Mathematik und Spiele

Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

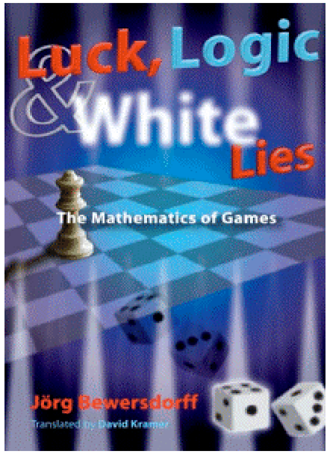
14. September 2011

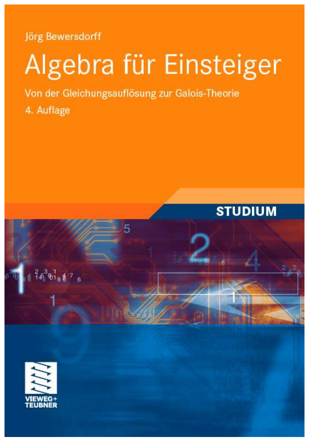
Jörg Bewersdorff

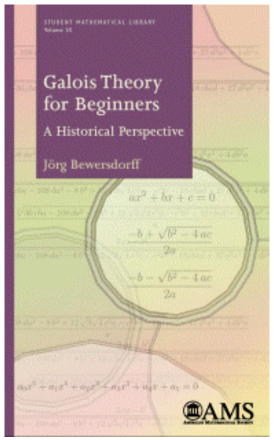
http://www.bewersdorff-online.de

Zur Person

- 1975-1982 Studium: Mathematik (Bonn)
- 1985 Promotion (Bonn): Zahlentheorie, alg. Topologie
- 1985- tätig in der Automatenwirtschaft
- 1998 **„Glück, Logik und Bluff"**
- 2002 „Algebra für Einsteiger"
- 2011 „Statistik – wie und warum sie funktioniert"
- derzeit Geschäftsführer von drei Automatenherstellern



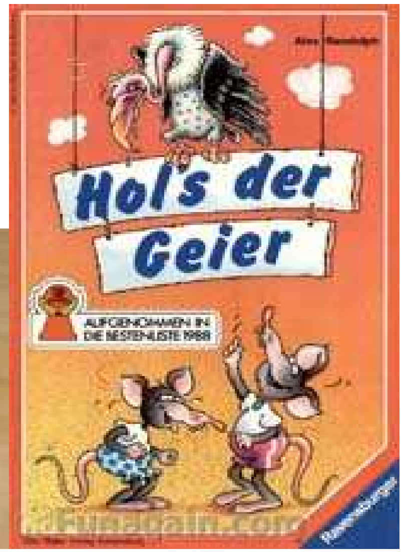


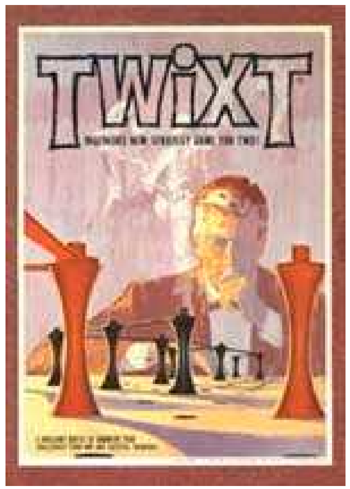


Gesellschaftsspiele ...

*Es gibt zwei Elemente, durch die sich Spiele von allen anderen unserer Erfahrungswelten unterscheiden. Das eine Element ist die **Ungewissheit**, das andere Element die **Gerechtigkeit**.*

Alex Randolph, Spielautor





Ungewissheit

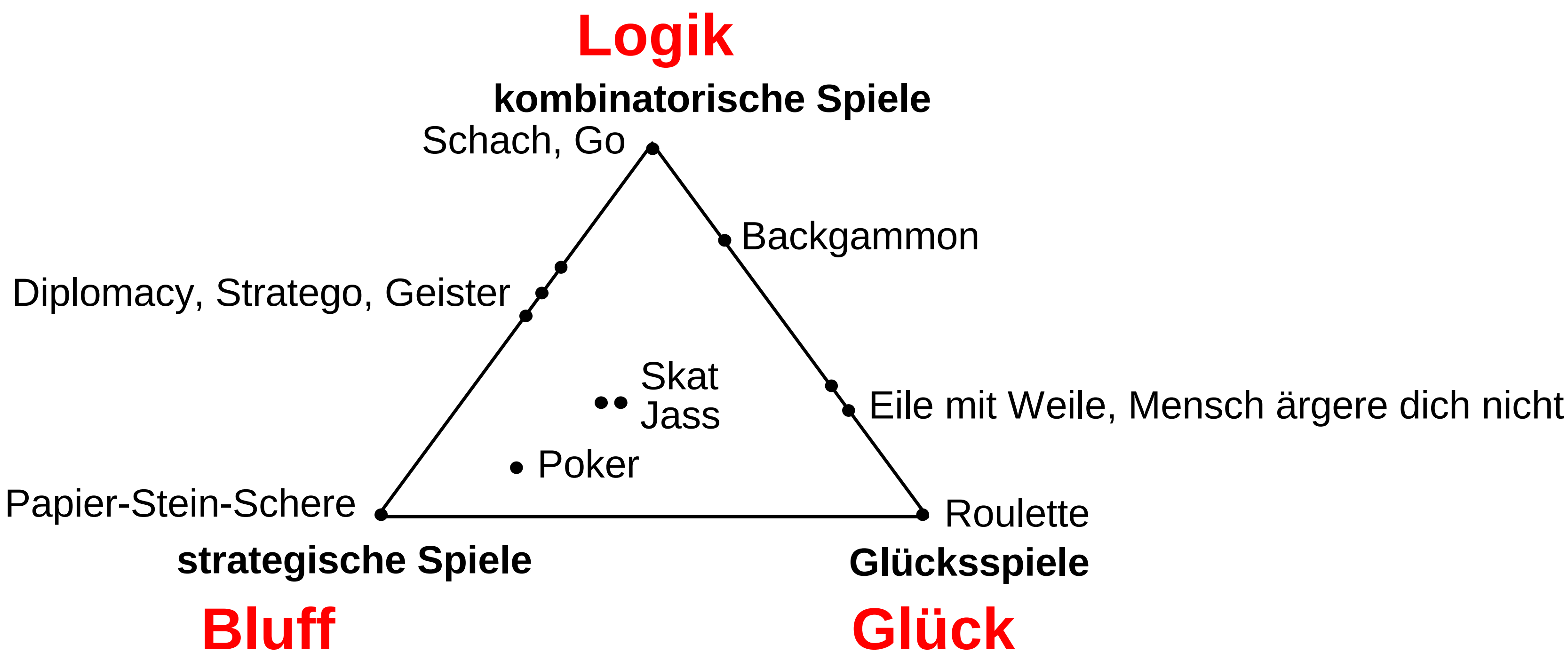
- Letztlich **die** Motivation zum Spiel, erzeugt sowohl
  - **Unterhaltung** und **Spannung** durch Abwechslung wie
  - allseitige **Gewinnhoffung**

- Für diese Ungewissheit gibt es prinzipiell drei verschiedene **Ursachen** ...

Ungewissheit: Ursachen

- **Zufall** (Kartenmischen, Würfeln)
- **vielfältige Kombinationen** von Zugmöglichkeiten zu Zugfolgen (Schach: selbst ein „Zwei-Züger" kann nicht-trivial sein)
- **verdeckte Information** (jeder kennt nur seine eigenen Karten bzw. gleichzeitige Züge wie bei Papier-Stein-Schere)

(Bei-)Spiele für Spieltypen



… und noch etwas aktuellere Spiele

SPANNUNGSDREIECKE / TRIANGEL-WERTUNG

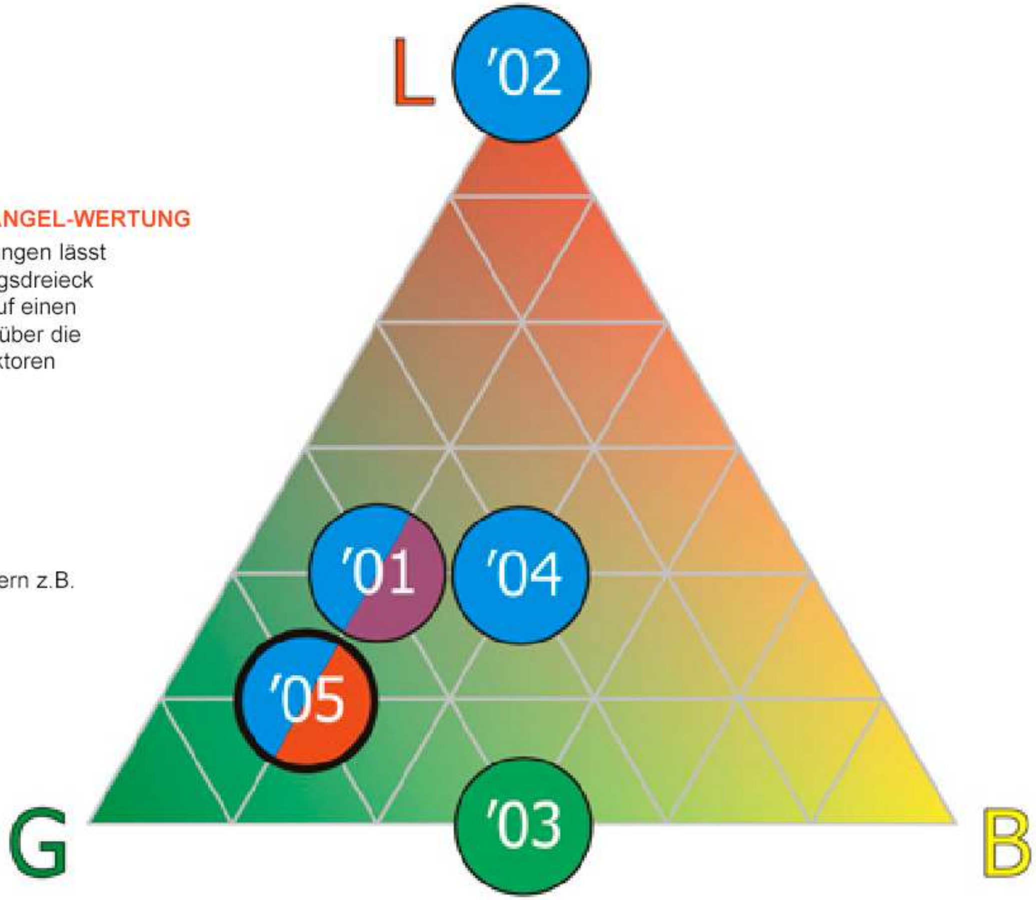
Als Quintessenz dieser Überlegungen lässt sich für jedes Spiel ein Spannungsdreieck bilden (Triangel-Wertung), das auf einen Blick einen deutlichen Überblick über die charakteristischen Spannungsfaktoren geben kann:

Mechanismen:
G = Glück/Zufall
B = Bluff/Informationslücke
L = Logik/Kombinationsvielfalt
○ = normal
□ = Hauptfaktor nicht GBL, sondern z.B. Geschicklichkeit

Wertungen:
grün = Rennen
rot = Knockout
blau = Zählung
violett = Showdown

Runden:
o = verstärkter Ring in schwarz

´01 Die neuen Entdecker
´02 Pueblo
´03 King Arthur
´04 Einfach genial
´05 Trans Europa



Wozu Mathematik für‘s Spiel?

- Realisierung gut(!) spielender Programme
- Theoretische Auslotung des dabei erreichbaren Qualitätslevels
- Mathematische Charakterisierung rechtlicher Einordnungen (z.B. „Glücksspiel” in Abgrenzung zum „Geschicklichkeitsspiel”)

  Schach gegen einen Computer wird – trotz der ausschließlich von der Logik beherrschten Spielregeln – zum Glücksspiel, wenn die Bedingungen so gesetzt werden, dass der Computer seine im Programm angelegte Überlegenheit ausspielen kann und der Durchschnittspieler deshalb auch unter Aufbietung höchster geistiger Anspannung chancenlos ist.

  Verwaltungsgericht Wiesbaden 10.10.1995 (5/3 E 32/94)
- Modellierung realer Entscheidungsprozesse (z.B. zur Versteigerung von UMTS-Lizenzen)

Unabhängiger Finanzsenat Wien ...

UNABHÄNGIGER FINANZSENAT

Außenstelle Wien
Senat 21

GZ. RV/1662-W/06

Berufungsentscheidung

Der unabhängige Finanzsenat hat über die Berufungen des Dr. Wolfgang Leitner als Masseverwalter der Bw., 1010 Wien, Kohlmarkt 14, gegen den Bescheid gemäß § 201 BAO des Finanzamtes für Gebühren und Verkehrsteuern Wien vom 19. Mai 1994 betreffend Rechtsgebühren gemäß § 33 TP 17 GebG und Erhöhung für den Zeitraum 1. Februar 1994 bis 28. Februar 1994 entschieden:

1.) Der Berufung wird teilweise Folge gegeben und der angefochtene Bescheid abgeändert:

Die Rechtsgebü
Euro 3,133.120,

Im Übrigen wirc

2.) Der Berufun
Erhöhung von E

(Schillinginform
S 43,112.675,0(

Die Berufungswerberi
Möglichkeit, an von ih
Geldeinsatz teilzunehr
die im Rahmen ihres (

IV.) Verwendete Literatur:

- Glücksverträge – Gewagte Geschäfte, online Lehrbuch Zivilrecht, Kapite
Barta: Zivilrecht – Grundriss und Einführung in das Rechtsdenken (http://
- Jörg Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, Mathematik im Spiel – Metho
Auflage, vieweg
- Gerhard Strejcek/Dietmar Hoscher/Markus Eder, Glücksspiel in der EU
- Dr. Rudolf Sieghart, Die öffentlichen Glücksspiele, Wien, 1899
- Erlacher, Glücksspielgesetz, Stand 1. Oktober 1997, 2. Auflage, Verlag
- Schwartz-Wohlfahrt, Glücksspielgesetz mit wichtigen Spielbedingungen
- Frank Höpfl, Zum Beweisthema der Abhängigkeit eines Spieles vom Zu
Mathematik 1978,
- Christian Bertl, Klaus Schweighofer, Österreichisches Strafrecht, Beson
- Ürek Vedat, Das Glücksspielstrafrecht und die Pokercasinos in Österrei
Diplomarbeit an der Universität Innsbruck
- Rita Danyliuk, Einmaleins der Kartenspiele, Humboldt, 2003
- Alexander B. Szanto, Poker, Ekarte und Starpoker, 12. Aufl., Perlen-Rei
- Piatnik, Richard F. Scheibb, Meister Poker, 1971
- Sven Pieper, Bärbel Schmidt, Kartenspiele, Reclam Taschenbuch, 1994
- Andy Bellin, Full House, Die Poker-Spieler und ihre Geheimnisse, Europa Verlag, 2002
- Homo ludens, Der spielende Mensch, V, Internationale Beiträge des Institutes für Spielforschung und Spielpädagogik an der Hochschule "Mozarteum" Salzburg, Verlag Emil Katzenbichler, München-Salzburg, 1995,
- Michael Monka/Manfred Tiede/Werner Voß, Gewinnen mit Wahrscheinlichkeit, Statistik für Glücksritter, rororo Taschenbuch, 1999
- Prof. Dr. W.A. Wagenaar, Bluffen beim Pokerspiel, Reichsuniversität in Leiden

I.) Zur Gebührenpflicht dem Grunde nach

können entscheiden, ob sie Karten zukaufen wollen oder nicht. Die zugekauften Karten dürften offen vor den Spieler hingelegt worden sein. Die Karten des Spieler-Gebers werden dann aufgedeckt und er kann dann 1 Karte kaufen. Wenn der Spieler-Geber mit dem Kaufen der Karten fertig ist, werden die Karten der Gegenspieler der Reihe nach aufgedeckt und gegen das Blatt des Spieler-Gebers verglichen. Wer näher an der Punktezahl 9 ist, der Spieler oder der Spieler-Geber, der hat gewonnen. Auf die Kartenkombinationen der anderen Spieler hat das keinen Einfluss. Zum Beispiel Spieler-Geber und Spieler tätigen je einen Einsatz von 50, dann bekommt der, der gewonnen hat, 100. Jeder einzelne Spieler hatte ca. 5 Schilling pro Spielbox zu zahlen.

"Bluff" wie beim Pokerspiel kann es hier durchaus geben, allerdings nur zwischen Spieler und Spielergeber. Das resultiert aus den verdeckten Karten.

Ein Taktieren ist im Hinblick auf die Merkfähigkeit der Kartenkombinationen aller am Spiel beteiligten Spieler möglich – wie beim Black Jack, allerdings hier bezogen auf mehrere Spielrunden.

Nach Auskunft des Geschäftsführers gab es bei Lucky 9 Turnierspiele. Diese Turnierspiele wurden wie beim Poker nach einer eigenen Spielregel durchgeführt.

7.1. Spielstrategische Momente

Laut Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, 301 ff, Kapitel: Baccarat: Ziehen bei Fünf?: „Sehen wir uns die Spielchancen zunächst auf rein intuitiven Niveau an: Spieler und Bank haben nur dann Entscheidungen zu treffen, wenn beide Ausgangsblätter einen Wert von 0-7 ergeben. Um ein möglichst günstiges Blatt zu erhalten tun Spieler und Bank gut daran, bei niedrigen Werten eine dritte Karte zu ziehen; dagegen kann bei Werten von 7 oder knapp darunter meist auf eine Karte verzichtet werden. Speziell der Spieler muss allerdings bedenken, dass er mit seiner Entscheidung der Bank einen Hinweis auf die mutmaßliche Qualität seines Ausgangsblattes gibt. Da eine dritte Karte offen ausgeteilt wird, lassen sich diese Hinweise, wenn auch in Grenzen, gegebenenfalls sogar auf das Gesamtblatt übertragen. Insgesamt kann die Bank damit ihre Strategie immer dann erfolgreich anpassen, wenn die Handlungen des Spielers Rückschlüsse auf dessen Ausgangsblatt zulassen."

Im Hinblick auf die Merkfähigkeit der Kartenkombinationen wurde gleichzeitig wie zu Black Jack eine so genanntes Zählsystem mathematisch entwickelt, um sich einen ungefähren, aber ausreichenden Überblick über die Kartenzusammensetzung des Kartenstapels zu verschaffen.

8.) Die Grundstruktur von Concord Aces

Von der Bw. wurde das Kartenspiel Concord Aces angeboten. Concord Aces gilt dem Black Jack ähnlich. Laut http://de.wikipedia.org/wiki/Black_Jack ist Black Jack das meistgespielt

aufgedeckte Karte. Hat der Spieler einen Black Jack (bestimmter Kartenwert) hat er das Spiel gewonnen. Er erhält seinen Einsatz zurück und darüber hinaus eine Gewinnauszahlung in Höhe des Eineinhalbfachen seines Einsatzes: zB 100 Euro Einsatz + 150 Euro Gewinn. Wenn die Bank jedoch ebenfalls mit einer 2. Karte einen Black Jack erreichen könnte, erhält der Spieler zunächst keine Auszahlung.

Die Autoren berechnen die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Punktestände der Bank, mit denen sie ihr Spiel beendet, bzw. des Spielers um das Spiel zu gewinnen bzw. zu verlieren und kommen zu folgendem Schluss: Die Gewinnerwartung ist nur dann positiv, wenn bestimmte Spielregeln gelten und sofern sich der Spieler an bestimmte Spielregeln hält. Freilich ist die Gewinnerwartung unter den erwähnten Spielregeln nur unwesentlich größer als Null – sie liegt ungefähr bei einem Prozent. Black Jack ist das einzige bekannte Glücksspiel mit unter bestimmten Bedingungen positiver Gewinnerwartung für den Spieler. Black Jack ist im Vergleich zum Roulette das für den Spieler günstigere Spiel. Die „ultimative" Black Jack Strategie hat emotional im Grunde wenig Prickelndes zu bieten: Die Bank muss sich wie ein Automat verhalten, und der Spieler sollte sich wie ein Automat verhalten, wenn er nicht verlieren will."

Laut Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, 81 ff, Kapitel: Black Jack, Ein Märchen aus Las Vegas, haben die Spieler bei Black Jack, anders als beim Roulette einen erheblichen strategischen Einfluss, da sie entscheiden, ob sie noch weitere Karten ziehen wollen oder nicht. In der Literatur zu Black Jack wurde eine Strategie beschrieben, wonach ein Spieler ca. 3,3% bis 10% Gewinnchancen hat. Grundidee war es sich mittels eines so genannten Zählsystems einen ungefähren, aber ausreichenden Überblick über die Kartenzusammensetzung des Kartenstapels zu verschaffen:

„Diese Zählstrategien erfordern allerdings ein Höchstmaß an Übung und Konzentration, denn jede im schnellen Spielverlauf getroffene Fehlentscheidung geht im Mittel zu Lasten des Spielers. Nur wer ständig richtig zählt und seine Strategie entsprechend anpasst, kann seinen geringfügigen Vorteil gegen die Bank halten. Erfolgreiche Card-Counter dürften daher in der Masse der alles andere als optimal spielenden Durchschnittsspieler untergehen. Dass sich der minimale Vorteil zudem nur auf die Erwartung bezieht und durch Pech im Einzelfall zunichte gemacht werden kann, versteht sich von selbst."

9. Die Gutachten im Einzelnen

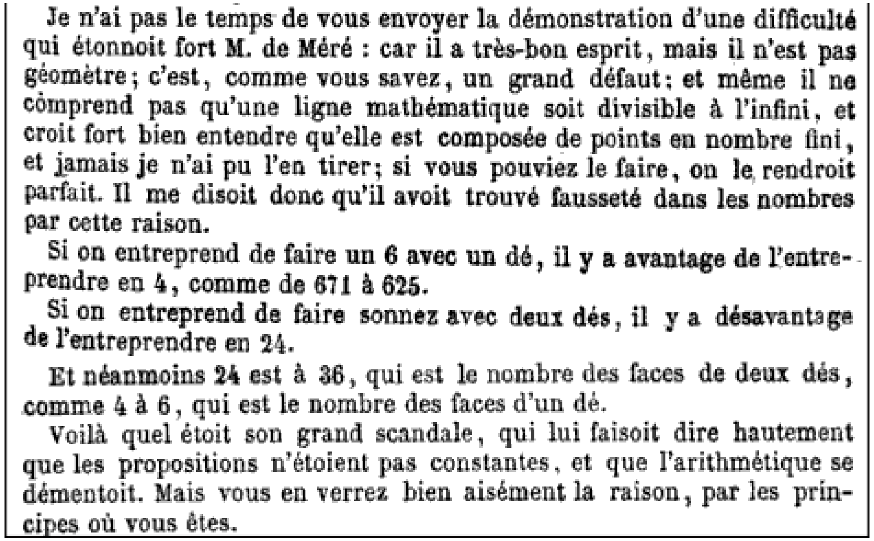
9.1. April 1994: Bericht „Ein Vergleich der Geschicklichkeit in Spielen mit einem Hasardelement" (Universitätsprofessor für Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, Dr. B.B. van der Genugten und Universitätsdozent für Spieletheorie, Dr. P.E.M. Borm, beide Katholische Universität Brabant, Tilburg, Niederlande),

Die Mathematik der Spiele

- Zufall: **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (ab 1654 „Glücksspieltheorie" von Pascal und Fermat)
- Kombinationsvielfalt: diverse Bezüge zur Mathematik, seit ca. 1970 insbesondere **Kombinatorische Spieltheorie**
- verdeckte Information: **Spieltheorie** (John von Neumann: 1928 und richtig ab 1944).

1. GLÜCK:
Vom Glücksspiel ...

- 1222: erste richtige Analyse über Würfelspiele und deren Chancen. Es folgen weitere, isolierte und oft falsche Analysen.
- 1654 **Fermat**, **Pascal** entwickeln Systematik zur Lösung von Glücksspielproblemen (u.a. für **de Méré**):
  - Reichen 24 Würfe, um auf mind. eine Doppel-Sechs zu setzen?



Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. de Méré : car il a très-bon esprit, mais il n'est pas géomètre; c'est, comme vous savez, un grand défaut; et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini, et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous pouviez le faire, on le rendroit parfait. Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

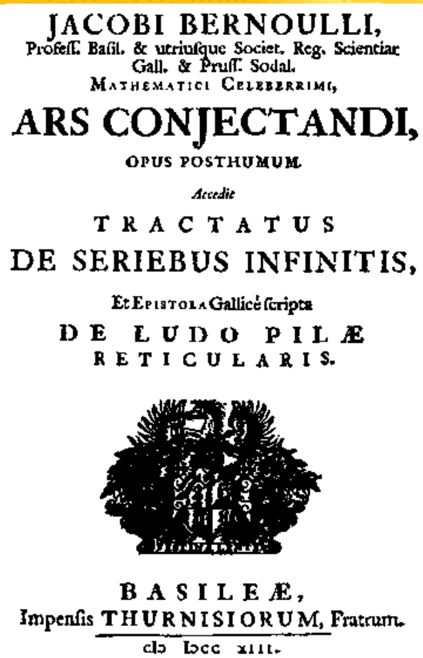
Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

Voilà quel étoit son grand scandale, qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, et que l'arithmétique se démentoit. Mais vous en verrez bien aisément la raison, par les principes où vous êtes.

... zur Wahrscheinlichkeit



- 1657-, 1703-, 1786- **Huygens**, **Jacob Bernoulli**, **Laplace ...**: Glücksspiele sind Standard- aber nicht alleinige Beispiele:
  - determinierte Modell-Situation
  - „Laplace-Modell" reicht
  - Wahrscheinlichkeit: Chance auf Gewinn (aufgrund von Symmetrien oder als experimentell bestimmbarer Messwert)
  - Zufallsgröße: Höhe des Gewinns
  - Erwartungswert: „fairer" Einsatz, z.B.:
    $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ „fairer" Einsatz für zwei Gewinnspiele X, Y;
    $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ für unabhängige X,Y , „fairer" Einsatz für „Schiebewette"

Wahrscheinlichkeiten beim Roulette

- Roulette ist – außer bei defekten Kesseln – mathematisch eher uninteressant
- Es gibt ein Gesetz der großen Zahlen, aber *kein* „Gesetz des Ausgleichs”, d.h.:

  In Spielserien nähern sich die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten an (die Überschreitung beliebig kleiner Abweichungen wird beliebig unwahrscheinlich). Die absoluten Wahrscheinlichkeiten konvergieren aber nicht!

  Beispiel, dass es beim Gesetz der großen Zahlen keines Ausgleichs bedarf:

  Nach 10×„Rot” nimmt bei 6×„Rot” und 4×„Schwarz” das relative Übergewicht von „Rot” ab, obwohl das absolute Übergewicht zunimmt.

Erwartungswerte beim „Swiss Lotto“

- Wahrscheinlichkeiten für alle ca. 8,145 Mill. „6 aus 45”-Tippmöglichkeiten sind gleich.
- Aber: Quoten bei selten gesetzten Zahlen und Zahlkombinationen sind höher.
- Besonders schlecht sind „Geburtstagstipps” und regelmäßige geometrische Muster. Dazu eine Untersuchung von 16,8 Mill. Tippreihen (Riedwyl, 6. Ziehung 1990) ...

Lotto: 16,8 Mill. Tippreihen

1	2	3	4	5	~~6~~
7	8	9	10	~~11~~	12
13	14	15	~~16~~	17	18
19	20	~~21~~	22	23	24
25	~~26~~	27	28	29	30
~~31~~	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

24120-mal getippt

~~1~~	2	3	4	5	6
7	~~8~~	9	10	11	12
13	14	~~15~~	16	17	18
19	20	21	~~22~~	23	24
25	26	27	28	~~29~~	30
31	32	33	34	35	~~36~~
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

24009-mal getippt

1	2	3	4	5	6
~~7~~	8	9	10	11	12
13	~~14~~	15	16	17	18
19	20	~~21~~	22	23	24
25	26	27	~~28~~	29	30
31	32	33	34	~~35~~	36
37	38	39	40	41	~~42~~
43	44	45			

17913-mal getippt

1	2	3	4	5	6
7	~~8~~	9	10	11	12
13	~~14~~	15	16	~~17~~	18
19	20	21	22	23	24
~~25~~	26	27	28	29	30
~~31~~	32	33	34	35	~~36~~
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

12008-mal getippt

1	2	~~3~~	4	5	6
7	8	~~9~~	10	11	12
13	14	~~15~~	16	17	18
19	20	~~21~~	22	23	24
25	26	~~27~~	28	29	30
31	32	~~33~~	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

11297-mal getippt

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

10637-mal getippt

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	~~12~~
13	14	15	16	~~17~~	18
19	20	21	~~22~~	23	24
25	26	~~27~~	28	29	30
31	~~32~~	33	34	35	36
~~37~~	38	39	40	41	42
43	44	45			

10170-mal getippt

1	2	3	4	5	~~6~~
7	8	9	10	11	~~12~~
13	14	15	16	17	~~18~~
19	20	21	22	23	~~24~~
25	26	27	28	29	~~30~~
31	32	33	34	35	~~36~~
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

8663-mal getippt

Black Jack

MATHEMATIK

17 UND 4

Formel des Glücks

Nennen Sie uns einen Mann, der ein neues ‚System' erfunden hat", so hieß es jahrzehntelang im Werbejargon der Spielbanken von Las Vegas (US-Staat Nevada). „Egal, wo er wohnt, wir werden ein Taxi hinschicken und ihn holen lassen."

Die Spielhöllenfürsten der amerikanischen Vergnügungsmetropole schicken kein Taxi zu Edward O. Thorp, 31, Professor für Mathematik an der New Mexico State University.

„Dieser Bursche", kommentierte Anfang des Monats Gabriel Vogliotti, einer der Kasino-Manager, „ist der erste, der die traditionellen Gewinnchancen . . . tatsächlich über den Haufen geworfen hat."

Mit Hilfe eines Elektronengehirns hat der Mathematikprofessor ein System ausgeklügelt, das erstmals in der Geschichte des Glücksspiels dem Spieler bessere Chancen einräumt als der Bank.

„Wenn die fingerfertigen Bankhalter in den Kasinos mich nicht beschummeln würden und wenn ich acht Stunden täglich . . . mit Höchsteinsätzen spielen könnte", so berechnete Thorp seine Spielchance, „dann könnte ich die Welt und alles, was drauf ist, in 80 Tagen gewinnen."

Das Glücksspiel, das Thorp zu einem mathematisch überschaubaren Geschicklichkeitswettbewerb degradierte, wird in bundesrepublikanischen Spielkasinos — in denen die Spieler sich um Roulett- und Bakkarat-Tische scharen — nicht gespielt. Aber in den Spielpalästen der amerikanischen Glückszentren Reno und Las Vegas ist es neben dem Würfelspiel die beliebteste Art, Dollar-Chips über das grüne Tuch zu schieben: 17 und 4.

Durchschnittlich 280 Millionen Mark haben allein die Spielkasinos in Nevada in den vergangenen Jahrzehnten jedes Jahr mit dem flinken Kartenspiel verdient, bei dem 21 Kartenaugen über Gewonnen oder Zerronnen entscheiden.

Das dollarträchtige Punkt-Spiel — im amerikanischen Spielerjargon „Black-jack" genannt — wird zwischen einem oder mehreren Spielern und dem Bankhalter ausgetragen. Nach den in USA

gültig
Spiel
Asse
Punkt
zehn;
bis Ze
druck
Wä
satz f
an je
Spiele
dann
rer K
Traum
zum
den al
21 am
allerd
21 Pu
zu der
Es
gierde
Leider
Mathe
weile
Karte
den li
Tho
in die
Schüle
Raket

DER SPIEGEL 29.04.1964 Seite 127

Optimale Black-Jack-Strategie

Kartenverteilung: 23-23-23-23-23-23-23-23-87-21

Regelvariante: Kein Teilen und Doppeln geteilter Blätter. Direkte Black-Jack-Prüfung der Bank: Nein (Europa)

Bank: / Spieler	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand
19	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand
18	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand
17	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand
16	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw
15	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw
14	Stand	Stand	Stand	Stand	Stand	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw
13	Draw	Stand	Stand	Stand	Stand	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw
12	Draw	Draw	Draw	Stand	Stand	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw
11	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw	Draw

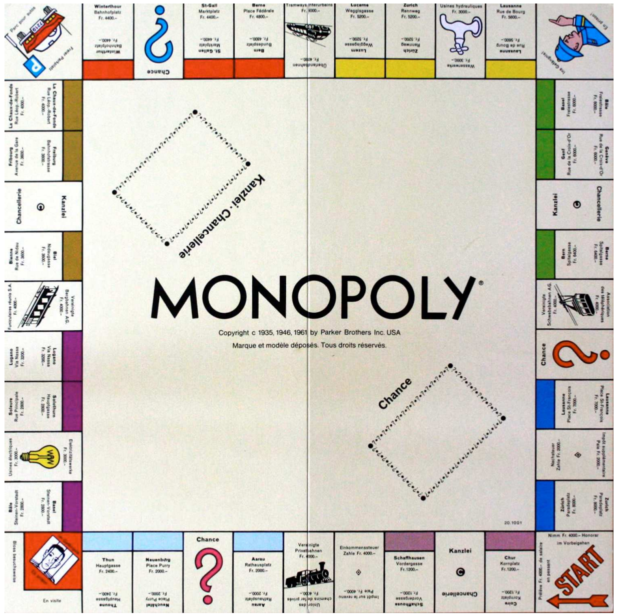
Black Jack

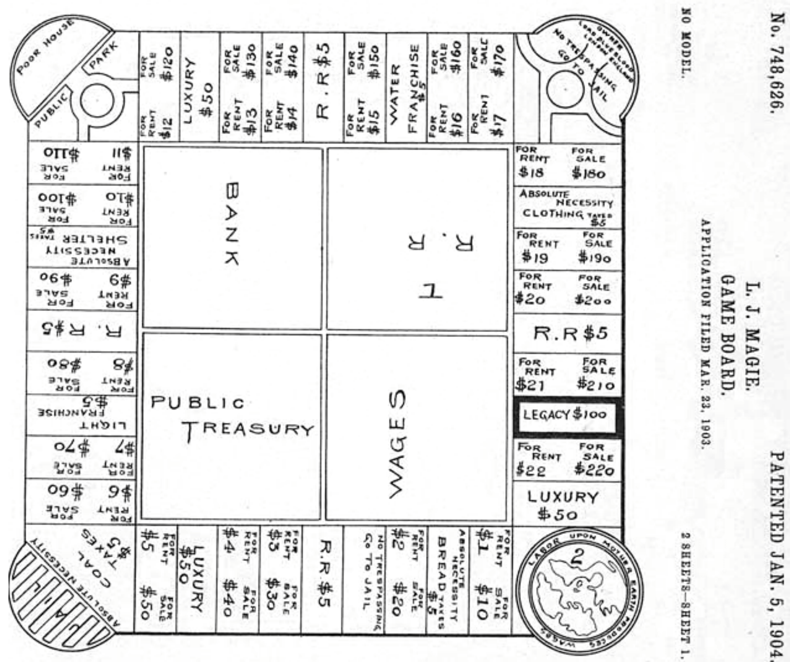
- Mit „Siebzehn-und-Vier" verwandtes Casinospiel, das gegen die Bank gespielt wird. Chancen variieren je nach Strategie (z.B. Gewinnerwartung –0,057 bei naheliegender Bank-Imitat-Strategie).
- Baldwin u.a. (1956): Optimale Ziehstrategie (ohne Berücksichtigung der gezogenen Karten, Gewinnerwartung: – 0,006 bis –0,008 je nach Regelvariante).
- Thorp 1961: Bei Berücksichtigung der gezogenen Karten ist positive Gewinnerwartung möglich:

www.bewersdorff-online.de/blackjack/

Monopoly: Das Spiel

- Meistverkauftes Wirtschaftsspiel:
  ca. 250 Mill. verkaufte Exemplare.
- Erfunden 1931 durch Charles Darrow
- Aber: Landlord's Game von 1904 war Vorläufer





Monopoly: Das Problem

- **Wo winken die besten Renditen?**
- Strategischer Einfluss: kaum beim Ziehen, wohl aber bei den Investitionen.
- Symmetrie-Bruch durch Gefängnis (inkl. Pasch-Regel und Karten „Gehen Sie ... ”. Die 40 Felder unterscheiden sich daher erheblich im Hinblick auf die durchschnittliche Besuchs-Häufigkeit!
- Ertragskennziffer: Miethöhe × Wahrscheinlichkeit (= pro Zug zu erwartende Miete)

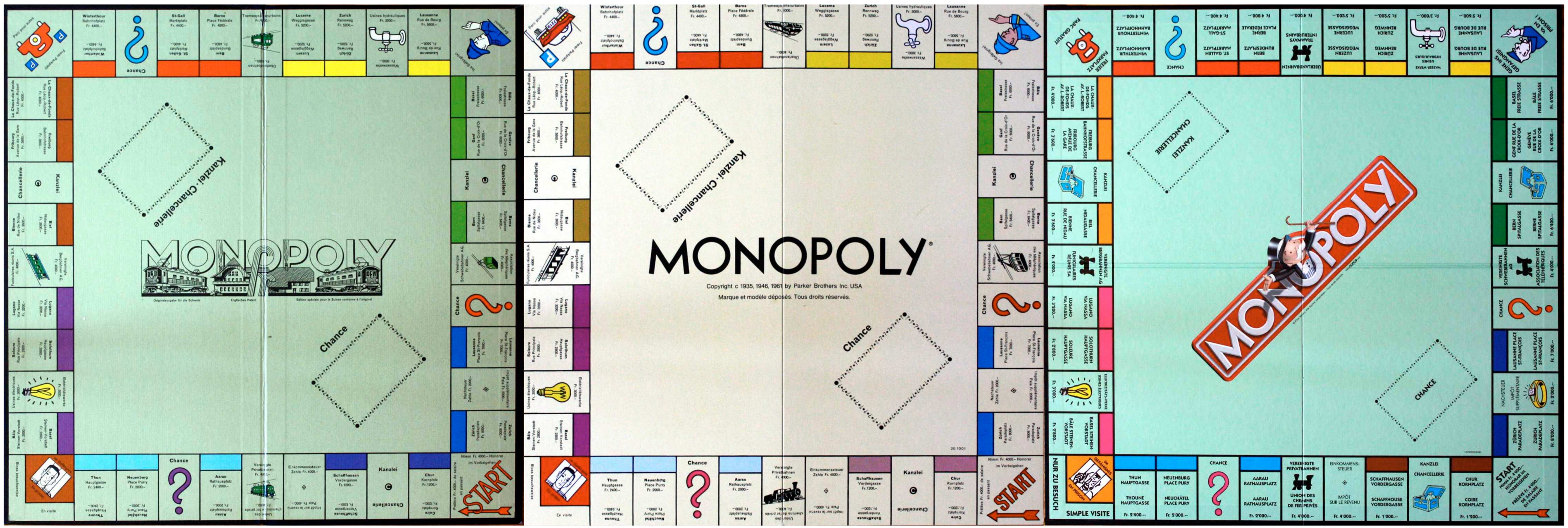
Monopoly als Markow-Kette

- Monopoly-Würfel-Rundkurs entspricht einer regulären Markow-Kette mit 120 Zuständen (40 Felder mit jeweils 3 Pasch-Unterzuständen).
- Eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung kann mittels (Monte-Carlo-)Simulation oder durch Lösen eines linearen 120×121-Gleichungssystems ermittelt werden:

  www.bewersdorff-online.de/monopoly

Monopoly: Das Resultat

- Bei der Schweizer Ausgabe landet man auf dem Bundesplatz (Bern) durchschnittlich 48% häufiger als auf dem Place St-François (Lausanne).



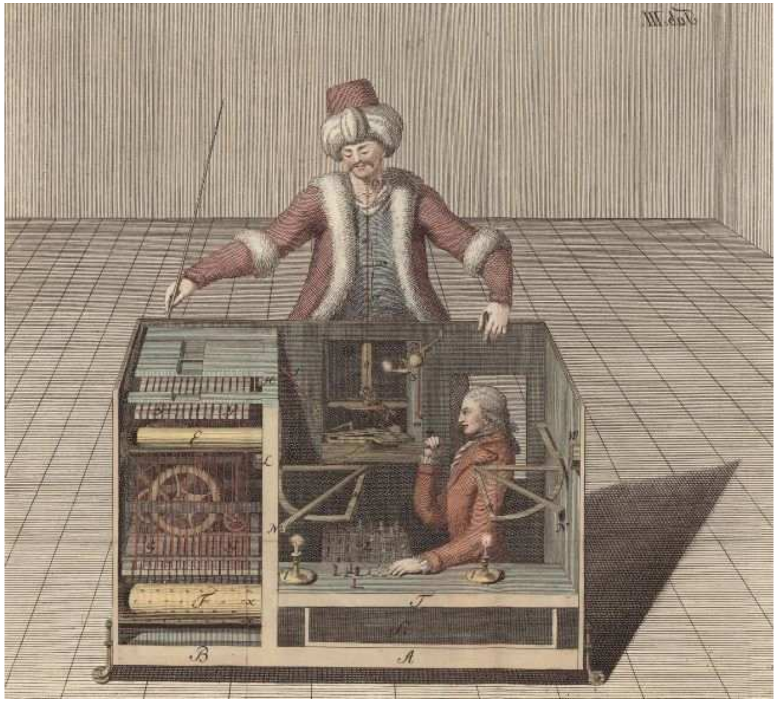
2. LOGIK:

Schach: Vorher, ...

In genauem Verhältnis zu dem Fortschreiten des Schachspiels steht die Ungewissheit jedes folgenden Zuges. Wenn ein paar Züge gemacht worden sind, so ist kein weiterer Schritt mehr sicher. Verschiedene Zuschauer des Spieles würden verschiedene Züge anraten. Es hängt also alles vom veränderlichen Urteil der Spieler ab. Wenn wir nun annehmen (was nicht anzunehmen ist), dass die Züge des automatischen Schachspielers in sich selbst bestimmt wären, so würden sie doch durch den nicht zu bestimmenden Willen des Gegenspielers unterbrochen und in Unordnung gebracht werden. Es besteht also gar keine Analogie zwischen den Operationen des Schachspielers und denen der Rechenmaschine des Herrn Babbage.

Edgar Alan Poe

(über den Schachautomaten des Baron von Kempelen)



Schach: ... die Frage, ...

ÜBER EINE ANWENDUNG DER MENGENLEHRE AUF DIE THEORIE DES SCHACHSPIELS

VON E. ZERMELO.

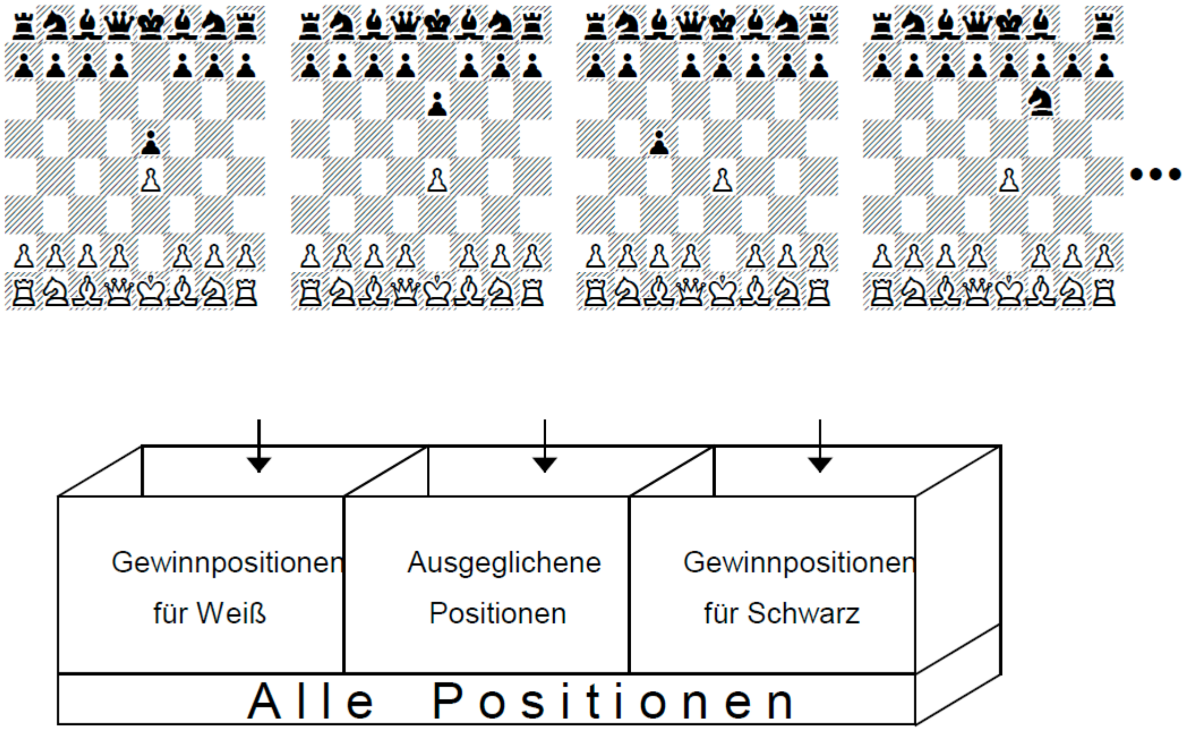
...

Kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Parteien sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne dass auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des „vollkommenen Spielers" und dergleichen Bezug genommenen zu werden brauchte? Dass dies wenigstens in einzelnen besonderen Fällen möglich ist, beweisen die sogenannten „Schachprobleme", d.h. Beispiele von Positionen, in denen der Anziehende nachweislich in einer vorgeschriebenen Anzahl von Zügen das Matt erzwingen kann ...

Ernst Zermelo, 1912

Schach: ... die Antwort, ...

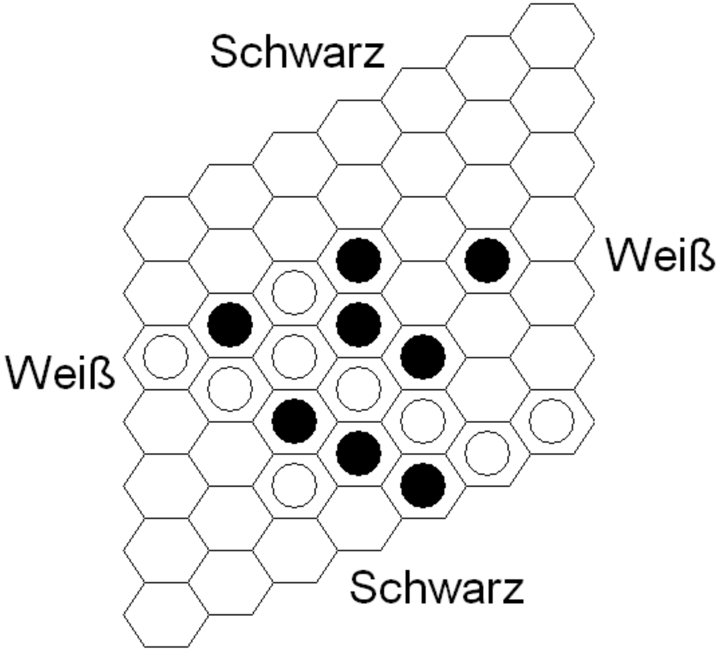
Jede Schachposition (=Stellung + Zugrecht) gehört zu genau einer Klasse:



… die Theorie: Zermelos Satz

- Jedes *endliches Zwei*-Personenspiel-*Null-summen*spiel mit *perfekter Information* besitzt einen eindeutigen Wert.
  - Rekursive Berechnung durch Bildung des Maximums bzw. Minimums der Werte der Nachfolgepositionen.
  - Schachcomputer nutzen dieses Prinzip.
  - Bei Zufallszügen (Backgammon) ist der Erwartungswert zu berechnen.
  - Bei 3-Personenspielen gilt das nicht.

Manche Spiele sind einfach ...



Hex:

- gezogen wird abwechselnd,
- Sieger ist, wer „seine" Seiten verbindet

- Kein Unentschieden möglich,
- also besitzt Anziehender Gewinnstrategie (Nash 1948, „Strategieklau"-Argument)

Vollständig gelöst:

- Mühle muss keiner verlieren!
  - 1994 beweisen von Nievergelt und Gasser (ETH Zürich) mittels Konstruktion einer Datenbank, die zu einer genügend großen Menge von Positionen Remis-haltende Zügen enthält.
- Diverse Schachendspiele
  - Datenbanken z.B. für KTS-KT, KD-KSS, KD-KSL, KD-KLL, KTL-KT

3. BLUFF:
Spiele ohne perfekte Information

- **Frage:**
  Kann man sich dagegen wehren, in einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit imperfekter Information von seinem Gegner psychologisch eingeschätzt und durchschaut zu werden?
- **Konkret:**
  Kann im symmetrischen Fall ein Verlust verhindert werden?

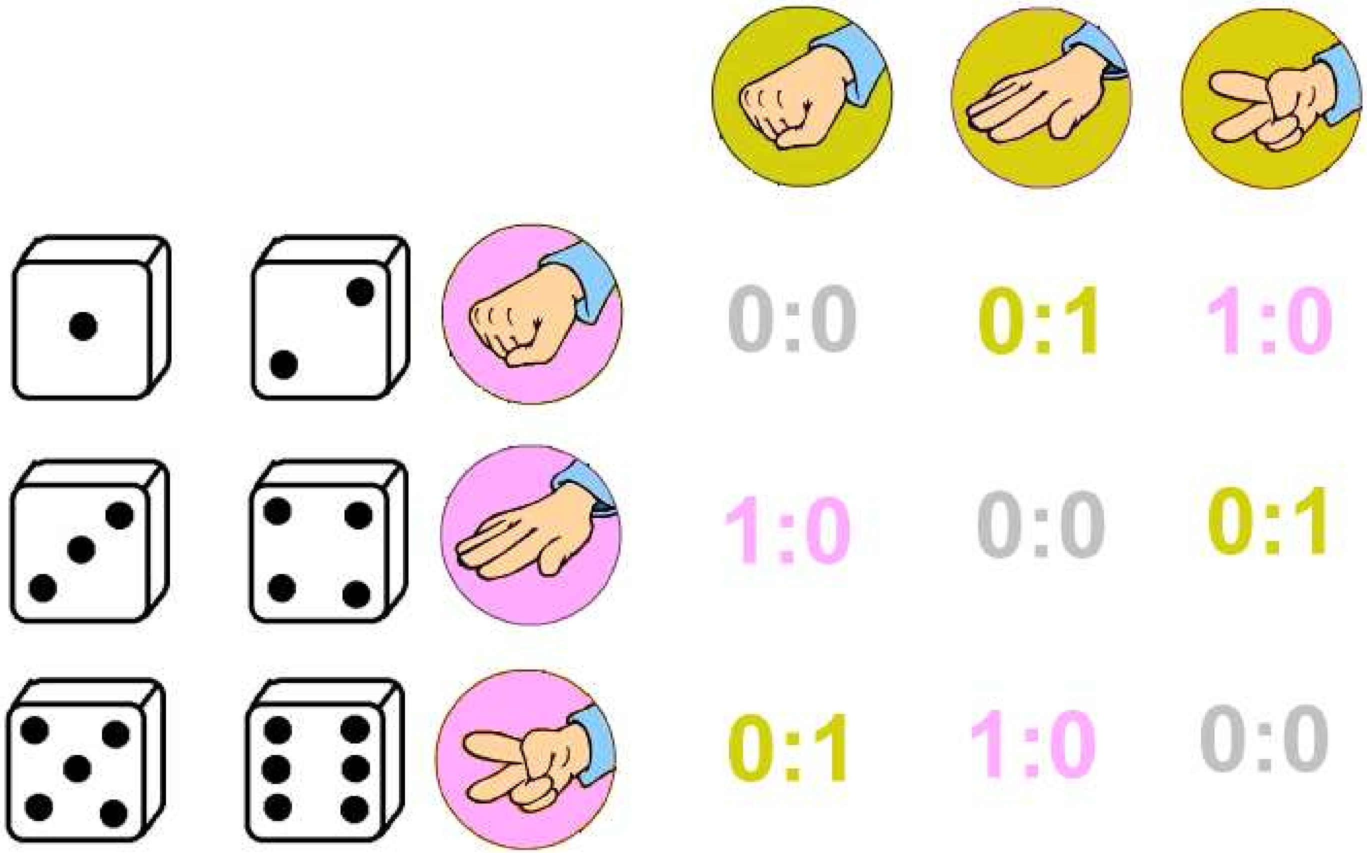
Ein Beispiel:

Dieses Spiel ist einfach und wird mit Murmeln gespielt. Ein Spieler hält eine Anzahl dieser Kugeln in der Hand und fragt einen anderen, ob es eine gerade oder ungerade Summe ist. Wenn der Betreffende richtig rät, hat er eine gewonnen; wenn falsch, eine verloren. Der Junge, den ich meine, gewann alle Murmeln in der Schule. Natürlich hatte er ein Prinzip beim Raten; und es beruhte auf der bloßen Beobachtung und dem Abschätzen der Schläue seiner Gegner. Zum Beispiel ist der Gegner ein ausgemachter Dummkopf: er hält seine geschlossene Faust hoch und fragt: ‚Gerade oder ungerade?'. Unser Schuljunge antwortet ‚ungerade' und verliert. Aber beim nächsten Versuch gewinnt er, denn er sagt sich: ‚Der Dummkopf hatte beim ersten Mal gerade, aber beim zweiten Versuch reicht seine Überlegung nur soweit, dass er jetzt ungerade macht; deshalb rate ich auf ungerade.' – Er rät auf ungerade und gewinnt.

Bei einem Dummkopf von nächsthöherem Grad hätte er so kombiniert: ‚Dieser Bursche merkt, dass ich beim ersten Mal ungerade geraten habe, und beim zweiten Mal wird er zunächst Lust zu einer simplen Abwechslung von gerade zu ungerade haben wie der erste Dummkopf. Aber dann wird ihm ein zweiter Gedanke kommen, dass dies nämlich eine zu simple Veränderung sei, und schließlich wird er sich wieder wie vorher zu gerade entscheiden. Deshalb rate ich auf gerade.' – Er rät auf gerade und gewinnt. Nun, welcher Art ist diese Kombination des Schuljungen, den seine Kameraden ‚vom Glück begünstigt' nannten – wenn man sie letztlich analysiert?

Edgar Allan Poe („Der entwendete Brief")

Papier-Stein-Schere: Zufall kontra Psychologie



Warum man bluffen sollte

Das wesentliche Moment ... ist, dass ein Spieler mit starkem Blatt wahrscheinlich hoch bieten – und oft überbieten wird. Wenn folglich ein Spieler hoch bietet oder überbietet, so kann sein Gegenspieler – a posteriori – annehmen, dass der andere ein starkes Blatt hat. Unter Umständen kann das den Gegner zum „Passen" veranlassen. Da aber beim „Passen" die Karten nicht verglichen werden, kann gelegentlich auch ein Spieler mit schwachem Blatt einen Gewinn gegen einen stärkeren Gegner erzielen, indem er durch hohes Bieten oder Überbieten einen (falschen) Eindruck von Stärke hervorruft und so seinen Gegner begreiflicherweise zum Passen veranlasst.

Dieses Manöver ist als „Bluffen" bekannt. Es wird zweifellos von allen erfahrenen Spielern angewandt.

GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR

By JOHN VON NEUMANN, and

OSKAR MORGENSTERN

19.2. Bluffing

19.2.1. The point in all this is that a player with a strong hand is likely to make high bids—and numerous overbids—since he has good reason to expect that he will win. Consequently a player who has made a high bid, or overbid, may be assumed by his opponent—*a posteriori!*—to have a strong hand. This may provide the opponent with a motive for "Passing." However, since in the case of "Passing" the hands are not compared, even a player with a weak hand may occasionally obtain a gain against a stronger opponent by creating the (false) impression of strength by a high bid, or by overbid,—thus conceivably inducing his opponent to pass.

This maneuver is known as "Bluffing." It is unquestionably practiced by all experienced players. Whether the above is its real motivation may be doubted; actually a second interpretation is conceivable. That is if a player is known to bid high only when his hand is strong, his opponent is likely to pass in such cases. The player will, therefore, not be able to collect on high bids, or on numerous overbids, in just those cases where his actual strength gives him the opportunity. Hence it is desirable for him to create

[1] In actual Poker the second player draws from a deck from which the first player's hand has already been removed. We disregard this as we disregard some other minor complications of Poker.

[2] This scheme is usually complicated by the necessity of making unconditional payments, the "ante," at the start,—in some variants for the first bidder, in others for all those who wish to participate, again in others extra payments are required for the privilege of drawing, etc. We disregard all this.

Symmetrisches Poker-Modell ...

- Kartenblatt: 6 mögliche, gleichwahr-scheinliche Werte.
- Kartenziehungen der Spieler voneinander unabhängig.
- Gleichzeitige Gebots-Auswahl: 1, 2, 3, 5, 10 oder 15.
- Symmetrie erlaubt „Black Box"-Erfolgs-kontrolle!

… und seine „Lösung“

Blatt / Gebot	1	2	3	4	5	6
1	0,35857	0,56071	0,50643	0,46857		
2	0,33786	0,12179	0,41179			
3	0,14143	0,16500		0,51571	0,00429	
5	0,05629	0,12757			0,59286	
10	0,06700	0,02493	0,08179	0,01571	0,14029	
15	0,03886				0,26257	1,00000

Verhalten („Strategie“), die durchschnittlichen Verlust verhindert

Blatt / Gebot	1	2	3	4	5	6
1					-0,18190	-3,33833
2				-0,02524	-0,28524	-3,44167
3			-0,09536			-3,15429
5			-0,07155	-0,23405		-2,66238
10						-2,92262
15		-0,05607	-0,23393	-0,39643		

„Schattenpreise”:
Einbußen bei Fehlern

John Nash:

Eine Dissertation, ein Nobelpreis und 4 Oscars

A Three-Man Poker Game

As an example of the application of our theory to a more or less realistic case we include the simplified poker game given below. The rules are as follows:

(1) The deck is large, with equally many high and low cards, and a hand consists of one card.

(2) Two chips are used to ante, open, or call.

(3) The players play in rotation and the game ends after all have passed or after one player has opened and the others have had a chance to call.

(4) If no one bets the antes are retrieved.

(5) Otherwise the pot is divided equally among the highest hands which have bet.

We find it more satisfactory to treat the game in terms of quantities we call "behavior parameters" than in the normal form of "Theory of Games and Economic Behavior." In the normal form representation two mixed strategies of a player may be equivalent in the sense that each makes the individual choose each available course of action in each particular situation requiring action on his part with the same frequency. That is, they represent the same behavior pattern on the part of the individual.

Behavior parameters give the probabilities of taking each of the various possible actions in each of the various possible situations which may arise. Thus they describe behavior patterns.

In terms of behavior parameters the strategies of the players may be represented as follows, assuming that since there is no point in passing with a high card at one's last opportunity to bet that this will not be

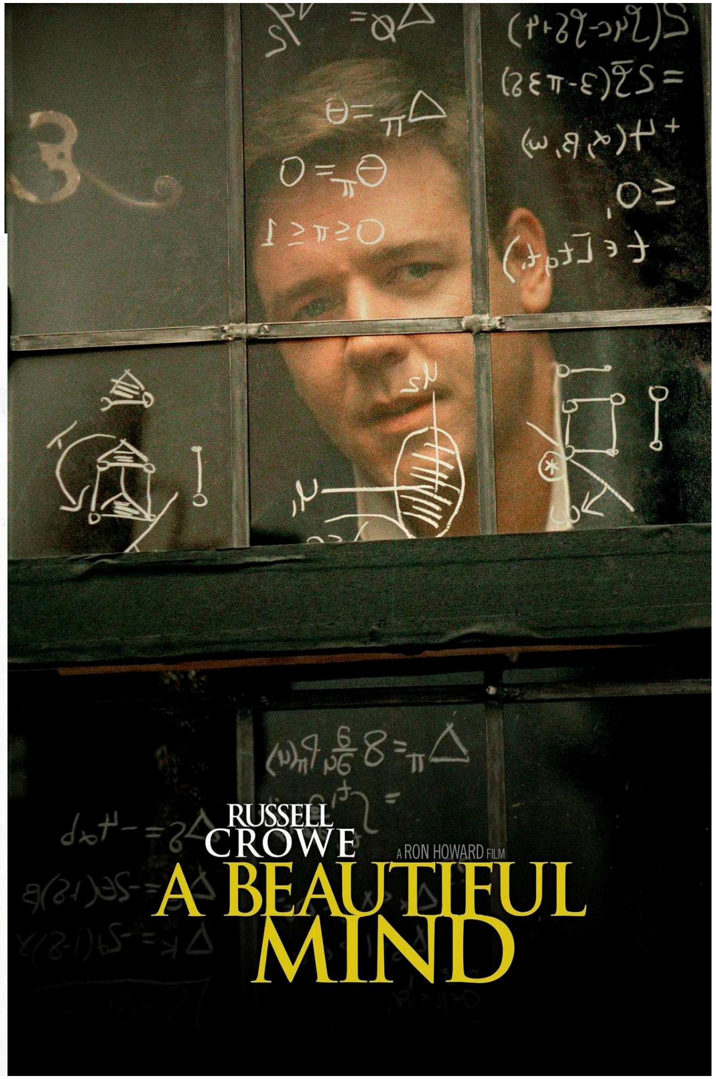
-18-

done. The greek letters are the probabilities of the various acts.

	First Moves	Second Moves
I	α Open on high β Open on low	κ Call III on low λ Call II on low μ Call II and III on low
II	γ Call I on low δ Open on high ϵ Open on low	ν Call III on low ξ Call III and I on low
III	ζ Call I and II on low η Open on low θ Call I on low ι Call II on low	Player III never gets a second move.

We locate all possible equilibrium points by first showing that most of the greek paramenters must vanish. By dominance mainly with a little contradiction-type analysis β is eliminated and with it go γ, ζ, and θ by dominance. Then contradictions eliminate $\mu, \xi, \iota, \lambda, \kappa$, and ν in that order. This leaves us with α, δ, ϵ and η. Contradiction analysis shows that none of these can be zero or one and thus we obtain a system of simultaneous algebraic equations. The equations happen to have but one solution with the variables in the range $(0,1)$. We get

$\alpha = \frac{21-\sqrt{321}}{10}$, $\eta = \frac{5\alpha+1}{4}$, $\delta = \frac{5-2\alpha}{5+\alpha}$, and $\epsilon = \frac{4\alpha-1}{\alpha+5}$. These yield $\alpha = .308$, $\eta = .635$, $\delta = .826$, and $\epsilon = .044$.



Zum Schluss: Ein Spiel, ...

Mastermind mit 4 Löchern und 6 Farben:

- Codierer wählt verborgenen Farbcode ($6^4 = 1296$ Möglichkeiten).
- Decodierer muss Code möglichst schnell raten.
- Jeder Tipp wird beantwortet mit:
  - schwarzer Antwortstecker für „Farbe und Position richtig" sowie
  - weißer Stecker für „richtig erst nach einer Permutation"

... eine Modellierung ...

Mathematisches Modell:

Jede Position entspricht einer Menge von Codes

(nämlich der Menge von denjenigen Codes, die mit den bisherigen Fragen und Antworten kompatibel sind).

… und 5x Optimalität

- Code wird mit Gleichverteilung ausgelost („average case”): zu erwartende Rateversuche des Decodierers sind minimal 5625/1296 = 4,340 (Koyama, Lai 1993).
- Der Codierer darf kompatibel zu vorangegangen Antworten „mogeln“, d.h. seinen Code wechseln („worst case“): 5 Rateversuche (Knuth 1976).
- Spieltheoretischer Wert (bei gemischten Strategien): 5600/1290 = 4,341 (Michael Wiener 1995, unveröffentlicht)
- Spieltheoretische Minimax-Strategie bei 2 simultanen Partien mit vertauschten Rollen
- Spieltheoretische Minimax-Strategie bei 2 sequentiellen Partien mit vertauschten Rollen

Für Risiken und Nebenwirkungen der beschriebenen Strategien wird ...

… nicht gehaftet!

Literatur und Web-Links:

Einige Web-Links auf meine Homepage sind direkt auf den Folien angegeben: Es handelt sich insbesondere um den interaktiven **Black-Jack-Rechner** sowie die beiden **Monopoly-Animationen**. Alle drei Programme sind in JavaScript (und HTML) realisiert, so dass der Quellcode im Prinzip offen zugänglich ist (beispielsweise für Modifikationen).

Fast alle Themen werden in meinem Buch „Glück, Logik und Bluff" behandelt. Dort sind auch zahlreiche Referenzen auf die Originalliteratur zu finden.

Online (vollständig nur in lizenzierenden Bibliotheken):

http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9696-4

Einzig nicht in meinem Buch enthalten ist die Analyse des Swiss Lotto (stattdessen wird die entsprechende Untersuchung von Bosch über Lotto-Tipps in Baden-Württemberg referiert):

Hans Riedwyl: „Zahlenlotto. Wie man mehr gewinnt", Bern 1990.

Norbert Henze, Hans Riedwyl: „How to win more. Strategies for increasing a lottery win", Nattick 1998.

Zu Monopoly ist noch anzumerken, dass in meinem Buch die deutsche sowie die amerikanische Ausgabe untersucht werden, die sich in Bezug auf die Ereignis- und Gemeinschaftskarten früher leicht unterschieden. Die früheren schweizer Ausgaben scheinen aber, soweit ich recherchieren konnte, äquivalent zur deutschen Ausgabe zu sein.