T_{i-1} = -\frac{f\rho\Delta x^2}{\lambda}$$

Der Ansatz $T_i = ai^2 + T_0$ liefert $a = -\frac{f\rho\Delta x^2}{6\lambda}$. Somit

$$T_i = -\frac{f\rho\Delta x^2}{6\lambda} i^2 + T_0$$

Setzen wir noch $x = i\Delta x$ so erhalten wir

$$T(x) = T_0 - \frac{f\rho x^2}{6\lambda} \qquad (*)$$

Die Strahlenbilanz an der Oberfäche der Kugel mit Radius R

$$f\frac{4}{3}\pi R^3\rho = 4\pi R^2(\sigma T_R^4(1-a) - \bar{\Sigma}(1-a))$$

ergibt die Randbedingung

$$\rho R f = 3(1-a)(\sigma T(R)^4 - \bar{\Sigma}) \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ erhält man durch Elimination von f

$$T(R) = T_0 - \frac{R(1-a)(\sigma T(R)^4 - \bar{\Sigma})}{2\lambda}$$

Für eine Kerntemperatur $T(0) = 7000$K und Erddaten wie zuvor erhält man eine Oberflächentemperatur $T(R)$ von etwas über 278K und damit dann $f = 3.6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{W}}{\text{kg}}$.

Fragen, die man nun diskutieren kann

- Diskutiere Unterschiede zwischen Planet und Modell
- Berechne in $(*)$ $T'(R)$, also den Temperaturgradienten an der Erdoberfläche (Erdwärmenutzung)
- Berechne in $(**)$ die Ableitung von $T(R)$ nach a, also die Änderung der Gleichgewichtstemperatur bei Änderung der Albedo-Konstanten (Klimawandel)
- Jupitermond Europa: Wie tief unter dem Eis liegt der (vermutete) Wasserozean?